УДК 512.552

О. В. Зеленський

ЦИКЛИ ДОПУСТИМИХ САГАЙДАКІВ

A. V. Zelensky. *Cycles of admissible quivers*, Mat. Stud. **42** (2014), 3–8.

We study cycles of admissible quivers. Some sufficient conditions under which the deletion of an arrow in the admissible quiver results in another admissible quiver are presented. We also find a sufficient condition under which the weight of a given cycle in an admissible quiver is greater than or equal to k.

А. В. Зеленский. *Циклы допустимых колчанов* // Мат. Студії. – 2014. – Т.42, №1. – С.3–8.

Рассматриваются циклы допустимых колчанов. Найдены достаточные условия того, чтобы после удаления стрелки допустимого колчана получили также допустимый колчан. Получены достаточные условия того, что цикл допустимого колчана весит не меньше, чем k.

1. Вступ. Один із аспектів теорії кілець є вивчення властивостей кілець за допомогою теорії графів. Кожний черепичний порядок повністю визначається своєю матрицею показників і дискретно нормованим кільцем. Багато властивостей таких кілець повністю визначаються їх матрицями показників, зокрема, сагайдаки таких кілець. Вперше матриці показників стали окремим об'єктом вивчення у 2003 році в [6]. В роботі продовжуються дослідження матриць показників. Вона присвячена дослідженню циклів допустимих сагайдаків. Всі необхідні означення і факти з теорії черепичних порядків, теорії матриць показників та їх сагайдаків можна знайти в монографіях [1], [2].

2. Попередні відомості.

Означення 1. Матриця $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ ($M_n(\mathbb{Z})$ — це кільце матриць розмірності n з цілими елементами), для якої виконуються наступні умови:

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geqslant \alpha_i$ для всіх $i,\ j,\ k \in \{1, \ldots, n\}$,
2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i \in \{1, \ldots, n\}$,

називається *матрицею показників*. Матриця показників, для якої виконується умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geqslant 1$ для всіх $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ $(i \neq j)$

називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$ — зведена матриця показників. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(1)} = (\beta_{ij}) = \mathcal{E} + E_n \in M_n(\mathbb{Z})$, де E_n — одинична матриця. Введемо матрицю $\mathcal{E}^{(2)} = (\gamma_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$: $\gamma_{ij} = \min\limits_k \{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

2010 *Mathematics Subject Classification:* 05C22, 16H10.
Keywords: exponent matrix; admissible quiver; cycle of quiver.

Теорема 1 ([1])**.** *Матриця* $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$ *є матрицею суміжності простого сильно зв'язного сагайдака.*

Означення 2. *Сагайдаком зведеної матриці показників* $Q = Q(\mathcal{E})$ називається сагайдак, матриця суміжності якого задається формулою $[Q] = \mathcal{E}^{(2)} - \mathcal{E}^{(1)}$.

Означення 3. Зведені матриці показників $\mathcal{E}_1$ і $\mathcal{E}_2$ називається *еквівалентними*, якщо одну можна отримати з іншої за допомогою елементарних перетворень двох типів:

1) відняти ціле число t від елементів i-го рядка та додати це число до елементів i-го стовпчика;
2) поміняти місцями два рядки і поміняти місцями два стовпчика з такими ж номерами.

Означення 4. Сагайдак Q називається *допустимим*, якщо існує зведена матриця показників $\mathcal{E}$ така, що $Q(\mathcal{E}) = Q$.

Означення 5. Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається *зваженим*, якщо визначена функція $\omega\colon AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки. Сума ваг всіх стрілок шляху називається *вагою шляху.*

Теорема 2 ([4])**.** *Сильно зв'язний сагайдак* $Q = (VQ, AQ)$ *є допустимим тоді і тільки тоді, коли існує вагова функція* $\omega\colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ *, яка задовольняє наступним умовам:*

1) *вага стрілки з точки* i *у точку* j *менша за вагу шляху з точки* i *у точку* j *довжини* $l \geq 2$;
2) *вага петлі в точці* i *менша за вагу будь-якого циклу, що проходить через точку* i *довжини* $l \geq 2$;
3) *вага будь-якого циклу більша або дорівнює 1;*
4) *вага петлі дорівнює 1;*
5) *через кожну точку без петлі проходить цикл довжини* $l \geq 2$*, вага якого дорівнює 1.*

Зауваження 1. Згідно умов (4) та (5) через кожну точку допустимого сагайдака проходить цикл ваги 1.

Означення 6. Простий цикл у сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати *одиничним.*

Твердження 1 ([5])**.** *У допустимому сагайдаку* $Q = (VQ, AQ)$ *між вершинами одиничного циклу не існує інших стрілок, окрім стрілок цього циклу.*

Твердження 2 ([5])**.** *Допустимий сагайдак* Q *не може містити двох стрілок* (ν_i, ν_a) *та* (ν_j, ν_a) *та не може містити стрілки* $(\nu_a, \nu_i), (\nu_a, \nu_j)$ *де вершини* ν_i, ν_j *належать одному одиничному циклу.*

Теорема 3. *Якщо для циклу допустимого сагайдака* Q *і вершини* u*, що не є вершиною цього циклу, існує* k *різних стрілок, які починаються у вершині* u *та закінчуються в вершинах циклу* C *(починаються у вершинах циклу та закінчуються у вершині* u*), то для довільної вагової функції вага циклу не менша, ніж* k*.*

Доведення. Нехай $\omega\colon AQ \to \mathbb{N}\cup\{0\}$ — вагова функція, задана на множині стрілок допустимого сагайдака Q, яка задовольняє умовам теореми 2. Нехай $C=(\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p)$ — цикл, де $\nu_i\neq\nu_j$ при $i\neq j$ та $u\notin\{\nu_1,\nu_2,\dots,\nu_p\}$. Позначимо через $\omega(\nu_i,\nu_j)$ вагу шляху із вершини ν_i у вершину ν_j сагайдака Q по циклу C. Нехай $(u,\nu_{i_1}),(u,\nu_{i_2}),\dots,(u,\nu_{i_k})$ — k стрілок, які починаються у вершині u та закінчуються у вершинах $\nu_{i_1},\nu_{i_2},\dots,\nu_{i_k}$ циклу C. Можемо вважати, що $i_1<i_2<\ldots<i_k$. За теоремою 2 вага шляху із вершини u у вершину ν_{i-1}, $j\in\{1,\dots,k\}$ $(\nu_0=\nu_k)$ більша, ніж вага стрілки (u,ν_{i_j}). Тому маємо систему нерівностей

$$\begin{cases}\omega(u,\nu_{i_1})+\omega(\nu_{i_1},\nu_{i_2})>\omega(u,\nu_{i_2}),\\ \omega(u,\nu_{i_2})+\omega(\nu_{i_2},\nu_{i_3})>\omega(u,\nu_{i_3}),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega(u,\nu_{i_k})+\omega(\nu_{i_k},\nu_{i_1})>\omega(u,\nu_{i_1}).\end{cases}$$

Ця система рівносильна системі

$$\begin{cases}\omega(u,\nu_{i_1})+\omega(\nu_{i_1},\nu_{i_2})\geq\omega(u,\nu_{i_2})+1,\\ \omega(u,\nu_{i_2})+\omega(\nu_{i_2},\nu_{i_3})\geq\omega(u,\nu_{i_3})+1,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots,\\ \omega(u,\nu_{i_k})+\omega(\nu_{i_k},\nu_{i_1})\geq\omega(u,\nu_{i_1})+1.\end{cases}$$

Після додавання лівих та правих частин нерівностей останньої системи отримаємо

$$\omega(u,\nu_{i_1})+\omega(u,\nu_{i_2})+\ldots+\omega(u,\nu_{i_k})+\omega(\nu_{i_1},\nu_{i_2})+\omega(\nu_{i_2},\nu_{i_3})+\ldots+\omega(\nu_{i_k},\nu_{i_1})\geq$$
$$\geq\omega(u,\nu_{i_1})+\omega(u,\nu_{i_2})+\ldots+\omega(u,\nu_{i_k})+k.$$

Після спрощення маємо $\omega(\nu_{i_1},\nu_{i_2})+\omega(\nu_{i_2},\nu_{i_3})+\ldots+\omega(\nu_{i_k},\nu_{i_1})\geq k$.

Отже, вага циклу C не менша, ніж k. Випадок, коли k стрілок починаються у вершинах циклу C і закінчуються у вершині u, розглядається аналогічно. □

Теорема 4. *Для довільного натурального k існує допустимий сагайдак Q^*, який містить простий цикл ваги k на попарно різних вершинах.*

Доведення. Для $k=1$ простий цикл $(1,\,2)$ з матрицею суміжності $[Q^*]=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ є допустимим сагайдаком. $[Q^*]=Q(\mathcal{E})$, де $\mathcal{E}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ — зведена матриця показників. Очевидно, що цикл $(1,\,2)$ — одиничний.

При $k>1$ розглянемо сагайдак Q з $(2k+2)$-ьох вершин і $(3k+3)$-ьох стрілок: $VQ=\{1,2,\dots,2k+2\}$,

$$AQ=\left(\bigcup_{i=1}^{k+1}\sigma_{2i-1,2i}\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k}\sigma_{2i,2i+1}\right)\cup\left(\bigcup_{i=1}^{k}\sigma_{2i+1,2i-1}\right)\cup\big\{\sigma_{1,2k+1},\sigma_{2k,+2,1}\big\}.$$

Це допустимий сагайдак. Дійсно, вагова функція $\overline{\omega}\colon AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, де $\overline{\omega}\big(\sigma_{2i-1,2i}\big)=1$ для $i\in\{1,\dots,k+1\}$ і $\overline{\omega}$ приймає значення 0 для всіх інших стрілок сагайдака Q, задовольняє умовам теореми 2. Тому Q — допустимий сагайдак. Оскільки вершини $2,4,\dots,2k+2$ без петель, то для довільної вагової функції $\overline{\omega}\colon AQ\to\mathbb{N}\cup\{0\}$, що задовольняє умовам теореми 2, цикли $(1\ 2\ 3),(3\ 4\ 5),\dots,(2k+1\ 2k+2\ 1)$ — одиничні. Сагайдак Q є об'єднанням $(k+1)$-го одиничного циклу. Тому $\omega\big(\{AQ\}\big)=k+1$.

З іншого боку сагайдак Q є об'єднанням двох циклів $C_1 = (1\ 2\ 3 \dots 2k+1\ 2k+2)$ і $C_2 = (1\ 2k+1, 2k-1 \dots 5\ 3)$. Тому $\omega\big(\{AC_1\}\big) + \omega\big(\{AC_2\}\big) = \omega\big(\{AQ\}\big) = k+1$. Оскільки вага циклу не менша, ніж 1, то

$$\omega\big(\{AC_1\}\big) = k + 1 - \omega\big(\{AC_2\}\big) \leq k. \tag{1}$$

Розглянемо сагайдак Q^*, який отримується із сагайдака Q додаванням однієї вершини u, стрілок $\sigma_{u,2i}$, для $i \in \{1, \dots, k\}, \sigma_{2u}$ та петлі σ_{uu}. Сагайдак Q^* також допустимий. Визначимо вагову функцію $\omega^* \colon AQ^* \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ наступним чином:

$\omega^*(2i-1, 2i) = 1$ для всіх $i \in \{1, \dots, k\}, \omega^*(u, 2i) = 1$ для всіх $i \in \{1, \dots, k\}$,

$\omega^*(1, 2k+1) = \omega^*(2, u) = \omega^*(u, u) = 1$;

ω^* приймає значення 0 для всіх інших стрілок сагайдака Q^*.

Ця вагова функція задовольняє всім умовам теореми 2. Отже, Q^* допустимий сагайдак. За теоремою 3 для довільної вагової функцією $\omega \colon AQ^* \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що задовольняє умови теореми 2, $\omega(1\ 2\ 3\ 4\ 2k+1\ 2k+2\ 1) = \omega\big(\{AC_1\}\big) \geq k$. Оскільки для цієї функції виконується і нерівність (1), то $\omega\big(\{AC_1\}\big) = k$. □

З твердження 1 випливає, що з кожної вершини одиничного циклу виходить тільки одна вершина і в кожну вершину одиничного циклу входить тільки одна вершина. Узагальнення цього факту виявилося несподіваним. Вже цикл ваги 2 може містити багато стрілок.

Приклад 1. Розглянемо сагайдак Q з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ і множиною стрілок

$$AQ = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \sigma_{2i+2,2i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{k} \sigma_{2j,2j-2}\right) \cup \big\{\sigma_{21}, \sigma_{2,2k+1}, \sigma_{2k,3}, \sigma_{2k+1,2k}, \sigma_{1,1}\big\} \cup A,$$

де A — деяка підмножина множини $\bigcup_{i=1}^{k-2} \sigma_{2k-2i,2i+3}$.

Сагайдак Q містить цикл $(1\ 3\ 5 \dots\ 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \dots 6\ 4\ 2)$, петлю у вершині 1 та від 2 до k стрілок для $0 \leq i \leq k-1$. Визначимо на AQ вагову функцію ω наступним чином. Покладемо $\omega(\sigma_{21}) = \omega(\sigma_{2k+1,2k}) = \omega(\sigma_{11}) = 1$. Вага інших стрілок дорівнює 0.

Легко переконатися, що так визначена вагова функція задовольняє умовам теореми 2. Тому сагайдак Q є допустимим. Цей сагайдак має цикл $(1\ 3\ 5 \dots 2k-3\ 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \dots 4\ 2)$ ваги 2 і між вершинами циклу, окрім петлі, є ще від 2 до k стрілок.

Приклад 2. Розглянемо сагайдак Q з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \dots, 2k\}$ і множиною стрілок

$$AQ = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \sigma_{2i-1,2i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{k} \sigma_{2j,2j-2}\right) \cup \big\{\sigma_{21}, \sigma_{2k-1,2k}, \sigma_{2,2k-1}, \sigma_{2k,1}\big\} \cup A,$$

де $A \subset \bigcup_{i=2}^{k-1} \sigma_{2i,2k+1-2i}$.

Сагайдак Q містить цикл $(1\ 3\ 5 \dots 2k-3\ 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \dots 4\ 2)$ та від 2 до k стрілок, де $1 \leq i \leq k$. $\omega(\sigma_{21}) = \omega(\sigma_{2k-1,2k}) = 1$. Вага інших стрілок дорівнює 0.

Лема 1. *Нехай $\mathcal{E} = (a_{ij})$ — зведена матриця показників, $Q = Q(\mathcal{E})$ — сагайдак матриці показників $\mathcal{E}$, σ_{ij} — стрілка сагайдака $Q, \omega \colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ — вагова функція, що відповідає матриці $\mathcal{E}$. Тоді вага циклу мінімальної ваги, який містить стрілку σ_{ij} дорівнює $a_{ij} + a_{ji}$.*

Доведення. Вагова функція ω відповідає матриці показників $\mathcal{E}$. Тому $\omega(\sigma_{ij}) = a_{ij}$. a_{ji} дорівнює мінімальній вазі шляху із j в i. Тому вага циклу, який проходить через стрілку σ_{ij} та має мінімальну вагу, дорівнює $a_{ij} + a_{ji}$. □

Розглянемо умови, за яких видалення стрілки допустимого сагайдака дає допустимий сагайдак. Очевидно, що отриманий після видалення стрілки сагайдак має залишитися сильнозв'язним. Але цієї умови недостатньо.

Приклад 3. $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Сагайдак Q є допустимим, бо він є сагайдаком матриці показників $\mathcal{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Але після видалення стрілки σ_{13} одержимо сагайдак Q^* з матрицею суміжності $[Q^*] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Якщо цикл (1 2 3 4) — одиничний, то вершина 2 має бути без петлі. Якщо ж цикл (1 2 3 4) має вагу більшу, ніж 1, то всі вершини мають бути з петлями. Отже, не існує вагової функції, що задовольняє умовам теореми 2. Тому сагайдак Q^* не є допустимим.

Теорема 5. *Нехай Q — допустимий сагайдак, $\sigma_{u\nu}$ — стрілка сагайдака Q, Q^* — сагайдак, який утворюється з Q видаленням стрілки $\sigma_{u\nu}$. Сагайдак Q^* є допустимим, якщо виконуються умови:*

1) *в Q існує шлях із вершини u в вершину ν, відмінний від стрілки $\sigma_{u\nu}$;*
2) *існує вагова функція ω, для якої Q — допустимий сагайдак і стрілка $\sigma_{u\nu}$ не належить одиничному циклу.*

Доведення. Нехай Q — допустимий сагайдак і $\sigma_{u\nu} \in AQ$. Тоді існує вагова функція $\omega \colon AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, що задовольняє умовам теореми 2. Нехай Q^* — сагайдак, що утворюється з Q видаленням стрілки $\sigma_{u\nu}$. Визначимо вагову функцію $\omega^* \colon AQ^* \to \mathbb{N} \cup \{0\}$ наступним чином: $\omega^*(\sigma_{ij}) = \omega(\sigma_{ij})$ для довільної стрілки σ_{ij} сагайдака Q^*.

За умовою 1 теореми сагайдак Q^* — сильнозв'язний. За умовою 2 одиничні цикли сагайдаків Q та Q^* співпадають. Для довільного шляху $P(i,j)$ із вершини i у вершину j маємо $\omega^*\left(P(i,j)\right) \geq \omega\left(P(i,j)\right)$. Зокрема, для довільного циклу $P(i,i)$ маємо $\omega^*\left(P(i,i)\right) \geq \omega\left(P(i,i)\right)$. Тому для довільної стрілки σ_{ij} або петлі σ_{ii} сагайдака Q^* виконуються нерівності

$$\omega^*(P(i,j)) \geq \omega(P(i,j)) > \omega(\sigma_{ij}) = \omega^*(\sigma_{ij}),\ \omega^*(P(i,i)) \geq \omega(P(i,i)) > \omega(\sigma_{ii}) = \omega^*(\sigma_{ii}),$$

де $P(i,j)$ — відмінний від стрілки шлях із вершини i у вершину j.

Отже, вагова функція ω^* задовольняє умовам теореми 2 і тому сагайдак Q^* є допустимим. $\square$

Зауваження 2. Використовуючи лему 1 умову 2 теореми 5 можна сформулювати наступним чином: існує зведена матриця показників $\mathcal{E} = (a_{ij})$ з $Q(\mathcal{E}) = Q$ така, що $a_{u\nu} + a_{\nu u} > 1$.

3. Висновки. Якщо для циклу допустимого сагайдака існує k різних стрілок, які починаються у деякій вершині, що не належить циклу, та закінчуються у вершинах циклу, то вага циклу не менша, ніж k. Якщо у допустимому сагайдаку видалити стрілку, яка не належить одиночному циклу, та при цьому не порушиться сильна зв'язність сагайдака, то отримаємо допустимий сагайдак.

ЛІТЕРАТУРА

1. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V., Algebras rings and modules, mathematical and its applications, Springers, 2004, V.1, 380 p.
2. Hazewinkel M., Gubareni N., Kirichenko V.V., Algebras rings and modules, mathematical and its applications, Springers, 2007, V.2, 400 p.
3. Kirichenko V.V., Zelenskiy O.V., Zhuravlev V.N. *Exponent matrices and tiled order over discrete valuation rings*// International Journal of Algebra and Computation. — 2005. — V.15, №5&6. – P. 1–16.
4. Zhuravlev V.N. *Acceptable quivers*// Fundamental and Applied Mathematics. – 2008. – V.14, №7. – P. 121–128. (in Russian)
5. Zhuravlev V.N., Zelenskiy A.V., Darmosiuk V.M. *Unit quiversof exponent matrices*// Bulletin of Taras Shevchenko National University of Kyiv. Series: Physics & Mathematics. – 2012. – №4. – P. 27–31. (in Ukrainian)
6. Chernousovs Zh.T., Dokuchaev M.A., Khibina M.A., Kirichenko V.V., Miroshnichenko S.G., Zhuravlev V.N., Tiled orders over discrete valuation rings, finite Markov chains and partially ordered sets. II, Trabalhos do departamento de matematica, Universidade de Sao Paulo, Instituto de matematica e estatistica, Sao Paulo-Brazil, 2003, 43 p.

Kamenetz-Podilsk National University of I. Ohienko
zelik82@mail.ru

Надійшло 13.12.2013
Після переробки 17.10.2014