

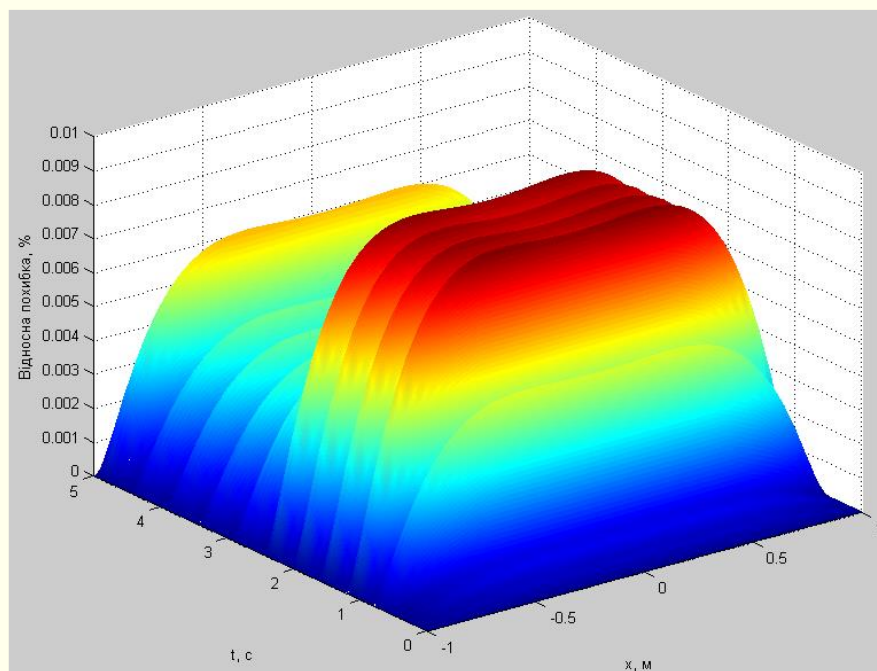
Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

В. А. ФЕДОРЧУК

В. А. ІВАНЮК

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК



ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Кам'янець-Подільський
2023

УДК 004.942:519.876.2

ББК 22.183.4

Ф32

Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка (протокол № 9 від 30 серпня 2023 року)

РЕЦЕНЗЕНТИ:

О. Є. Коваленко, доктор технічних наук, професор кафедри комп'ютерних систем, мереж та кібербезпеки Національного університету біоресурсів і природокористування України;

Ю. В. Теплінський, доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Федорчук В. А., Іванюк В. А.

Ф32 Сучасні проблеми комп'ютерного моделювання: навчально-методичний посібник. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 101 с.

Електронна версія посібника доступна за покликаннями:

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7548>

Розглянуто методи та засоби математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів, що відбуваються в лінійних об'єктах із зосередженими та розподіленими параметрами. Наводяться способи математичного опису лінійних динамічних об'єктів, методи числової та комп'ютерної реалізації їх моделей.

Для здобувачів другого (магістерського) рівня вищої освіти спеціальності 122 Комп'ютерні науки.

УДК 004.942:519.876.2

ББК 22.183.4

© Федорчук В. А., Іванюк В. А., 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	7
Тема 1. Загальні питання математичного та комп'ютерного моделювання	9
1.1. Загальні питання комп'ютерного моделювання	9
1.2. Основні класи та типи задач комп'ютерного моделювання	11
1.3. Формалізація та математичні особливості моделей.....	12
Контрольні запитання.....	14
Тема 2. Математичне моделювання	15
2.1. Особливості методу математичного моделювання	15
2.2. Аналітичне моделювання	15
2.3. Імітаційне моделювання.....	17
2.4. Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання.....	18
Контрольні запитання.....	18
Тема 3. Математичний опис лінійних динамічних об'єктів	19
3.1. Математичний опис лінійних динамічних об'єктів.....	19
3.2. Простір станів	20
3.2. Моделі складних динамічних об'єктів	20
3.3. Функція Гріна	21
3.4. Інтегральні моделі.....	22
3.5. Інтегро-диференціальні моделі.....	22
Контрольні запитання.....	23
Тема 4. Основи операційного числення	24
4.1. Перетворення Лапласа.....	24
4.2. Властивості перетворення Лапласа.....	25
4.3. Передатна функція лінійних динамічних об'єктів	27
Контрольні запитання.....	27
Тема 5. Структурно-алгоритмічний метод комп'ютерного моделювання складних динамічних систем	28
5.1. Проблеми моделювання складних динамічних систем	28

5.2. Структурно-алгоритмічний метод моделювання.....	29
Контрольні запитання.....	32
Тема 6. Типові ланки лінійних динамічних об'єктів.....	33
6.1. Типи ланок лінійних динамічних об'єктів.....	33
6.2. Передатні, перехідні та вагової функції типових ланок	34
Контрольні запитання.....	38
Тема 7. З'єднання ланок і перетворення структурних схем лінійних динамічних об'єктів.....	39
7.1. Послідовне з'єднання ланок	39
7.2. Паралельне з'єднання ланок.....	40
7.3. Зустрічно-паралельне з'єднання (з'єднання ланок зі зворотним зв'язком).....	41
Контрольні запитання.....	42
Тема 8. Апроксимація моделей об'єктів з розподіленими параметрами шляхом дискретизації диференціальних рівнянь з частинними похідними	43
8.1. Дискретизація диференціального рівняння з частинними похідними на основі методу прямих	43
8.2. Структурна реалізація системи звичайних диференціальних рівнянь другого порядку	44
Контрольні запитання.....	45
Тема 9. Дискретне перетворення Лапласа, z-перетворення.....	46
9.1. Дискретне перетворення Лапласа.....	46
9.2. Z-перетворення. Властивості Z-перетворення	46
Контрольні запитання.....	48
Тема 10. Використання z-перетворення для числової реалізації моделей, заданих передатними функціями	49
10.1. Побудова математичної моделі для коливальної ланки	51
Контрольні запитання.....	53
Тема 11. Побудова комп'ютерної моделюючої системи на основі застосування структурно-алгоритмічного методу	54
11.1. Структура моделюючої системи.....	54

11.2. Структура і функціонування розв'язуючого модуля моделюючої системи.....	58
Контрольні запитання.....	61
Тема 12. Функціонування комп'ютерної моделюючої системи.....	62
12.1. Приведення вихідної математичної моделі до вигляду, зручному для її комп'ютерної реалізації	62
12.2. Приклад створення програмного коду моделі.....	63
Тема 13. Інтегральні моделі динамічних об'єктів	66
13.1. Інтегральні рівняння	66
13.2. Типи інтегральних рівнянь	66
13.3. Метод квадратур	67
13.4. Метод квадратур для рівняння Вольтерри II роду	68
Контрольні запитання.....	69
Тема 14. Вагова функція. Перехідна характеристика	70
14.1. Вагова або імпульсна перехідна функція системи	70
14.2. Перехідна функція	72
14.3. Властивості одиничного імпульсу	73
Контрольні запитання.....	74
Тема 15. Інтегральний оператор згортки	75
15.1. Математичний опис лінійних динамічних об'єктів на основі оператора згортки.....	75
15.2. Числова реалізація інтегрального оператора згортки.....	77
Контрольні запитання.....	82
Тема 16. Інтегральні моделі з виродженим ядром.....	83
16.1. Проблема накопичення обчислень при числовій реалізації інтегральних моделей з ядром загального вигляду	83
16.2. Метод виродженого ядра інтегрального оператора.....	87
Контрольні запитання.....	88
Тема 17. Проблеми побудови інтегральних динамічних моделей.....	89
17.1. Отримання інтегральних моделей за моделями, що подані в диференціальній формі	89

17.2. Побудова інтегральних моделей за експериментальними даними.....	91
Контрольні запитання.....	91
Тема 18. Загальні питання ідентифікації систем	92
18.1. Постановка задачі ідентифікації характеристик системи.....	92
18.2. Класифікація методів ідентифікації.....	94
Контрольні запитання.....	95
Тема 19. Методи ідентифікації за допомогою синусоїдальних, ступінчастих та імпульсних сигналів.....	96
19.1. Особливості використання різних типів вхідних сигналів	96
19.2. Методи ідентифікації, засновані на перетворенні Фур'є.....	97
Контрольні запитання.....	99
Література.....	100

ВСТУП

Сучасний стан розвитку інформаційних технологій характеризується інтенсивним використанням методів математичного та комп'ютерного моделювання. З розвитком засобів обчислювальної техніки комп'ютерні моделі стали невід'ємною складовою в розв'язуванні задач аналізу, проектування, контролю, діагностування, прийняття рішень, автоматичного керування тощо. Тому актуальною на теперішній час є проблема наукових розвідок і досліджень в галузі комп'ютерного моделювання.

До основних напрямків наукових досліджень в галузі комп'ютерного моделювання відносяться: розробка математичних методів та систем моделювання об'єктів та процесів; розробка обчислювальних, чисельно-аналітичних методів та алгоритмів обчислювальної математики; дослідження математичних моделей, проблем комп'ютерної алгебри, оптимізації, оцінювання, ідентифікації; дослідження обчислювальних алгоритмів (розроблення теорії похибок, визначення складності, збіжності, стійкості, рекурентних співвідношень); розвиток теорії обчислювального експерименту; розроблення математичних методів лінійного та нелінійного програмування; розроблення математичних методів недиференційованої, стохастичної, дискретної, опуклої та неопуклої оптимізації; дослідження складних систем різної природи, теорія та методи системного аналізу; розвиток основ системного аналізу як прикладної наукової методології, призначеної для дослідження складних міждисциплінарних проблем різної природи; розробка методологічних і теоретичних основ формалізації предметних галузей з позиції системного підходу; удосконалення методів формалізації системних задач, приведення їх до форми вирішення в реальних умовах, що характеризуються наявністю великої кількості суперечливих цілей, різних видів невизначеностей і ризиків; розробка обчислювальних алгоритмів і процедур з метою вирішення практичних задач міждисциплінарного характеру для застосувань, що належать до науково-технічної та соціально-економічної сфер діяльності людини, розробка засобів штучного інтелекту.

Саме тому задля належної підготовки магістрів спеціальності «Комп'ютерні науки» в Кам'янець-Подільському національному університеті імені Івана Огієнка було запроваджено навчальний курс «Сучасні проблеми комп'ютерного моделювання», до якого включено теоретичні теми, що стосуються способів математичного опису динамічних об'єктів та їх числової, алгоритмічної та комп'ютерної реалізації.

У даному навчально-методичному посібнику розглядаються саме питання алгоритмізації обчислювальних методів, які дають змогу розв'язувати широкий спектр задач комп'ютерного моделювання динамічних об'єктів різної природи.

Тема 1.

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

1.1. ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Комп'ютерне моделювання як метод виник і розвинувся завдяки алгоритмізації методів прикладної математики.

Прикладна математика (Applied mathematics) – це застосування математичних методів і алгоритмів в самих різних сферах життєдіяльності людини.

Застосування математики до будь-якої практичної проблеми починається з побудови математичної моделі. Маючи завдання, сформульоване математично, можна вибрати алгоритм її вирішення з множини вже наявних, або розробити новий алгоритм. Уміння будувати і аналізувати математичні моделі, вибір і розробка методів розв'язання – все це навички спеціаліста прикладної математики.

Сьогодні жодна серйозна задача не вирішується без використання обчислювальної техніки. Для фахівця комп'ютерних наук комп'ютер – це інструмент, за допомогою якого він реалізує розв'язування задачі, – як ручка для письма. «Комп'ютер» розуміється як знання мов і засобів програмування, так і спеціалізованих пакетів програм для різних предметних областей.

Відомо, що сьогодні на ринку праці високо цінуються програмісти. Проте ще більше цінуються (у тому числі і за кордоном) програмісти, які отримали фундаментальну математичну базу. Наприклад, це може бути аналітик в науково-технічній, банківській, фінансовій, технічній, інформаційній, консалтинговій та маркетинговій сферах. Він виступає в якості експерта в цих сферах, вивчає задачу в будь-якій предметній області, будує математичну модель задачі, визначає методи вирішення поставленої задачі, реалізує її вирішення з використанням сучасних технологій, інте-

рпретує отриманий результат у предметну область, рекомендує варіанти подальшого розвитку та оптимізації роботи системи, що вивчається.

Для цього він повинен володіти такими фаховими компетенціями, як:

- вміння використовувати математичні методи в різних прикладних областях;
- проводити аналіз природничих, соціально-економічних та екологічних процесів;
- здійснювати побудову математичних моделей реальних процесів і систем;
- проводити вибір математичного алгоритму розв'язання задачі;
- аналізувати шляхи комп'ютерної реалізації математичної моделі;
- здійснювати вивчення інформаційних систем методами математичного прогнозування і системного аналізу;
- застосувати пакети програм для вирішення прикладних задач в галузі економіки, фізики, хімії, біології, медицини, екології тощо;
- здійснювати проектування і створення програм і програмних комплексів, а також інформаційних ресурсів та систем;
- проводити організацію робіт і керування створенням програмного забезпечення.

В плані практичного застосування прикладна математика дає методологію отримання розв'язків, які можна трактувати як результати математичного моделювання.

1.2. ОСНОВНІ КЛАСИ ТА ТИПИ ЗАДАЧ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

На сьогоднішній час чіткого розмежування задач комп'ютерного моделювання не існує. Однак, з певною ймовірністю їх можна розділити наступним чином. За класами задачі комп'ютерного моделювання діляться на: обчислювальні методи, задачі математичної фізики, лінійного програмування, оптимізації і дослідження операцій, моделювання суцільних середовищ, теорії інформації, теорії ігор, теорії ймовірностей і математичної статистики, фінансової математики, криптографії, комбінаторики і в деякій мірі скінченної геометрії, теорії графів в додатку до мережевого планування.

За типами задачі комп'ютерного моделювання можна розділити на: задачі проектування, які передбачають знаходження оптимального за визначеними критеріями та характеристиками проекту; задачі автоматичного керування (стабілізуючого, з відслідковуванням, термінального, оптимального та ін.); задачі контролю, які передбачають обчислення за допомогою математичної моделі параметрів контрольованої системи для порівняння їх з реальними; задач діагностування, в яких математична модель використовується для ідентифікації причини відхилення контрольних параметрів від допустимих.

Методи моделювання можна класифікувати на чотири основні групи: аналітичні, обчислювальні, імітаційні, ймовірнісно-статистичні.

Аналітичні методи дозволяють отримати характеристики системи як деякі функції параметрів її функціонування. Таким чином, аналітична модель являє собою систему рівнянь, при вирішенні якої отримують параметри, необхідні для оцінки системи (час відповіді, перепускна здатність і т. д.).

При обчислювальних методах моделювання математична модель є також системою лінійних чи нелінійних рівнянь, але розв'язується така система рівнянь методами обчислювальної математики. Обчислювальні методи передбачають також ітераційне розв'язування задачі. На нульовій ітерації задається початковий розв'язок (наближення) і оцінюється його точність, на наступних ітераціях початкове наближення послідовно уточнюється. Ітераційний процес продовжується до тих пір, поки не буде досягнута задана точність розв'язку або не буде виконаний заданий критерій зупинки.

1.3. ФОРМАЛІЗАЦІЯ ТА МАТЕМАТИЧНІ ОСОБЛИВОСТІ МОДЕЛЕЙ

Сучасна математика дає виключно потужні й універсальні засоби дослідження. Практично кожне поняття в математиці, кожен математичний об'єкт, починаючи від поняття числа, є математичною моделлю. При побудові математичної моделі досліджуваного об'єкта чи явища виділяють ті його особливості, риси і деталі, які з одного боку містять більш-менш повну інформацію про об'єкт, а з іншого допускають математичну формалізацію. Математична формалізація означає, що особливостям і деталям об'єкта можна поставити у відповідність відповідні адекватні математичні поняття: числа, функції, матриці і так далі. Тоді зв'язки і відношення, що виявлені в досліджуваному об'єкті між окремими його деталями і складовими частинами можна записати за допомогою математичних співвідношень: рівності, нерівності, рівняння. В результаті виходить математичний опис досліджуваного процесу або явища, тобто його математична модель.

З розвитком обчислювальної техніки широке застосування отримали імітаційні методи моделювання для аналізу систем, переважаючими в яких є стохастичні впливи.

Суть імітаційного моделювання полягає в імітації процесу функціонування системи в часі, з дотриманням таких же співвідношень тривалості операцій як в системі-оригіналі. При цьому імітуються елементарні явища, що присутні в процесі; зберігається їх логічна структура, послідовність протікання в часі. Результатом імітаційного моделювання є отримання оцінок характеристик системи.

Відомий американський вчений Роберт Шеннон дає наступне визначення: «Імітаційне моделювання – процес конструювання моделі реальної системи і постановки експериментів на цій моделі з метою або зрозуміти поведінку системи, або оцінити (в рамках обмежень, що накладаються деяким критерієм або сукупністю критеріїв) різні стратегії, що забезпечують функціонування даної системи».

Всі імітаційні моделі використовують принцип чорного ящика. Це означає, що вони видають вихідний сигнал системи при надходженні до неї деякого вхідного сигналу. Тому на відміну від аналітичних методів

для отримання результатів необхідно здійснювати «прогін» імітаційних моделей, тобто подачу деякої послідовності сигналів, об'єктів або даних на вхід моделі і фіксацію вихідної інформації, а не «вирішувати» їх. Відбувається свого роду «вибірка» станів об'єкта моделювання (стану – власливості системи в конкретні моменти часу) з простору (множини) станів (сукупність всіх можливих значень станів). Наскільки репрезентативною виявиться ця вибірка, настільки результати моделювання будуть відповідати дійсності. Цей висновок показує важливість застосування ймовірно-статистичних методів оцінки результатів імітації.

У процесі імітаційного моделювання використовується метод статистичного моделювання, який спочатку розвивався як метод статистичних випробувань (Монте-Карло). Це обчислювальний метод, що полягає в одержанні оцінок імовірнісних характеристик, які збігаються з розв'язками аналітичних задач (наприклад, з розв'язуванням рівнянь або обчисленням визначеного інтегралу). Згодом цей метод став застосовуватися для імітації процесів, що відбуваються в системах, усередині яких є джерело випадковості або які схильні до випадкових впливів. Він отримав назву методу статистичного моделювання.

Методи імітаційного моделювання широко застосовуються при дослідженні систем масового обслуговування.

Ймовірно-статистичні методи моделювання застосовуються для опису залежностей між вихідними характеристиками системи і вхідними змінними (параметрами) системи, в разі якщо ці залежності:

- стохастичні за своєю природою, тобто дозволяють встановлювати лише імовірнісні логічні співвідношення між досліджуваними подіями A і B , а саме співвідношення типу «з факту здійснення події A слід, що подія B повинна статися, але не обов'язково, а лише з певною ймовірністю p ;
- виявляються на підставі вибірових даних статистичного спостереження за аналізованими подіями або змінними.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Якими основними фаховими компетенціями повинен володіти фахівець з комп'ютерних наук?
2. Які основні класи та типи задач комп'ютерного моделювання?
3. З якою метою вводиться класифікація задач комп'ютерного моделювання?
4. Що є результатом імітаційного моделювання?

ТЕМА 2.

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

2.1. ОСОБЛИВОСТІ МЕТОДУ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

Для дослідження характеристик процесу функціонування будь-якої системи S математичними методами, включаючи і машинні, повинна бути проведена формалізація цього процесу, тобто побудована математична модель.

Під математичним моделюванням будемо розуміти процес встановлення відповідності даному реальному об'єкту деякого математичного об'єкта, званого математичною моделлю, і дослідження цієї моделі, що дає змогу одержувати характеристики реального об'єкта, що досліджується.

Вид математичної моделі залежить як від природи реального об'єкта, так і від задач дослідження об'єкта і необхідної достовірності та точності вирішення цих задач. Будь-яка математична модель, як і всяка інша, описує реальний об'єкт лише з деяким ступенем наближення. Математичне моделювання можна розділити на **аналітичне, імітаційне та комбіноване.**

2.2. АНАЛІТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

Для **аналітичного моделювання** характерно те, що процеси функціонування елементів системи записуються у вигляді деяких функціональних співвідношень (алгебраїчних, інтегро-диференціальних, скінченорізницевих і т. п.) або логічних умов.

Аналітична модель може бути досліджена наступними методами:

- а) аналітичним, коли прагнуть отримати у загальному вигляді явні залежності для шуканих характеристик;
- б) чисельним, коли, не вміючи розв'язувати рівняння у загальному вигляді, прагнуть отримати числові результати при конкретних початкових даних;

в) якісним, коли, не маючи розв'язку в явному вигляді, можна знайти деякі властивості розв'язку (наприклад, оцінити стійкість розв'язку).

Найбільш повне дослідження процесу функціонування систем можна провести, якщо відомі явні залежності, які зв'язують шукані характеристики з початковими умовами, параметрами та змінними системи S . Однак такі залежності вдається отримати тільки для порівняно простих систем. При ускладненні систем дослідження їх аналітичним методом наштовхується на значні труднощі, які часто бувають непереборними. Тому, для використання аналітичного методу, в таких випадках, йдуть на істотне спрощення первинної моделі, щоб мати можливість вивчити хоча б загальні властивості системи. Таке дослідження на спрощеній моделі аналітичним методом допомагає отримати орієнтовні результати для визначення більш точних оцінок іншими методами. Числові методи дають змогу досліджувати у порівнянні з аналітичним методом більш широкий клас систем, але при цьому отримані розв'язки носять частковий характер. Чисельні методи особливо ефективні при використанні комп'ютерів.

В окремих випадках дослідження системи можуть задовольняти і ті висновки, які можна зробити при використанні якісного методу аналізу математичної моделі. Такі якісні методи широко використовуються, наприклад, в теорії автоматичного керування для оцінки ефективності різних варіантів систем управління.

В даний час набули поширення методи машинної реалізації дослідження характеристик процесу функціонування великих систем. Для реалізації математичної моделі на комп'ютері необхідно побудувати відповідний моделюючий алгоритм.

2.3. ІМІТАЦІЙНЕ МОДЕЛЮВАННЯ

При **імітаційному моделюванні** алгоритм, який реалізує модель, відтворює процес функціонування системи S у часі, причому імітуються елементарні явища, що формують процес, із збереженням їх логічної структури і послідовності протікання в часі, що дає змогу за вихідними даними отримати відомості про стан процесу в певні моменти часу, що дають можливість оцінити характеристики системи S .

Основною перевагою імітаційного моделювання, у порівнянні з аналітичним, є можливість вирішення більш складних завдань. Імітаційні моделі дозволяють досить просто враховувати такі фактори, як наявність дискретних і неперервних елементів, нелінійні характеристики елементів системи, численні випадкові впливи та інші, які часто створюють труднощі при аналітичних дослідженнях. В даний час імітаційне моделювання – найбільш ефективний метод дослідження великих систем, а часто і єдиний практично доступний метод отримання інформації про поведінку системи, особливо на етапі її проектування.

Коли результати процесу функціонування системи S , отримані при відтворенні на імітаційній моделі є реалізаціями випадкових величин і функцій, тоді для знаходження характеристик процесу потрібно його багаторазове відтворення з наступною статистичною обробкою інформації доцільно в якості методу машинної реалізації імітаційної моделі використовувати **метод статистичного моделювання**.

Першочергово був розроблений метод статистичних випробувань, який був числовим методом, що застосовувався для моделювання випадкових величин і функцій, імовірнісні характеристики яких співпадали з розв'язками аналітичних задач (така процедура отримала назву методу Монте-Карло). Потім цей прийом стали застосовувати і для машинної імітації з метою дослідження характеристик процесів функціонування систем, що підпадають випадковим впливам, тобто з'явився метод статистичного моделювання.

Отже, **методом статистичного моделювання** будемо надалі називати метод машинної реалізації імітаційної моделі, а **методом статисти-**

чних випробувань (Монте-Карло) – числовий метод розв'язування аналітичної задачі.

Методи імітаційного моделювання дають змогу вирішувати задачі аналізу великих систем S , включаючи задачі оцінки: варіантів структури системи, ефективності різних алгоритмів керування системою, впливу зміни різних параметрів системи. Імітаційне моделювання може бути покладено також в основу структурного, алгоритмічного і параметричного синтезу великих систем, коли потрібно створити систему із заданими характеристиками при певних обмеженнях, яка є оптимальною за деякими критеріями оцінки її ефективності.

При вирішенні задач машинного синтезу систем на основі їх імітаційних моделей крім розробки моделюючих алгоритмів для аналізу фіксованої системи необхідно також розробити алгоритми пошуку оптимального варіанту системи. Далі в методології машинного моделювання будемо розрізняти два основні розділи: **статистику і динаміку**, – основним змістом яких є відповідно питання аналізу та синтезу систем, заданих моделюючими алгоритмами.

2.4. КОМБІНОВАНЕ (АНАЛІТИКО-ІМІТАЦІЙНЕ) МОДЕЛЮВАННЯ

Комбіноване (аналітико-імітаційне) моделювання при аналізі і синтезі систем дає змогу об'єднати переваги аналітичного та імітаційного моделювання. При побудові комбінованих моделей проводиться попередня декомпозиція процесу функціонування об'єкта на складові, підпроцеси і для тих з них, де це можливо, використовуються аналітичні моделі, а для решти підпроцесів будуються імітаційні моделі. Такий комбінований підхід дозволяє охопити якісно нові класи систем, які не можуть бути досліджені за використанням лише аналітичного та імітаційного моделювання окремо.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що розуміють під математичним моделюванням?
2. Чим відрізняються методи аналітичного та імітаційного моделювання?
3. Які переваги комбінованого (аналітико-імітаційного) моделювання?

Тема 3.

МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

3.1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Динамічні об'єкти називаються *лінійними*, якщо рівняння динаміки і, отже, статика цих об'єктів лінійні. Характерною рисою лінійних динамічних об'єктів є застосування до них *принципу суперпозиції*, який можна сформулювати у такий спосіб.

Нехай x_j ($j = 1, 2, \dots, m$) – деякі (взагалі говорячи, різні) вхідні сигнали лінійних динамічних об'єктів, а $y_j(t)$ – реакції на кожен з цих сигналів. Тоді для лінійних динамічних об'єктів сумарна реакція на сумарний вхідний сигнал буде визначатися так:

$$\sum_{j=1}^m y_j(t). \quad (3.1)$$

Лінійні динамічні об'єкти дуже різноманітні. Їхні параметри можуть мінятися з часом чи залишатися сталими, бути як зосередженими, так і розподіленими. Часто такі динамічні об'єкти містять лінійні імпульсні елементи.

Найпростішим прикладом лінійного динамічного об'єкта є об'єкт з сталими зосередженими параметрами. В загальному випадку вони можуть бути описані лінійним диференціальним рівнянням з сталими коефіцієнтами виду

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = b_0 x^{(m)}(t) + b_1 x^{(m-1)}(t) + \dots + b_m x(t), \quad (3.2)$$

які встановлюють залежність $y(t)$ реакції (вихідний сигнал) від $x(t)$ – впливу на систему (вхідний сигнал). Порядок диференціального рівняння n , величини a_i ($i = 0, 1, 2, \dots, n$), b_j ($j = 0, 1, \dots, m$) цілком визначаються параметрами самої системи і, природньо, є дійсними числами.

У реальних динамічних об'єктах, зазвичай, $n > m$.

Загальний розв'язок рівняння (3.2) складається з двох частин:

загального розв'язку однорідного диференціального рівняння

$$a_0 y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \dots + a_n y(t) = 0$$

і часткового розв'язку рівняння (3.2).

3.2. ПРОСТІР СТАНІВ

Широке застосування в теорії керування знайшли методи простору станів. У випадку лінійної неперервної системи зі змінними параметрами без запізнювання використовується наступна математична модель:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + B(t)x(t) \\ z(t) &= C(t)y(t) + D(t)x(t) \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

де $y(t)$ – вектор стану; $x(t)$ – вектор керування; $z(t)$ – вектор виходу; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ – відомі матриці відповідної розмірності.

3.2. МОДЕЛІ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Фізичні теорії складних розподілених об'єктів (полів і середовищ) приводять до моделей у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних, які у самому загальному випадку є функціональними рівняннями виду

$$\Phi(x, y, z, \dots, u, u_x, u_y, u_z, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (3.4)$$

що містять одну або більше частинних похідних (у тому числі вище першого порядку) від шуканої функції декількох змінних $u = (x, y, z, \dots)$ і які зв'язані деякою функціональною залежністю Φ . Описові можливості моделей цього виду винятково великі, а самі моделі найчастіше є наслідком фізичних законів, які представлені у диференціальній формі. Відомі також великі труднощі, що зустрічаються на шляху реалізації моделей цього виду, особливо при розв'язуванні нелінійних задач. Цим пояснюється застосування великої кількості прийомів спрощення або перетворення їх до інших видів моделей як на фізичному, так і на математичному рівнях. Зокрема, такими прийомами є спрощення постановок задач (зниження

розмірності), використання фізичних законів в інтегральній формі, лінеаризації тощо. Граничні умови, що накладаються на шукані функції і їх похідні у сукупності з рівнянням (3.4) утворюють велику різноманітність постановок задач, для розв'язування яких застосувати який-небудь загальний, універсальний підхід неможливо.

Значного поширення в теорії математичного моделювання набули рівняння, що мають у загальному випадку вигляд

$$F(x, u(x), u'(x), \dots, u^{(n)}(x)) = 0, \quad (3.5)$$

де F – деяка функція, що визначає залежність (в загальному випадку нелінійну) між незалежною змінною x , шуканою функцією $u = u(x)$ та її похідними до n -го порядку включно.

Рівняння виду (3.5) простіше, ніж рівняння (3.4), хоча і для них залишається актуальною проблема реалізації та якісного дослідження. Область застосування моделей даного виду традиційно включає різноманітні реальні системи, які в багатьох випадках складаються із сукупності взаємопов'язаних об'єктів, зокрема, механічні та електричні системи, рухомі об'єкти, системи керування тощо. Для рівняння (3.4) можуть ставитись початкова або крайова задачі, методи розв'язування яких можуть суттєво відрізнитися.

3.3. ФУНКЦІЯ ГРІНА

Для опису передатних властивостей елементів з розподіленими параметрами можна використовувати функцію Гріна (вагову функцію) $v(x, \xi, t - \tau)$, яка відтворює реакцію розподіленого елемента в точці x в момент часу t при нульових початкових та однорідних крайових умовах, на імпульсний сигнал, прикладений в кожній точці ξ та в кожен момент часу τ . Тоді лінійний стаціонарний розподілений блок описується інтегральним оператором:

$$Q(x, t) = \int_{t_0}^t \int_{D_1} v(x, \xi, t - \tau) \omega(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (3.6)$$

де D_1 – область в r -вимірному евклідовому просторі; $\omega(\xi, \tau)$ – вхідна дія.

Зв'язок між передатною і ваговою функцією $v(x, \xi, t)$ задається співвідношенням

$$W(x, \xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(x, \xi, t) dt. \quad (3.7)$$

3.4. ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ

Значно менш систематизованою і дослідженою в технічних застосуваннях є область використання інтегральних рівнянь, які в загальному нелінійному випадку можуть представляти у вигляді

$$\int_Q K(x, y, u(y)) dy = F(x, u(x)), \quad (3.8)$$

де інтеграл береться по області Q , а шукана функція u може залежати як від однієї, так і від багатьох змінних $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Q(x)$; функції K (ядро) і F – наперед відомі.

Математичні моделі виду (3.8) мають ряд переваг, зокрема, вони містять в собі повну постановку задачі, що відповідає моделям (3.4) і (3.5) разом з їх граничними умовами, завдяки незмінності своєї структури допускають більш універсальний підхід при числовій реалізації, ніж у випадку диференціальних моделей.

3.5. ІНТЕГРО-ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ МОДЕЛІ

Властивості диференціальних та інтегральних моделей сполучаються в інтегро-диференціальних рівняннях, які, за аналогією із структурою (3.8), можуть бути подані в наступному вигляді:

$$\int K(x, y, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_2}) dy = F(x, u, u_{x_1}, u_{x_2}, \dots, u_{x_1 x_2} \dots)' \quad (3.9)$$

де порядки старших похідних від шуканої функції, що містяться під інтегралом і поза інтегралом, можуть не збігатися. Природно, що рівняння (3.9) для відшукування розв'язку вимагає, щоб були задані граничні умови. Залучення інтегро-диференціальних рівнянь як моделей, що еквівалентні ін-

шим можливим видам моделей, часто виявляється корисним через можливість одержання нових методів наближеного розв'язування задачі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка характерна риса лінійних динамічних об'єктів?
2. За допомогою якого типу диференціального рівняння можна описати лінійний динамічний об'єкт із зосередженими параметрами?
3. За допомогою якого типу диференціального рівняння можна описати лінійний динамічний об'єкт із розподіленими параметрами?
4. Які основні переваги мають інтегральні моделі?

Тема 4.

ОСНОВИ ОПЕРАЦІЙНОГО ЧИСЛЕННЯ

4.1. ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

При дослідженні динамічних об'єктів широко використовується операційне числення, яке дозволяє істотно полегшити дослідження складних систем. Операційне числення ґрунтується на *перетворенні Лапласа*, що дає змогу замінити операції диференціювання й інтегрування функцій на операції більш «низького рангу».

Розглянемо, наприклад, багаторазове диференціювання функції e^{pt} . Позначивши через \hat{D}_n оператор, що відповідає n -ій похідній, запишемо

$$\hat{D}_n \{e^{pt}\} = \frac{d^n e^{pt}}{dt^n} = p^n e^{pt},$$

тобто для функції e^{pt} n -а похідна еквівалентна множенню цієї функції на p^n .

Перетворення Лапласа дозволяє для більшості практично важливих випадків установити взаємно однозначну відповідність між функцією дійсної змінної $f(t)$ (оригіналом) і функцією комплексної змінної $F(p)$ (зображенням), яке відрізняється тим, що багатьом співвідношенням і операціям над оригіналами відповідають більш прості співвідношення й операції над їх зображеннями $F(p)$.

Таким чином, зміст операційного числення полягає в перетворенні якої-небудь задачі, що містить оригінали $f(t)$, в еквівалентну задачу, сформульовану в термінах, що відповідають зображенням Лапласа $F(p)$.

При розгляді динаміки динамічних об'єктів завжди можна вважати, що збурення або який-небудь керуючий вплив виникає в момент часу $t = 0$, тобто $\varphi(t) = 0$ при $t < 0$. Тоді умовою

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(t)| dt < \infty. \quad (4.1)$$

абсолютної збіжності інтеграла від $\varphi(t)$ є виконання нерівності

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)| dt < \infty. \quad (4.2)$$

Незважаючи на те, що ця нерівність менш строга, ніж нерівність (4.1), більшість функцій, що вводяться в розгляд при дослідженні динаміки динамічних об'єктів, не задовольняють їй. Тому вводять клас функцій $f(t)$ (їх називають «перетвореними за Лапласом» чи «оригіналами»), що задовольняють таким умовам:

1. $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$.
2. На будь-якому кінцевому відрізку позитивної півосі Ot функція $f(t)$ задовольняє умовам Діріхле.
3. При $t > 0$ порядок росту абсолютних значень функції $f(t)$ при зростанні аргументу не перевершує порядку росту деякої показової функції:

$$|f(t)| \leq M e^{\sigma_0 t} \text{ при } t > 0,$$

де M і σ_0 – сталі, $M > 0$, $\sigma_0 > 0 \vee \sigma_0 < 0$.

$$F(p) = L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

4.2. ВЛАСТИВОСТІ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

1. *Лінійність.* Якщо $f_j(t) \rightarrow F_j(p)$ або що те ж саме, $F_j(p) = L\{f_j(t)\}$, а λ_j – будь-які комплексні числа ($j = 1, 2, \dots, n$), то

$$L\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t)\right\} = \sum_{j=1}^n \lambda_j L\{f_j(t)\} = \sum_{j=1}^n \lambda_j F_j(p).$$

Справді,

$$L\left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t)\right\} = \int_0^{\infty} \left\{\sum_{j=1}^n \lambda_j f_j(t)\right\} e^{-pt} dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j \int_0^{\infty} f_j(t) e^{-pt} dt = \sum_{j=1}^n \lambda_j F_j(p).$$

2. *Подібність.* Якщо $f_j(t) \rightarrow F_j(p)$, то $f(\alpha t) \rightarrow \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right)$, де $\alpha > 0$. Справді,

$$L\{f(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} f(\alpha t) e^{-pt} dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} f(t') e^{-\frac{pt'}{\alpha}} dt' = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \text{ де } t' = \alpha t.$$

Приведемо без доведення ще кілька властивостей перетворення Лапласа.

3. *Диференціювання оригіналу.* Якщо функція $f(t)$ неперервно-диференційована на $(0, \infty)$ і якщо $f^{(1)}(t)$ є оригіналом (тоді $f(t)$ теж оригінал), то з $f_j(t) \rightarrow F_j(p)$ випливає

$$f^{(1)}(t) \rightarrow pF(p) - f(0).$$

4. *Інтегрування оригіналу.* Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то

$$L \left\{ \int_0^t f(\tau) d\tau \right\} \rightarrow \frac{F(p)}{p}.$$

5. *Диференціювання зображення.* Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$, то $(-1)^n t^n f(t) \rightarrow F^{(n)}(p)$.

6. *Інтегрування зображення.* Якщо $\frac{f(t)}{t}$ є оригінал, то $f(t)$ теж оригінал, і

$$\text{з } f(t) \rightarrow F(p) \text{ випливає } \frac{f(t)}{t} \rightarrow \int_p^\infty F(q) dq, \text{ де } \int_p^\infty = \lim_{\text{Re } P \rightarrow \infty} \int_p^P.$$

7. *Запізнення.* Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ то $f(t - \tau) \rightarrow e^{-p\tau} F(p)$, де τ – будь-яке додатне число.

8. *Зсув зображення.* Якщо $f(t) \rightarrow F(p)$ то $e^{\lambda t} f(t) \rightarrow F(p - \lambda)$ (λ – будь-яке комплексне число).

9. *Згортка оригіналів.* Згорткою двох функцій $f_1(t)$ і $f_2(t)$ називається функція, що позначається $f_1 * f_2$ і обумовлена рівністю

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau.$$

При згортанні оригіналів зображення перемножуються, тобто якщо $f_1(t) \rightarrow F_1(p)$ і $f_2(t) \rightarrow F_2(p)$, то

$$(f_1 * f_2)(t) \rightarrow F_1(p) F_2(p).$$

4.3. ПЕРЕДАТНА ФУНКЦІЯ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Зв'язок між зображеннями по Лапласу реакції системи $y(t)$ і вхідного впливу на систему $x(t)$ виражається співвідношенням:

$$Y(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n} X(p), \quad (4.3)$$

Функція $W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}$ яка являє собою відношення перетворення Лап-

ласа вихідного сигналу лінійних динамічних об'єктів до перетворення вхідного сигналу при нульових початкових умовах, називається передатною функцією лінійних динамічних об'єктів.

Згідно із (4.3)

$$W(p) = \frac{b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (4.4)$$

де, як і раніше, $p = \sigma + i\omega$ і $\sigma > \sigma_0$, де σ_0 – абсциса абсолютної збіжності.

Зміст передатної функції, як слідує з визначення, полягає в тому, що вона являє собою деякий оператор, що перетворює зовнішній вплив на вході в реакцію системи на виході. Якщо відоме зворотнє перетворення Лапласа, тобто $\omega(t) \rightarrow W(p)$, то можна записати

$$y(t) = \int_0^t \omega(\tau) x(t - \tau) d\tau, \quad (4.5)$$

Інтеграл, який розташований в правій частині (4.5) і визначає вихідний сигнал при нульових початкових значеннях у вигляді згортки оригіналу передатної функції і зовнішнього впливу, називається *інтегралом Дюамеля*.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим зручний опис лінійних динамічних об'єктів в просторі Лапласа?
2. Що таке передатна функція лінійних динамічних об'єктів?
3. Який зв'язок передатної функції з інтегралом Дюамеля?

Тема 5.

СТРУКТУРНО-АЛГОРИТМІЧНИЙ МЕТОД КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

5.1. ПРОБЛЕМИ МОДЕЛЮВАННЯ СКЛАДНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

Сучасні динамічні системи в значній своїй мірі є неоднорідними і достатньо складними, тому застосування єдиної методики їх дослідження викликає значні труднощі. Складність структури в комбінації зі складністю їх поведінки також вимагає розв'язання нових задач.

Сучасні методи проектування базуються на блоковому, агрегатному підході, згідно якого модель синтезується в основному з уніфікованих компонент та деяких унікальних блоків. Для побудови моделі використовуються два типи блоків – блоки із входами-виходами, що прийшли з теорії керування, і блоки з контактами, які успішно використовуються при проектуванні механічних, гідравлічних та електричних систем. Складні моделі, які складаються із компонентів різної фізичної природи та оснащені цифровими системами керування, вимагають одночасного використання блоків різного типу. Далі модель автоматично представляється у вигляді великої системи рівнянь, яку необхідно розв'язати чисельно. Автоматична побудова сукупної системи рівнянь та вибір для неї ефективного числового методу розв'язування є складною теоретичною і технічною задачею. Насамперед, складність обумовлена тим, що динамічні системи містять елементи різної фізичної природи з різними характеристиками та властивостями, що породжує неоднорідність їх математичного опису. При числовій реалізації таких математичних моделей підхід, коли загальна система рівнянь розв'язується одним методом, без врахування специфіки математичного опису складових частин моделі, в переважній більшості випадків виявляється неефективним, а іноді і неможливим. Для забезпечення широких можливостей у виборі методів

числової реалізації для структурних елементів математичної моделі доцільно використовувати структурно-алгоритмічний підхід, який передбачає побудову моделі на рівні структурних елементів у вигляді блоків-алгоритмів із залученням граф-топологічних схем.

5.2. СТРУКТУРНО-АЛГОРИТМІЧНИЙ МЕТОД МОДЕЛЮВАННЯ

При використанні структурно-алгоритмічного підходу процес побудови моделі складної динамічної системи можна розділити на наступні етапи.

Аналіз і конкретизація задачі. При побудові моделі проводять аналіз класу задач, які будуть розв'язуватись. Основна мета, яка ставиться на цьому етапі – збір інформації про специфіку процесів, що моделюються та визначення вимог щодо необхідної адекватності та точності моделі.

Проведення декомпозиції системи. У разі необхідності проводиться перший рівень декомпозиції системи за фізичним принципом. При цьому система подається у вигляді сукупності m елементів $\Pi_i^{(1)}$, ($i = \overline{1, m}$) з певної множини фізичних підсистем 1-го рівня. Оскільки при функціонуванні динамічної системи її фізичні підсистеми, що отримуються в результаті першого рівня декомпозиції, взаємодіють між собою через різного роду зв'язки (механічні, гідравлічні, пневматичні, електричні та ін.), то при побудові моделі задається ще і опис зв'язків $F_{\Pi_j}^{(1)}(\Pi_1^{(1)}, \Pi_2^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(1)})$, $j = \overline{1, l}$, де l – кількість існуючих зв'язків між підсистемами першого рівня.

Якщо в результаті проведення першого рівня декомпозиції деякі структурні елементи (підсистеми) виявляються занадто складними і виникають труднощі при їх математичному описі, або є необхідність контролю параметрів підсистеми на рівні їх внутрішньої структури, тоді доцільно для таких елементів проводити повторну декомпозицію, тобто декомпозицію 2-го рівня. В результаті отримаємо розширення множини фізичних підсистем $\Pi_r^{(2)}$, ($r = \overline{1, k}$) та зв'язків між ними $F_{\Pi_j}^{(2)}(\Pi_1^{(1)}, \Pi_2^{(1)}, \dots, \Pi_m^{(1)}, \Pi_1^{(2)}, \Pi_2^{(2)}, \dots, \Pi_k^{(2)})$, $j = \overline{1, g}$, де g – кількість існуючих зв'язків між підсистемами першого і другого рівня.

Описаний процес можна проводити поетапно, доки не отримаємо елементарні фізичні підсистеми, для яких проводити декомпозицію вже не доцільно.

Формування математичної моделі. Для кожного структурного елемента системи, що моделюється обирається один із можливих варіантів його математичного опису, виходячи із аналізу поставленої задачі. Синтез моделей структурних елементів може проводитись двома способами – на основі відомих фізичних законів чи на основі експериментальних даних. Отримані математичні моделі можуть мати різні форми опису: алгебраїчну, диференціальну, інтегральну, алгебраїчно-диференціальну, інтегро-диференціальну тощо. Загалом, отримуємо структурну неоднорідну математичну модель системи.

Перетворення та апроксимація вихідних математичних моделей до зручного для моделювання вигляду. Різноманітність форм математичного опису динамічних об'єктів вимагає окремо розв'язання задачі вибору ефективного способу подання математичних моделей з урахуванням їх подальшої числової реалізації. Вибір способу математичного опису структурних елементів залежить від багатьох факторів: від характеру залежностей (лінійні, нелінійні); від вимірності (просторово одновимірні та багатовимірні); від просторової залежності параметрів (із зосередженими чи розподіленими параметрами); від залежності в часі (стаціонарні, нестаціонарні), від швидкості зміни параметрів (високочастотні чи низькочастотні) тощо. Також враховується арсенал алгоритмічних засобів для числової реалізації різних типів моделей та можливості еквівалентних та апроксимативних перетворень моделей, у тому числі за допомогою розроблених спеціалізованих програмних засобів. Отже, для отримання можливості вибору ефективного способу математичного опису структурних елементів моделей складних динамічних систем виникає необхідність у розробці для цього класу об'єктів методів їх математичного опису та перетворення, на основі яких створюється базова множина математичних моделей підсистем. Це дає змогу використовувати в повній мірі структурно-алгоритмічний підхід з можливістю врахуванням на кожному етапі побудови моделі додаткової інформації про об'єкт, що в цілому дозволяє підвищити ефективність розв'язання поставленої задачі.

Розробка структурно-алгоритмічної моделі. Оскільки при числовій реалізації структурної математичної моделі задача зводиться до числової реалізації окремих структурних елементів моделі, які, в свою чергу, отримано на основі базової множини математичних моделей підсистем, тоді є зміст в розробці для кожного елемента базової множини алгоритмів його числової реалізації. В результаті отримуємо базову множину алгоритмів для числової реалізації моделей підсистем, що дає можливість синтезу моделей складних динамічних систем із певного базового набору скалярних моделей-алгоритмів. При цьому виникає важлива задача – забезпечення алгоритмічної сумісності програмних модулів незалежно від методів їх внутрішньої алгоритмічної реалізації.

Введення параметрів моделі та розв'язування задачі. При числовій реалізації отриманих структурних елементів математичної моделі виникає необхідність обчислення необхідних параметрів, які, власне кажучи, можуть і не збігатись з відомими фізичними параметрами вихідної моделі. Тоді для зручності роботи з комп'ютерною моделлю необхідно передбачити можливість автоматичного перерахунку необхідних параметрів.

Реєстрація результатів моделювання. На цьому етапі відображаються результати обчислень у вигляді чисел, графіків, діаграм. Вони виводяться на екран, роздруковуються чи зберігаються у файлах з використанням певних графічних форматів. Для цього модель доцільно будувати таким чином, щоб контрольні параметри були присутні в моделі в явному вигляді.

Контроль точності. Для оцінки вірогідності отриманих результатів необхідно проводити контроль точності розв'язків. Оскільки строгий аналіз точності є складною задачею, то у більшості випадків можна обмежитися наближеними, але оперативними методами контролю точності. Для цього можна використовувати метод порівняння аналітичного і машинного розв'язків при однакових вихідних даних.

Застосування структурного методу дозволяє аналізувати точність функціонування окремих елементів структури і на підставі таких оцінок робити припущення про точність розв'язків в цілому.

Аналіз результатів і доопрацювання моделі. Для підвищення адекватності комп'ютерної моделі необхідно проводити аналіз отриманих результатів і, якщо потрібно, здійснювати корекцію моделі. При структурно-алгоритмічному методі моделювання елементам комп'ютерної структурної моделі, як правило, відповідають окремі фізичні елементи, що дає можливість контролю та корегування окремих фрагментів моделі.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. З якою метою використовується структурно-алгоритмічний метод моделювання?
2. Який критерій проведення декомпозиції моделі?

Тема 6.

ТИПОВІ ЛАНКИ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

6.1. ТИПИ ЛАНОК ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

Будь-які складні динамічні об'єкти можуть бути представлені як сукупність більш простих елементів. Для дослідження процесів у реальних системах користуються ідеалізованими схемами, які математично описуються точно, але реальні ланки динамічних об'єктів характеризують з деяким наближенням в заданому діапазоні частот сигналів. Виникає приблизно та ж ситуація, що і при дослідженні електричних кіл, де опір, ємність, індуктивність вводяться як основні елементи при побудові схем. Однак у реальності тільки у визначеній смузі частот можливий такий поділ.

У теорії моделювання динамічних об'єктів вводяться деякі типові ланки, що характеризуються тільки своїми передатними функціями, незалежно від їхнього конструктивного виконання, призначення, принципу дії. Класифікують їх за видами диференціальних рівнянь, що описують їхні властивості. У випадку лінійних динамічних об'єктів розрізняють такі типи ланок:

1. Які описуються лінійним алгебраїчним рівнянням щодо вихідного сигналу:
 - а) пропорційна;
 - б) із запізненням;
 - в) диференційна.
2. Які описуються диференціальними рівняннями першого порядку з сталими коефіцієнтами:
 - а) інерційно-диференційована;
 - б) інерційна;
 - в) інтегруюча.

3. Які описуються диференціальним рівнянням другого порядку з сталими коефіцієнтами:
- а) коливальна.

6.2. ПЕРЕДАТНІ, ПЕРЕХІДНІ ТА ВАГОВОЇ ФУНКЦІЇ ТИПОВИХ ЛАНОК

Розглянемо передатні, перехідні, вагової функції типових ланок. Приведемо формули, що будуть використані для цієї мети.

1. Передатна функція:

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)}. \quad (6.1)$$

2. Перехідна функція

$$h(t) \rightarrow \frac{W(p)}{p}. \quad (6.2)$$

3. Вагова функція

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt}. \quad (6.3)$$

$$\Theta = \Theta(\lg \omega). \quad (6.4)$$

За цією схемою і досліджуємо типові ланки.

Відмітимо, що хоча для деяких типових ланок n дорівнює m , а не більше m , як говорилося раніше, при конструюванні реальних динамічних об'єктів з цих ланок умова $n > m$, зазвичай, завжди виконується.

Пропорційна ланка. Це найпростіша ланка, вихідний сигнал якої прямо пропорційний вхідному сигналу:

$$y(t) = kx(t), \quad (6.5)$$

де k – коефіцієнт підсилення.

Прикладами такої ланки є:

- а) електронна підсилувальна схема;
б) дільник напруги;
в) важільна передача та ін.

Переходячи в (6.5) до зображень, маємо:

1. Передатна функція $W(p) = k$.
2. Перехідна функція

$$h(t) \rightarrow \frac{k}{p}, \quad h(t) = kU(t).$$

3. Вагова функція

$$\omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = k\delta(t).$$

Прийнятий опис зв'язку між входом і виходом справедливий тільки для ідеальної ланки і відповідає реальним ланкам лише при низьких частотах, $\omega < \omega_v$. При $\omega > \omega_v$ у реальних ланках коефіцієнт підсилення k починає залежати від частоти і при високих частотах прямує до нуля.

Ланка із запізненням. Ця ланка описується рівнянням

$$y(t) = x(t - \tau), \quad (6.6)$$

де τ – час запізнення.

Прикладом ланки із запізненням є:

- а) довгі електричні лінії без втрат;
- б) деякі теплові об'єкти;
- в) довгий трубопровід тощо.

Переходячи в (6.6) до зображень, маємо

$$W(p) = e^{-p\tau}.$$

$$h(t) \rightarrow \frac{e^{-p\tau}}{p}, \quad h(t) = U(t - \tau).$$

$$\omega(t) = \delta(t - \tau).$$

Диференційна ланка. Ця ланка описується рівнянням

$$y = k \frac{dx}{dt}, \quad (6.7)$$

де k – коефіцієнт підсилення. Прикладом диференційної ланки, служать конденсатор, індуктивність та ін. Як відомо, напруга u і струм i зв'язані для конденсатора C та індуктивності L , відповідно, наступними співвідношеннями:

$$i = C \frac{du}{dt},$$

$$u = L \frac{di}{dt}.$$

Переходячи в (6.7) до зображень (при нульових початкових умовах), маємо

$$1. \quad W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = kp.$$

$$2. \quad h(t) \rightarrow \frac{kp}{p}, \quad h(t) = k\delta(t).$$

$$3. \quad \omega(t) = k\delta'(t) = k \frac{d\delta(t)}{dt}.$$

Інерційно-диференційна ланка. Ця ланка описується рівнянням першого порядку

$$T \frac{dy}{dt} + y = k \frac{dx}{dt}, \quad (6.8)$$

де T – стала часу, k – коефіцієнт підсилення, і більш точно відповідає реальним ланкам, ніж (6.7). Видно, що при $T \rightarrow 0$ (6.8) переходить у рівняння, що описує ідеальну диференційну ланку.

Прикладами реальних ланок, що диференціюють, є:

- а) конденсатор з врахуванням наявного в ньому опору;
- б) індуктивність з врахуванням омичного опору тощо.

Переходячи в (6.8) до зображень, маємо:

$$1. \quad W(p) = \frac{kp}{1 + Tp}.$$

$$2. \quad h(t) \rightarrow \frac{kp}{1 + Tp} \frac{1}{p}, \quad h(t) = \frac{k}{T} e^{-\frac{t}{T}} U(t).$$

$$3. \quad \omega(t) = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{k}{T} \delta(t) - \frac{k}{T^2} e^{-\frac{t}{T}} U(t).$$

Інерційна ланка. Це одна з найпоширеніших ланок динамічних об'єктів. Вона описується рівнянням

$$T \frac{dy}{dt} + y(t) = kx(t), \quad (6.9)$$

де T – стала часу, k – коефіцієнт підсилення. Прикладами такої ланки можуть бути:

- а) термopара, якщо вважати термо-електрорушійну силу вихідним сигналом, а температуру вхідним;
- б) електродвигун, якщо вважати вихідним сигналом кутову швидкість, а вхідним напругу, і т. п.

Переходячи у рівнянні (6.9) до зображень, одержимо:

$$1. W(p) = \frac{kp}{1+Tp}.$$

$$2. h(t) \rightarrow \frac{k}{p(1+Tp)}, h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})U(t).$$

$$3. \omega(t) = \frac{k}{T}e^{-\frac{t}{T}}U(t), \text{ тому що } t\delta(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Інтегральна ланка. Ця ланка описується рівнянням

$$y(t) = k \int_0^t x(t)dt + y_0, \quad (6.10)$$

чи

$$\frac{dy}{dt} = kx(t), \quad (6.11)$$

де k – коефіцієнт пропорційності. Прикладами реальних елементів, еквівалентні схеми яких зводяться до інтегруючої ланки є:

- а) електричний конденсатор, якщо вважати вхідним сигналом струм, а вихідним напруга на конденсаторі;
- б) обертовий вал, якщо вважати вхідним сигналом швидкість обертання, а вихідним кут повороту вала, і т. п.

Переходячи в (6.11) до зображень, знаходимо:

$$1. W(p) = \frac{k}{p}.$$

$$2. h(t) \rightarrow \frac{k}{p^2}, h(t) = ktU(t).$$

$$3. \omega(t) = kU(t), \text{ тому що } t\delta(t) \rightarrow 0 \text{ при } t \rightarrow 0.$$

Коливальна ланка. Ця ланка описується рівнянням другого порядку

$$T^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\chi T \frac{dy}{dt} + y = kx \quad (6.12)$$

при постійній загасання $\chi < 1$; T – стала часу, k – коефіцієнт підсилення. Вимога $\chi < 1$ стає зрозумілою, якщо, використовуючи операційне числення, розв'язати рівняння (6.12) при $x \equiv 0$. Знаючи, що $y(t) \rightarrow Y(p)$, маємо

$$Y(p) = \frac{y_0 D_1(p) + y_0' D_2(p)}{D(p)}. \quad (6.13)$$

Для даної ланки

$$\left. \begin{aligned} D(p) &= T^2 p^2 + 2\chi T p + 1 \\ D_1(p) &= T^2 p + 2\chi T, \\ D_2(p) &= T^2 \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

і, отже,

$$Y(p) = \frac{y_0(T^2 p + 2\chi T) + y_0' T^2}{T^2 p^2 + 2\chi T p + 1}. \quad (6.15)$$

Для знаходження розв'язку варто розкласти $Y(p)$ на елементарні дроби, а потім відновити оригінал. Знайдемо корені рівняння

$$T^2 p^2 + 2\chi T p + 1 = 0. \quad (6.16)$$

Це рівняння називається *характеристичним*.

$$p_{1,2} = -\frac{\chi}{T} \pm \frac{\sqrt{\chi^2 - 1}}{T}. \quad (6.17)$$

При $\chi < 1$ корені комплексно-спряжені:

$$p_{1,2} = -\frac{\chi}{T} \pm i \frac{\sqrt{1 - \chi^2}}{T}. \quad (6.18)$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які виділяють типові ланки лінійних динамічних об'єктів?
2. Яким чином можна описувати типові ланки лінійних динамічних об'єктів?

Тема 7.

З'ЄДНАННЯ ЛАНОК І ПЕРЕТВОРЕННЯ СТРУКТУРНИХ СХЕМ ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

7.1. ПОСЛІДОВНЕ З'ЄДНАННЯ ЛАНОК

Розрізняють три види з'єднання ланок: послідовне, паралельне і паралельне з зворотнім зв'язком.

Послідовним з'єднанням ланок називається таке з'єднання, коли вихідна величина попередньої ланки є входною величиною наступної ланки. Якщо послідовно з'єднуються ланки l і m , то

$$y_l = x_m.$$

Послідовне з'єднання n ланок (рис. 7.1) з передатними функціями $W_j(p)$ ($j = 1, 2, \dots, n$) може бути замінене ланкою з еквівалентною передатною функцією

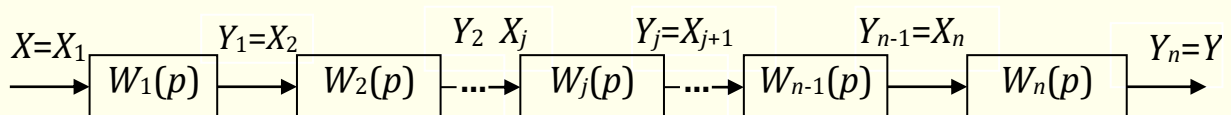


Рис. 7.1.

$$W_e(p) = \prod_{j=1}^n W_j(p). \quad (7.1)$$

Відповідно до визначення послідовного з'єднання ланок маємо $x_{j+1} = y_j$, але, оскільки, $\frac{Y_j(p)}{X_j(p)} = W_j(p)$, то, перемноживши почленно ці n рівнянь, одержимо формулу (7.1).

7.2. ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ ЛАНОК

Паралельним з'єднанням ланок називається таке з'єднання, коли на вході всіх ланок подається та сама величина, а вихідні сигнали сумуються. Якщо паралельно з'єднано n ланок (рис. 7.2) то вхідний сигнал

$$x = x_1 = \dots = x_j = \dots = x_n, \quad (7.2)$$

а вихідний

$$y = \sum_{j=1}^n y_j. \quad (7.3)$$

Переходячи в (7.2), (7.3) до зображень і з огляду на те, що $Y_j(p) = W_j(p) X_j(p)$, одержимо

$$Y(p) = \sum_{j=1}^n W_j(p) X_j(p) = X(p) \sum_{j=1}^n W_j(p),$$

$$W_e(p) = \sum_{j=1}^n W_j(p). \quad (7.4)$$

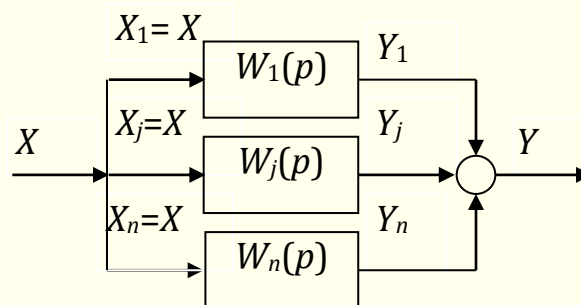


Рис. 7.2.

Отже,

$$h_e(t) = \sum_{j=1}^n h_j(t), \quad (7.5)$$

$$\omega_e(t) = \sum_{j=1}^n \omega_j(t). \quad (7.6)$$

Таким чином, при паралельному з'єднанні ланок передатні, перехідні і вагові функції кожної ланки сумуються.

7.3. ЗУСТРІЧНО-ПАРАЛЕЛЬНЕ З'ЄДНАННЯ (З'ЄДНАННЯ ЛАНОК ЗІ ЗВОРОТНИМ ЗВ'ЯЗКОМ)

Це таке з'єднання, в якому вихід першої ланки з'єднаний з входом другої ланки, а вихід другої ланки з'єднаний зі входом першої ланки. Зустрічно паралельне з'єднання показано на рис. 7.3. Тут ланка $W_1(p)$ знаходиться у прямому зв'язку, а ланка $W_2(p)$ у зворотному зв'язку.

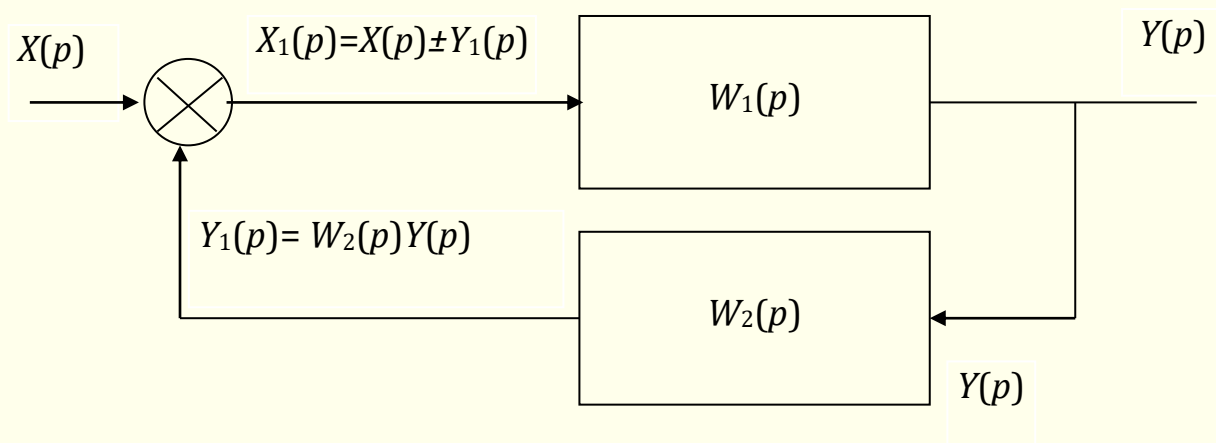


Рис. 7.3.

Визначимо передатну функцію ланки, яка еквівалентна схемі ланок зі зворотнім зв'язком.

Величина сигналу, який передається до суматора, через ланку зворотного зв'язку дорівнює:

$$Y_1(p) = W_2(p)Y(p). \quad (7.7)$$

Сигнал після суматора $X_1(p)$ дорівнює:

$$X_1(p) = X(p) \pm Y_1(p). \quad (7.8)$$

Вихідний сигнал $Y(p)$ дорівнює:

$$\begin{aligned} Y(p) &= W_1(p)X_1(p) = W_1(p)(X(p) \pm Y_1(p)) = \\ &= W_1(p)(X(p) \pm W_2(p)Y(p)) = W_1(p)X(p) \pm W_1(p)W_2(p)Y(p). \end{aligned} \quad (7.9)$$

Останнє рівняння можна записати так:

$$Y(p) \mp W_1(p)W_2(p)Y(p) = W_1(p)X(p) \quad (7.10)$$

Звідси знайдемо передатну функцію, яка буде

$$W(p) = \frac{Y(p)}{X(p)} = \frac{W_1(p)}{1 \mp W_1(p)W_2(p)}. \quad (7.11)$$

У формулі (7.11) стоїть знак \mp , тому що в даному випадку, при додатному зворотному зв'язку, стоїть знак $-$ а в випадку від'ємного зворотного зв'язку знак $+$. Подвійний знак у формулі записано, щоб охопити випадки додатного та від'ємного зворотного зв'язку.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які є види з'єднання ланок лінійних динамічних об'єктів?
2. Яка операція над передатними функціями проводиться при паралельному з'єднанні ланок?
3. Яка операція над передатними функціями проводиться при послідовному з'єднанні ланок?
4. За якою формулою обчислюється загальна передатна функція при з'єднанні ланок зі зворотним зв'язком?

Тема 8.
АПРОКСИМАЦІЯ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ З
РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ
ШЛЯХОМ ДИСКРЕТИЗАЦІЇ
ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З
ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ

8.1. ДИСКРЕТИЗАЦІЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО РІВНЯННЯ
З ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ НА ОСНОВІ МЕТОДУ ПРЯМИХ

При комп'ютерному моделюванні розподілених об'єктів, математичні моделі яких, зазвичай, подаються у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних, виникає необхідність зведення їх до такого виду, який дає змогу використовувати у програмних засобах моделювання стандартні операційні блоки.

Розглянемо математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами у вигляді диференціального рівняння в частинних похідних

$$a \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} - b \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + c \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} + d \cdot u(x,t) = f(x,t) \quad (8.1)$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); & u(x_0 + l, t) = \varphi_1(t); & (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); & u(x, T) = \psi_T(x); & (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (8.2)$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_1(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ – задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (8.1)-(8.2), отримаємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку та нехтуючи членами $O(h^2)$ і позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t, x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$a_k \ddot{U}_k(t) - \frac{b_k}{h^2} [U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k \dot{U}_k(t) + d_k U_k(t) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n).$$

(8.3) Використовуючи граничні умови, маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), \quad (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_l(t), \quad (\alpha \leq t \leq T); \\ U_k(t_0) &= \psi_0(x_k), U_k(T) = \psi_T(x_k); \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (8.4)$$

Отже, отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (8.3) з граничними умовами (8.4) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (8.1) з граничними умовами (8.2). За допомогою методу прямих, по суті, проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку.

8.2. СТРУКТУРНА РЕАЛІЗАЦІЯ СИСТЕМИ ЗВИЧАЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ДРУГОГО ПОРЯДКУ

Для числової реалізації отриманої апроксимаційної моделі використовується simulink-модель, що зображена на рис. 8.1.

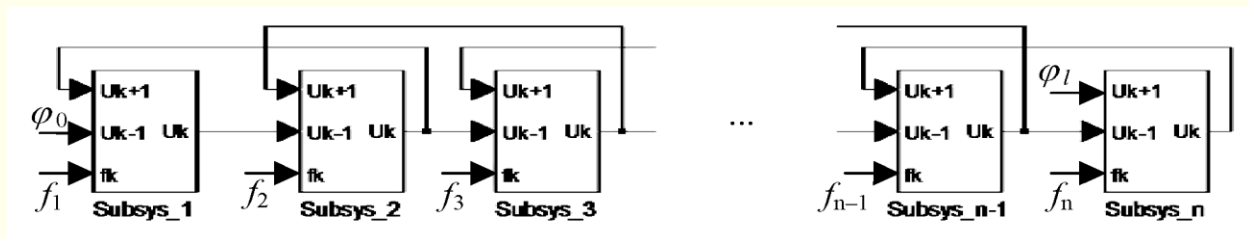


Рис. 8.1. Структурна реалізація апроксимаційної моделі (8.3)

Кожне з рівнянь системи (8.3) описує поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний розподілений об'єкт. Наприклад, для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягустиску і описується моделлю (8.1) апроксимаційна модель (8.3), фактично, відображає систему n зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (8.3) мають конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий – силу пружності, третій – силу опору руху і т. д.

Отримана комп'ютерна модель володіє унікальною властивістю оборотності, оскільки вона дозволяє здійснювати вхідні впливи та отримувати відгуки в будь-яких точках дискретизації лінійно протяжного об'єкта.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що є основою апроксимації моделі у вигляді одновимірного лінійного диференціального рівняння з частинними похідними?
2. Як структурно реалізується система звичайних диференціальних рівнянь другого порядку?

Тема 9.

ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА, Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

9.1. ДИСКРЕТНЕ ПЕРЕТВОРЕННЯ ЛАПЛАСА

Для дослідження розв'язків різницевих рівнянь у загальному вигляді широко використовується дискретне перетворення Лапласа – аналог раніше розглянутого перетворення Лапласа для неперервних оригіналів.

Дискретне перетворення Лапласа визначається формулою:

$$F^*(p) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)e^{-pnT}. \quad (9.1)$$

У цій формулі, як і у випадку неперервного перетворення Лапласа, комплексна величина $p = \sigma + i\omega$, де $\sigma > c$ – абсциси абсолютної збіжності. При $\sigma_0 < \infty$ ряд, обумовлений формулою (9.1), сходиться і ґратчастій функції відповідає деяке зображення

$$F^*(p) \rightarrow f(n), \quad (9.2)$$

чи

$$F^*(p) = L[f(n)]. \quad (9.3)$$

9.2. Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ. ВЛАСТИВОСТІ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ

Для дослідження імпульсних динамічних об'єктів велике поширення одержало *z-перетворення*, тісно зв'язане з дискретним перетворенням Лапласа. Приймавши в (9.1) $z = e^{pt}$, маємо

$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^{-n}. \quad (9.4)$$

Функція $F(z)$ називається *z-перетворенням* (зображенням) ґратчастої функції $f(n)$ (оригіналу). Символи $Z\{f(n)\}$ і $Z^{-1}\{f(n)\}$, відповідно, позна-

чають операції прямого і зворотного z -перетворення. Ці операції часто записуються також у вигляді

$$F(z) \rightarrow f(n).$$

Властивості z -перетворення багато в чому аналогічні властивостям перетворення Лапласа. Перелічимо деякі з них.

1. *Лінійність.* Якщо $f_i(n) \rightarrow F_i(z)$, то для $f(n) \rightarrow \sum_{j=0}^k \lambda_j f_j(n)$ маємо

$$f(n) \rightarrow \sum_{j=0}^k \lambda_j F_j(z).$$

2. *Запізнення.* Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$ і $f(-n) \equiv 0$, то $f(n-m) \rightarrow z^{-m} F(z)$.

3. *Зсув зображення.* Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$, то $e^{\lambda_n T} f(n) \rightarrow F\left(\frac{z}{d}\right)$.

4. *Зображення різниць.* Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$ і $f(-n) = 0$, то

$$z \left\{ \nabla^{(k)} f(n) \right\} = \left(\frac{z-1}{z} \right)^k F(z).$$

Відмітимо, що при $T \rightarrow 0$ (неперервний випадок) множник у правій частині прямує до границі:

$$\lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{z-1}{z} \right)^k = \lim_{T \rightarrow 0} \left(\frac{e^{pT} - 1}{e^{pT}} \right)^k = p^k T^k.$$

5. *Зображення сум.* Якщо $f(n) \rightarrow F(z)$, то

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(k) \rightarrow \frac{F(z)}{z-1}.$$

У таблиці 9.1 приведені деякі зображення $F(z)$ і $F(p)$ – перетворення Лапласа оригіналів, які найчастіше зустрічаються.

Таблиця 9.1

Неперервний сигнал	Перетворення Лапласа	z-перетворення
$u(t)$	$\frac{1}{p}$	$\frac{z}{z-1}$
t	$\frac{1}{p^2}$	$\frac{Tz}{(z-1)^2}$
$\frac{1}{2i}t^2$	$\frac{1}{p^3}$	$\frac{T^2z(z+1)}{2!(z-1)^3}$
$e^{-\alpha t}$	$\frac{1}{p+\alpha}$	$\frac{z}{z-\gamma}$, $\gamma = e^{-\alpha h}$
$\sin \beta t$	$\frac{\beta}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z \sin \beta T}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$\cos \beta t$	$\frac{p}{p^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - \cos \beta T)}{z^2 - 2z \cos \beta T + 1}$
$e^{-\alpha t} \sin \beta t$	$\frac{\beta}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$
$e^{-\alpha t} \cos \beta t$	$\frac{p+\alpha}{(p+\alpha)^2 + \beta^2}$	$\frac{z(z - d \cos \beta T)}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Чим відрізняється дискретне перетворення Лапласа від неперервного?
2. Що є основою z-перетворення ґратчастої функції-оригіналу?

ТЕМА 10.

ВИКОРИСТАННЯ Z-ПЕРЕТВОРЕННЯ ДЛЯ ЧИСЛОВОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ МОДЕЛЕЙ, ЗАДАНИХ ПЕРЕДАТНИМИ ФУНКЦІЯМИ

Розглянемо приклад чисельної реалізації математичної моделі динамічного об'єкту, який заданий передатною функцією

$$W_{il}(p) = \frac{k}{1 + Tp}. \quad (10.1)$$

Приведемо її до табличного вигляду

$$W_{il}(p) = \frac{k}{T} \frac{1}{p + \frac{1}{T}}. \quad (10.2)$$

Згідно таблиці в оригіналах їй відповідає вагова функція

$$v(t) = \frac{k}{T} \exp\left(-\frac{k}{T}t\right). \quad (10.3)$$

З врахуванням

$$Y(p) = W(p)X(p) \quad (10.4)$$

із (10.3) в зображеннях отримаємо рівняння

$$Y_{il}(p) = W_{il}(p)X(p) = \frac{k}{T} \frac{1}{p + \frac{1}{T}} X_{il}(p), \quad (10.5)$$

яке зв'язує зображення вхідного $X_{il}(p)$ і вихідного $Y_{il}(p)$ сигналів інерційної ланки. Від (10.5) перейдемо до оригіналів.

Враховуючи, що добуток двох функцій зображень ($W_{il}(p)$ і $X_{il}(p)$) відповідає згортка їх оригіналів, отримуємо

$$y(t) = \frac{k}{T} \int_0^t \exp\left(-\frac{t-s}{T}\right) x(s) ds. \quad (10.6)$$

В (10.5) дискретизуємо час $t = nh$, інтеграл апроксимуємо квадратурною сумою з квадратурними коефіцієнтами, які реалізують формулу правих прямокутників

$$y(nh) = \frac{k}{T} \sum_{i=0}^n \exp\left(-\frac{(n-i)h}{T}\right) x(nh)h. \quad (10.7)$$

Використовуючи те, що дискретній згортці двох ґратчастих функцій-оригіналів відповідає добуток двох функцій в Z -перетворенні

$$Y(z) = \frac{kh}{T} \frac{z}{z-\gamma} X(z), \quad \gamma = \exp\left(-\frac{kh}{T}\right). \quad (10.8)$$

Вираз (10.8) має структуру типу (10.4), і в ній можна визначити фрагмент, який можна назвати дискретною передатною функцією

$$W_{in}(z) = \frac{kh}{T} \frac{z}{z-\gamma}. \quad (10.9)$$

Вираз (10.8) перетворимо до вигляду

$$Y(z) = \gamma z^{-1} Y(z) + \frac{kh}{T} x(nh),$$

від якого з використанням теореми про зсув (множення функції в z -просторі зображень на z^{-n} відповідає зсув дискретної функції-оригіналу на n кроків дискретизації назад) можна легко перейти до оригіналів

$$y(nh) = \gamma y((n-1)h) + \frac{kh}{T} x(nh),$$

що можна подати у вигляді різницевого рівняння

$$y_n = \gamma y_{n-1} + \frac{kh}{T} x_n. \quad (10.10)$$

10.1. ПОБУДОВА МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДЛЯ КОЛИВАЛЬНОЇ ЛАНКИ

Нехай математична модель лінійного динамічного об'єкта (коливної ланки) задана у вигляді передатної функції:

$$W(p) = \frac{k}{p^2 + \mu T p + 1}, \quad (10.11)$$

де k , T , μ – сталі коефіцієнти.

Для побудови цифрової моделі коливної ланки необхідно дане рівняння звести до різницевого рівняння. Його можна отримати, перейшовши в z -простір, використовуючи зв'язок між перетворенням Лапласа і z -перетворенням.

Знайдемо різницеве рівняння для заданої передатної функції (коливальна ланка). За таблицями зв'язку перетворення Лапласа з z -перетворенням рівняння (10.11) необхідно звести до виду:

$$W(p) = k_1 \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (10.12)$$

Це перетворення виконаємо таким чином, з рівняння (10.11) шляхом елементарних перетворень, одержимо:

$$W(p) = k \frac{1}{(p^2 + 2\frac{\mu T}{2} + \frac{\mu^2 T^2}{4}) + 1 - \frac{\mu^2 T^2}{4}}. \quad (10.13)$$

З одержаного рівняння, видно що вираз, який знаходиться у знаменнику в дужках, є ніщо інше, як квадратом суми двох доданків.

$$W(p) = k \frac{1}{(p + \frac{\mu T}{2})^2 + \frac{4 - \mu^2 T^2}{4}}. \quad (10.14)$$

Поділивши чисельник і знаменник, одержаного виразу, на множник $\frac{\sqrt{4 - \mu^2 T^2}}{2}$, одержимо

$$W(p) = k \frac{2}{\sqrt{4 - \mu^2 T^2}} \frac{\frac{\sqrt{4 - \mu^2 T^2}}{2}}{(p + \frac{\mu T}{2})^2 + \frac{4 - \mu^2 T^2}{4}}, \quad (10.15)$$

звідки шляхом заміни одержимо вихідне рівняння:

$$W(p) = k_1 \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2}, \quad (10.16)$$

де

$$\alpha = \frac{\mu T}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{4 - \mu^2 T^2}}{2}, \quad k_1 = k \frac{2}{\sqrt{4 - \mu^2 T^2}}.$$

Використовуючи лінійну властивість, і те що передатній функції в просторі Лапласа

$$W(p) = k_1 \frac{\beta}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \quad (10.17)$$

відповідає z-образ

$$W(z) = \frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}, \quad (10.18)$$

причому $W(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}$ маємо:

$$\frac{Y(z)}{X(z)} = k_1 \frac{zd \sin \beta T}{z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2}. \quad (10.19)$$

За основною властивістю тотожності маємо

$$Y(z)(z^2 - 2zd \cos \beta T + d^2) = k_1 X(z)zd \sin \beta T. \quad (10.20)$$

Перемноживши члени рівняння зведемо рівність до такого виду

$$Y(z)z^2 - 2Y(z)zd \cos \beta T + Y(z)d^2 = k_1 X(z)zd \sin \beta T. \quad (10.21)$$

Шляхом перетворень зведемо одержану рівність до кінцевого рівняння

$$Y(z)z^2 = 2Y(z)zd \cos \beta T - Y(z)d^2 + k_1 X(z)zd \sin \beta T,$$

$$Y(z) = 2d \cos \beta T Y(z)z^{-1} - d^2 Y(z) + k_1 d \sin \beta T X(z)z^{-1}.$$

У останній рівності, вважаючи що $Y(z)$ – образ вихідного сигналу, $X(z)$ – образ вхідного сигналу, $d = e^{-ah}$, де h – крок дискретизації, β – визначений вище, маємо:

$$y_n = ay_{n-2} + by_{n-1} + cx_{n-1}, \quad (10.22)$$

де $a = -d^2$, $b = 2d \cos \beta T$, $c = 2k_1 \sin \beta T$.

Одержавши вихідне різницеве рівняння можна чисельно реалізувати лінійні динамічні об'єкти, що описуються передатною функцією коливальної ланки. Прикладами об'єктів, що описуються коливальною ланкою є: електричний коливальний контур, який містить ємність, індуктивність і опір; вантаж, підвішений на пружині, який має амортизатор і тому подібне.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яким чином передатні функції зводяться до табличного вигляду і чи завжди це можливо?
2. Чому у виразі z-передатної функції з'являється множник h ?
3. Як використовується теорема про зсув для знаходження різницевого рівняння?

ТЕМА 11.

ПОБУДОВА КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛЮЮЧОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ЗАСТОСУВАННЯ СТРУКТУРНО- АЛГОРИТМІЧНОГО МЕТОДУ

11.1. СТРУКТУРА МОДЕЛЮЮЧОЇ СИСТЕМИ

Для проведення обчислювальних комп'ютерних експериментів по дослідженню режимів і процесів, що відбуваються в динамічних об'єктах, розробляється спеціальне програмне забезпечення у вигляді дослідницької програмної моделюючої системи. В основу функціонування програмної системи покладено структурно-модульний принцип, відповідно до якого кожному елементу об'єкта, що моделюється поставлено у відповідність програмний модуль. Реалізація структурно-модульного принципу полягає в наступному:

1. На основі детального аналізу варіабельності моделі (а саме, аналізу математичного опису задачі, алгоритму її рішення, вимог до сервісу й ін.) проводиться розклад задачі на частини, кожна з якої вільна чи майже вільна від варіабельності, причому такі, щоб об'єднання цих частин збігалося з усім простором варіабельності задачі.
2. Реалізація кожної отриманої частини у вигляді програмного модуля, тобто програми, придатної для використання в контекстах різних програм.
3. Формування необхідної програми з програмних модулів.

Стандартна числова реалізація алгоритмів окремих модулів є трудомісткою задачею в силу великих обсягів програмних текстів, інформаційних масивів і часу комп'ютерного розрахунку. Звідси виникають специфічні вимоги до структури функціональних і системних компонентів: необхідність зручних засобів для завдання вихідних даних, їхньої обробки, наочно-

го виведення результатів, раціонального використання оперативної і зовнішньої пам'яті з ефективним обміном інформаційними масивами, забезпечення гнучкого керування обчислювальним процесом (з можливістю вибору оптимальних алгоритмів); оптимальна реалізація програмних фрагментів, на які припадає основне обчислювальне навантаження і т.д.

Компоненти програмної обчислювальної системи розбиваються на дві основні частини: функціональну (обчислювальну) і системну. До функціональної частини відносяться програми, що безпосередньо реалізують моделі, а до системного – спеціалізовані засоби, що забезпечують керування обчислювальним процесом, тобто організацію послідовності виконання функціональних програм, обмін інформаційними масивами між ними, збереження, редагування, введення і виведення даних. Модульна структура моделюючої системи дозволяє значно спростити її експлуатацію і розвиток.

Структура програмної моделюючої системи представлена на рис. 11.1. У системну частину системи входять наступні модулі: ініціалізації змінних і введення вихідних даних, керування обчислювальним процесом, реєстрації результатів і модуль візуалізації результатів.

Функціональна частина моделюючої системи складається з двох частин – модуля початкових параметрів і власне модуля моделі. Перший модуль використовується для налаштування розв'язуючих модулів і обчислення початкових параметрів стану об'єкта (моделі об'єкта) у деякий момент часу t_0 , з якого буде розпочинатися запуск моделі об'єкта. Як правило, час t_0 вибирається таким чином, щоб стан об'єкта в цей момент відповідав сталому (статичному) режиму. При цьому математична модель об'єкта спрощується за рахунок перетворення в нуль усіх похідних і тоді обчислення початкових параметрів моделі зводиться до розв'язування системи алгебраїчних рівнянь.

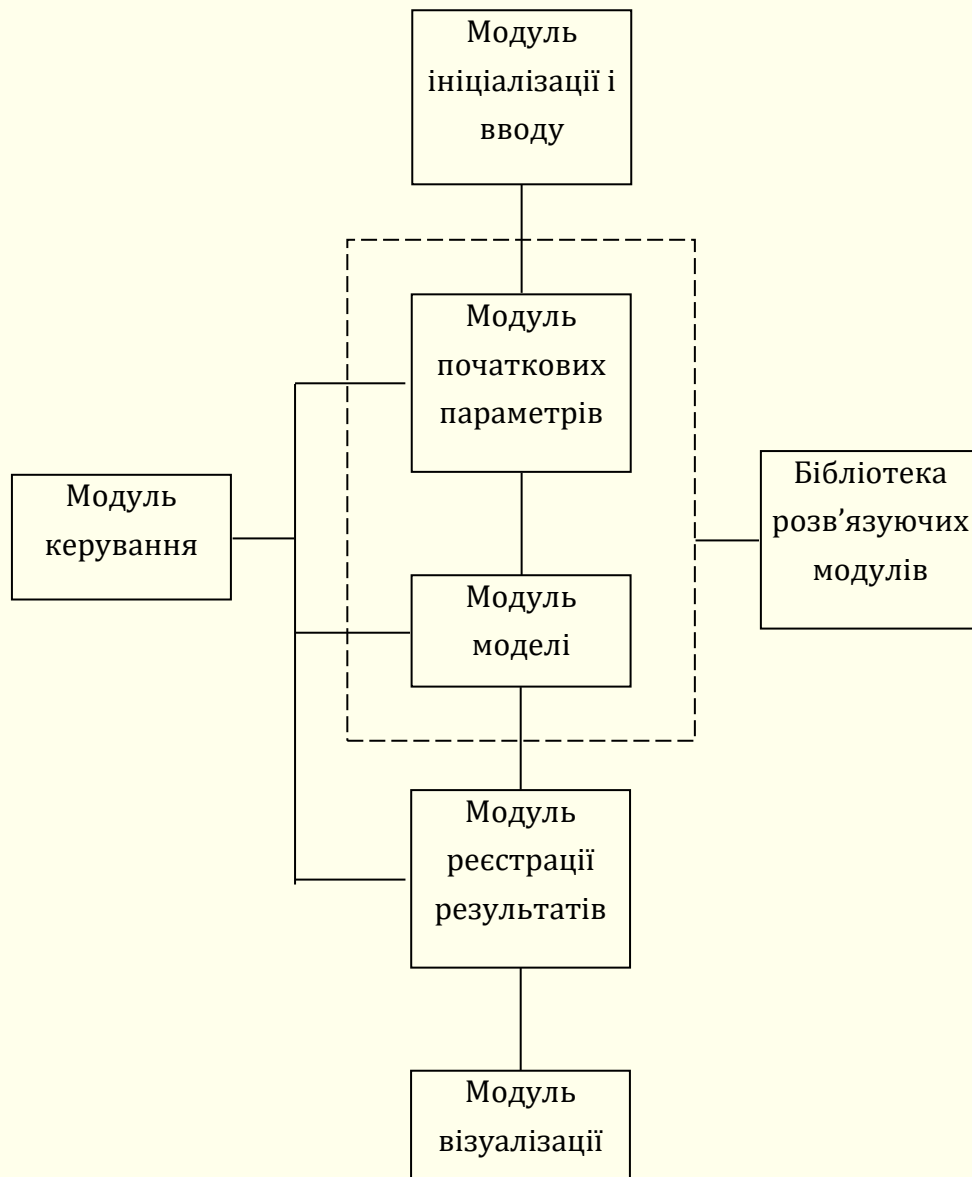


Рис. 11.1. Структура програмної моделюючої системи

Другий модуль (модуль моделі) представляється у вигляді набору розв'язуючих модулів, певним чином з'єднаних між собою. Розв'язуючі модулі, що використовуються для синтезу модуля моделі, об'єднані в бібліотеку функціональних модулів. Програмні одиниці бібліотеки по функціональних ознаках і призначенню можна розділити на сім груп, кожна з яких зорієнтована на рішення наступних задач:

1. Моделювання лінійних елементів за математичним описом у вигляді дробово-раціональних передатних функцій.
2. Моделювання лінійних нестационарних елементів, заданих у виді дробово-раціональних передатних функцій зі змінними коефіцієнтами.

3. Моделювання лінійних елементів за математичним описом у вигляді інтегрального оператора згортки.
4. Моделювання елементів з гладкими нелінійностями за математичним описом, що задається користувачем у вигляді функціональних залежностей.
5. Моделювання типових статичних нелінійностей.
6. Моделювання елементів з розподіленими параметрами за математичним описом у вигляді ірраціональних і трансцендентних передатних функцій.
7. Моделювання елементів з розподіленими параметрами за математичним описом у вигляді імпульсної перехідної функції.

Склад бібліотеки вирішальних модулів формується з розумінь найбільш повного покриття програмної реалізації алгоритмів числового моделювання елементів класу динамічних систем.

Розв'язуючі модулі являють собою завершені програми, що реалізовані у вигляді окремих процедур чи функцій. Однотипні модулі розрізняються завдяки додатковому параметру N – номеру модуля. Для забезпечення паралельної роботи розв'язуючих модулів на кожному кроці дискретизації часу проводиться обчислення дискретних значень їх вихідних функцій за поточним дискретним значенням вхідних функцій, тобто для кожного дискретного значення часу проводиться обчислення всіх параметрів, що характеризують стан моделюючого об'єкта. Цим досягається можливість реалізації математичних моделей широкого класу об'єктів, включаючи об'єкти зі зворотними зв'язками.

11.2. СТРУКТУРА І ФУНКЦІОНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗУЮЧОГО МОДУЛЯ МОДЕЛЮЮЧОЇ СИСТЕМИ

Розглянемо структуру і функціонування розв'язуючого модуля на прикладі відтворення інерційного елемента з передатною функцією

$$W(p) = \frac{K}{Tp + 1}, \quad (11.1)$$

якому відповідає математичний опис у вигляді різницевого рівняння (рівняння цифрового фільтра)

$$y_n = a_1 y_{n-1} + b_1 x_{n-1} + b_0 x_n, \quad (11.2)$$

де $a_1 = \exp\left(-\frac{h}{T}\right)$, $b_1 = b_0 = \frac{Kh}{2T}$, h – крок дискретизації часу, x_n і y_n – дискретні значення відповідно вхідного і вихідного сигналів.

Для реалізації інерційного елемента використовуються процедура 0IN_T і функція IN_T, тобто розв'язуючий модуль складається з однієї процедури і однієї функції. Процедура 0IN_T призначена для обчислення параметрів a_1 , b_0 , b_1 цифрового фільтра (11.2) по заданих коефіцієнтах дробово-раціональної передатної функції (11.1) і введення в (11.2) початкових умов. Звертання до процедури має наступний вигляд 0IN_T(N , USL , K , T), де N – номер розв'язуючого модуля; K і T – коефіцієнти передатної функції; USL – початкові умови. За допомогою функції IN_L реалізується цифровий фільтр (11.2). Структура обчислювача функції наведена на рис. 11.2. Зважаючи на те, що $b_0 = b_1$ структура обчислювача функції може мати вигляд, як показано на рис. 11.3.

Звернення до функції має вид $y := \text{IN_T}(N, x)$, де N – номер розв'язуючого модуля, x і y – відповідно вхідна і вихідна змінні. Як видно, серед параметрів функції немає ні параметрів цифрового фільтра, ні коефіцієнтів дробово-раціональної передатної функції. Це зв'язано з тим, що з метою економії машинного часу недоцільно вводити параметри, що використовуються тільки один раз (при першому звертанні до функції). Тому для обчислення коефіцієнтів різницевого рівняння (11.2) використовується процедура 0IN_T, що у програмі виконується один раз і слу-

жить тільки для «настроювання» відповідного розв'язуючого модуля (функції). Настроювання здійснюється шляхом занесення даних у комірки пам'яті, до яких буде відбуватися звертання під час виконання тіла функції.

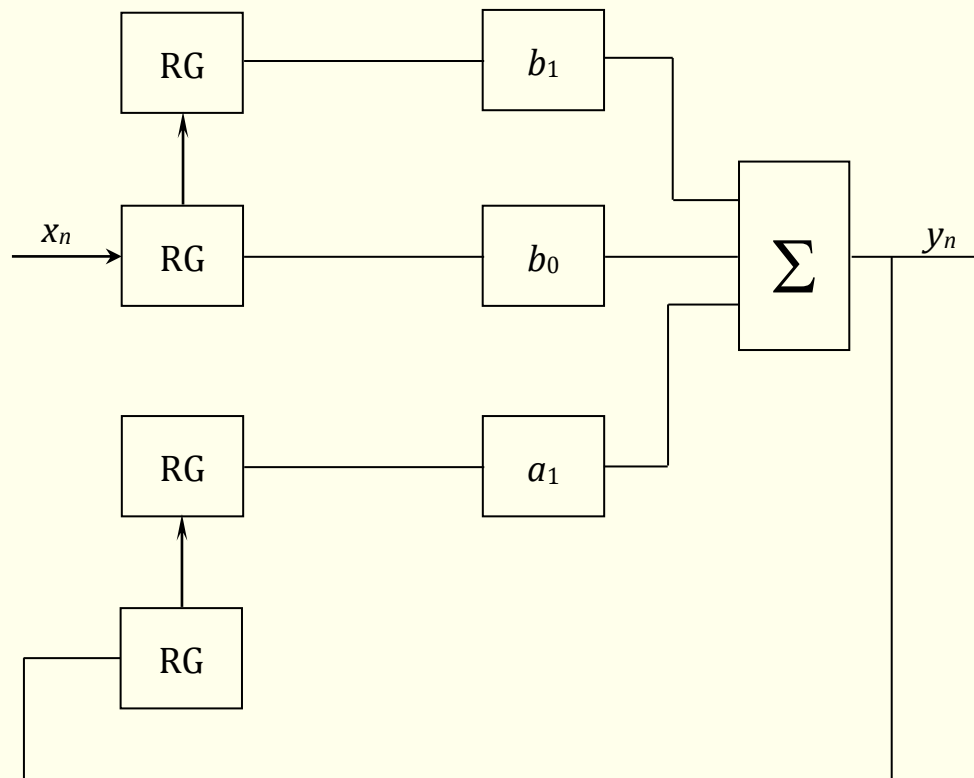


Рис. 11.2. Структура обчислювача функції IN_L

Важливою особливістю в роботі функції є те, що з метою забезпечення квазіпаралельних обчислень у модулі моделі в деяких випадках вона повинна одночасно обслуговувати кілька розв'язуючих модулів. Це стосується тих випадків, коли модель об'єкта містить кілька однотипних ланок. Тоді кожній такій ланці відповідає той самий розв'язуючий модуль (у даному випадку функція IN_T). Оскільки алгоритм роботи функції з даними для таких розв'язуючих модулів той самий, то досить зберігати лише коефіцієнти різницевого рівняння (11.2) і поточний стан регістрів (рис. 11.2) для кожного розв'язуючого модуля окремо. Для цього коефіцієнти різницевого рівняння і дані регістрів доцільно організувати в однімірні масиви, розмірність яких відповідає числу однотипних розв'язуючих модулів. Звертання функції до елементів масиву відбувається відповідно значення параметра функції N , що використовується для нумерації розв'язуючих модулів.

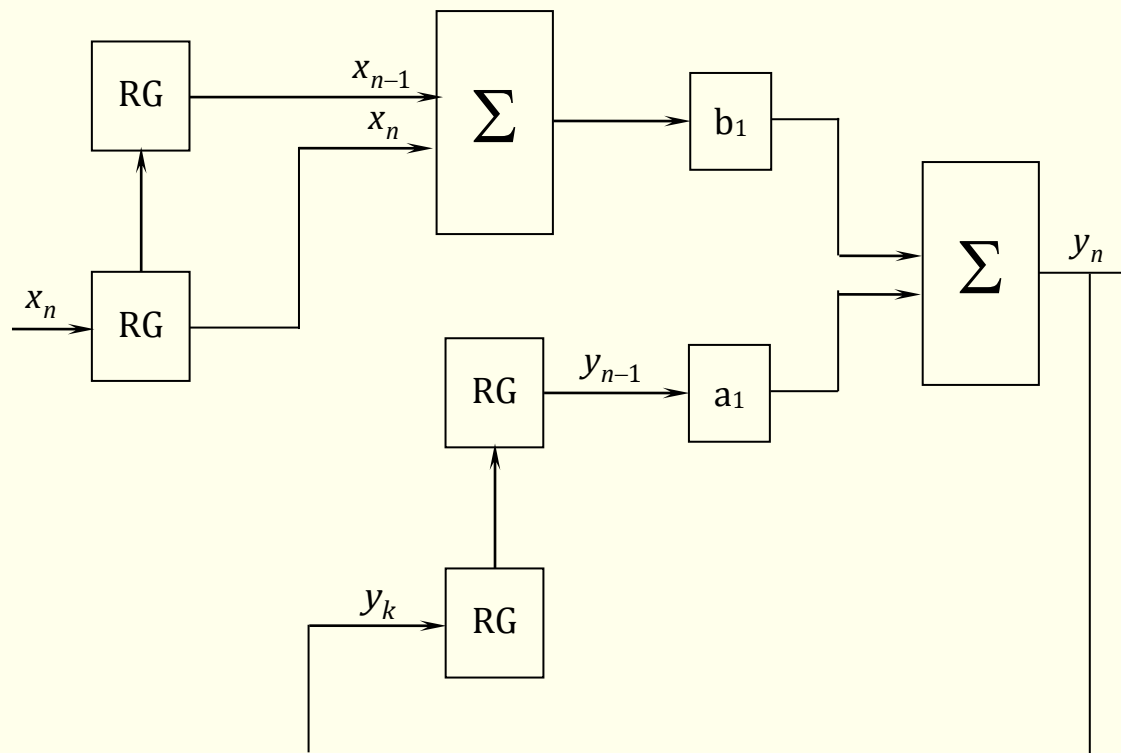


Рис. 11.3. Структура обчислювача функції

Таким чином, для реалізації інерційного елемента використовується функціональний модуль, що складається з ініціалізаційної частини (процедури 0IN_T), яка по відомих параметрах (коефіцієнтам дробово-раціональної передатної функції і заданим чи обчисленим заздалегідь початковим умовам) здійснює обчислення коефіцієнтів цифрового фільтра і разом з початковими умовами (відповідно до номера розв'язуючого модуля) заносить їх у пам'ять як елементи масивів. Функція IN_T при кожному звертанні до неї зчитує відповідне значення номера розв'язуючого модуля (настроювання) і після обчислень за заданим алгоритмом зберігає поточний стан.

Виконання розв'язуючої частини функціонального модуля у вигляді функції добре погоджується з ідеєю функціонального програмування, яке полягає в тому, що будь-яку складну програму можна розглядати, як функцію, аргументи якої виступають як вхідні дані цієї програми, а її значення – як результати. Можливість застосування функціонального стилю в програмуванні дозволяє визначати нові, невідомі функції у вигляді суперпозиції відомих (примітивних) і раніше визначених функцій. Це, в свою чергу, дозволяє позбутися від використання безлічі проміж-

них параметрів і замінювати громіздкі програмні конструкції адекватними, але більш простими.

Системна частина програмної моделюючої системи представлена наступними структурними елементами: модуль ініціалізації і введення, модуль керування, модуль реєстрації результатів і модуль візуалізації. На модуль ініціалізації і введення покладені наступні функції: задання складу і кількості розв'язуючих модулів, а також резервування пам'яті для їхньої роботи; оголошення програмних змінних, котрі повинні бути доступні для контролю в процесі розв'язування задачі; ініціалізація периферійних пристроїв; введення і редагування вихідних даних.

Модуль керування забезпечує синхронну роботу різних модулів і керує ходом обчислень і реєстрацією результатів.

Модуль реєстрації результатів здійснює прийом даних з модуля моделі під час обчислень, у разі потреби їхнє автоматичне проріджування і запис у масиви чи у файли. Для зручного відображення отриманих результатів використовується модуль візуалізації. За допомогою цього модуля можна вивести результати моделювання на екран чи на принтер у вигляді графіків, причому користувачу надається можливість послідовного виведення декількох графіків окремо чи всіх разом. При послідовному виведенні, кожен графік автоматично масштабується зі своїм коефіцієнтом до розмірів робочого поля, а при одночасному виведенні декількох загальний масштабний коефіцієнт вибирається таким, що відповідає максимальному значенню з усіх масштабних коефіцієнтів окремих графіків. Можливе також одночасне виведення декількох графіків з різними масштабними коефіцієнтами. У цьому випадку масштабуються відповідні числові осі, що виводяться для кожного графіка окремо.

Варто відмітити, що описана програмна система також дозволяє генерувати різні варіанти моделюючих програм, призначених для вирішення вузького класу задач і орієнтованих на широке коло користувачів.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які чинники впливають на склад бібліотеки розв'язуючих модулів?
2. Як програмно зберігаються проміжні результати різницевих рівнянь?

Тема 12.

ФУНКЦІОНУВАННЯ КОМП'ЮТЕРНОЇ МОДЕЛЮЮЧОЇ СИСТЕМИ

12.1. ПРИВЕДЕННЯ ВИХІДНОЇ МАТЕМАТИЧНОЇ МОДЕЛІ ДО ВИГЛЯДУ, ЗРУЧНОМУ ДЛЯ ЇЇ КОМП'ЮТЕРНОЇ РЕАЛІЗАЦІЇ

Вхідною інформацією для моделюючої системи є програми функціональної частини, написані спеціальною мовою опису моделей, числові значення вихідних даних, задані умови реєстрації результатів і форма їхнього виведення. Створенню програми функціональної частини системи передують дії по приведенню вихідної математичної моделі до вигляду, зручному для її комп'ютерної реалізації. Після цього вводяться програмний код модуля обчислення початкових умов і модуля моделі.

Розглянемо приклад складання текстів програм для модулів функціональної частини. Нехай математична модель динамічного об'єкта задана системою диференціальних рівнянь:

$$\frac{dx_1}{dt} = \frac{k_1 x_0 - \left(k_1 k_4 + k_1 k_3 \frac{T_5}{T_3} \right) x_2 - k_1 k_5 x_3 - x_1}{T_1}; \quad (12.3)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \frac{k_2 x_1 - x_2}{T_2}; \quad (12.4)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = \frac{k_3 x_2}{T_3}, \quad (12.5)$$

де $k_1, k_2, k_3, k_4, k_5, T_1, T_2, T_3$ – сталі коефіцієнти, x_0 – вхідна змінна, x_3 – вихідна змінна.

Зробивши еквівалентні алгебраїчні перетворення і перейшовши в частотну область, одержимо опис математичної моделі об'єкта у вигляді структурної моделі (рис. 12.1).

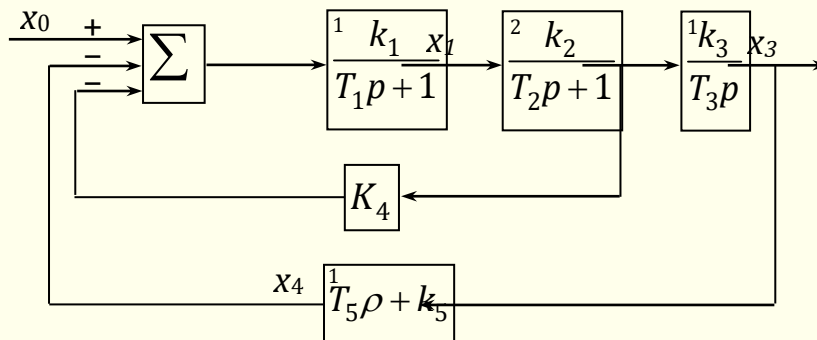


Рис. 12.1. Структура моделі для системи (12.3)-(12.5)

Для обчислення початкових умов розглянемо математичну модель об'єкта в сталому режимі. Оскільки всі похідні, що входять у (12.3)-(12.5) дорівнюють нулю, то одержимо

$$x_3 = \frac{1}{k_5} x_0; \quad x_1 = 0; \quad x_2 = 0. \quad (12.6)$$

Знаючи величину вхідного сигналу системи x_0 , з (12.6) знаходимо початкові значення інших параметрів системи.

12.2. ПРИКЛАД СТВОРЕННЯ ПРОГРАМНОГО КОДУ МОДЕЛІ

Текст модуля початкових умов у цьому випадку буде мати вигляд:

```
X1:=0;
X2:=0;
X3:=X0/K5;
OIN_T(1,X0,K1,T1);
OIN_T(2,X1,K2,T2);
OINT_S(1,X2,K3/T3);
ODIF_P(1,X3,T5).
```

Перші три рядки модуля призначені для обчислення початкових умов за заданим значенням x_0 (у програмі X0).

Інші рядки модуля служать для настроювання розв'язуючої частини функціональних модулів модуля моделі. Тут з'являються усі функціональні модулі, їхні номери (перший параметр), початкові умови (другий параметр), а також значення параметрів-коефіцієнтів реалізованої передатної

функції. У назві процедур після символу підкреслення задається також метод, за допомогою якого реалізується розв'язуючий модуль (наприклад, T – по квадратурній формулі трапецій, S – по формулі Сімпсона і т.п.).

Написання цієї частини модуля може здійснюватися і після складання тексту програми модуля моделі, тому що склад розв'язуючих модулів не завжди заздалегідь відомий і може змінюватися в процесі синтезу модуля моделі.

Для складання тексту програми модуля моделі за математичним описом об'єкта у вигляді структурної схеми, приведеної на рис. 12.1, необхідно використовувати не тільки інформацію про склад і передатні властивості структурних елементів об'єкта, але й інформацію про зв'язки між ними, а також враховувати причинно-наслідкові часові співвідношення.

У випадку, коли необхідно одержувати інформацію про значення проміжних параметрів x_1 , x_2 і x_4 , текст програми модуля моделі буде мати вигляд:

```
X1 := IN_T(1, X0 - K4 * X4);  
X2 := IN_T(2, X1);  
X3 := INT_S(1, X2);  
X4 := K5 * X3 + DIF_P(1, X3).
```

Якщо при моделюванні необхідно фіксувати тільки значення вихідної змінної x_3 , то текст програми модуля моделі можна записати в стилі функціонального програмування. Оскільки x_2 – вузлова точка в структурній схемі (рис. 12.1), то для того, щоб значення програмної змінної $X2$ обчислювалося один раз, доцільно залишити її як проміжну змінну. Тоді текст програми буде складатися з двох рядків:

```
X2:=IN_T(2,IN_T(1,X0-K4*X2-K5*X3+DIF_P(1,X3)));  
X3:=INT_S(1,X2);
```

Таким чином, при написанні текстів програм у стилі функціонального програмування за рахунок суперпозиції функцій зменшується кількість програмних змінних, заощаджується оперативна пам'ять і скорочується кількість операцій передачі параметрів при підрахунку.

Для підготовки до проведення обчислювального експерименту необхідно попередньо задати чисельні значення параметрів моделі (значення вихідних програмних змінних). Крім цього необхідно задати крок дискретизації часу й інтервал часу, на якому виробляється моделювання. Від цих двох параметрів залежить кількість циклів звертань до модуля моделі. При кожному такому звертанні виробляється збільшення лічильника часу на величину кроку дискретизації часу. Під час кожного звертання до модуля моделі виробляються обчислення в тому порядку, в якому вони задавалися в тексті модуля чи за правилами обчислень при суперпозиції функцій.

Важливим у процесі моделювання є реєстрація результатів моделювання і їхнє відображення. У зв'язку з тим, що при малому кроці дискретизації часу на порівняно великих тимчасових інтервалах кількість кроків обчислень може бути дуже великою, то для реєстрації результатів обчислень можуть знадобитися великі обсяги оперативної пам'яті. На практиці, у більшості випадків, для оцінки результатів моделювання досить мати інформацію в обмеженому числі кроків дискретизації часу (не більш 10). Разом з тим число кроків обрахувань при моделюванні, як правило, у кілька разів перевищує кількість даних, потребуючих реєстрації. У моделюючій системі передбачена можливість задання кількості реєструючих даних. Якщо ця кількість нижче кількості кроків обчислень, то тоді реєстрація відбувається з проріджуванням. Функції проріджування і реєстрації покладені на модуль реєстрації даних. Синхронність роботи модуля моделі і модуля реєстрації даних забезпечує модуль керування. До складу модуля керування входить таймер машинного часу, що і дозволяє робити моделювання в реальному, уповільненому і прискореному часі.

Для відображення результатів користувач може використовувати три види висновку: на екран у вигляді чисельних значень змінних, у файл (у тому ж вигляді), на екран у вигляді графіків.

Тема 13.

ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ

13.1. ІНТЕГРАЛЬНІ РІВНЯННЯ

Інтегральним рівнянням називається рівняння, яке містить невідому функцію під знаком інтеграла. Наприклад,

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds + f(x), \quad x \in [a,b], \quad (13.1)$$

або

$$\varphi(x) = \lambda \int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds + f(x). \quad (13.2)$$

Тут $K(x,s)$, $f(x)$ – задані функції, λ – комплексний параметр, $\varphi(x)$ – шуканий розв'язок. Функції $K(x,s)$ та $f(x)$ називаються ядром і вільним членом інтегрального рівняння.

13.2. ТИПИ ІНТЕГРАЛЬНИХ РІВНЯНЬ

Інтегральні рівняння класифікуються таким чином:

- 1) якщо шукана функція міститься тільки під знаком інтеграла, то рівняння називається інтегральним рівнянням першого роду. Такими є рівняння

$$\int_a^b K(x,s)\varphi(s)ds = f(x), \quad (13.3)$$

або

$$\int_a^x K(x,s)\varphi(s)ds = f(x). \quad (13.4)$$

Рівняння (13.1) і (13.2), в яких шукана функція міститься також і поза інтегрального доданка називається рівнянням другого роду;

2) якщо межі інтегрування фіксовані, то інтегральне рівняння називається рівнянням Фредгольма (випадок (13.1) і (13.3)). Якщо ж межі інтегрування змінні (випадок (13.2) і (13.4)), то інтегральне рівняння називається рівнянням Вольтерри;

Формально рівняння Вольтерри можна розглядати як частковий випадок рівняння Фредгольма, поклавши, наприклад, в (13.2) $K(x,s) \equiv 0$ при $t > x$. Однак фізичні задачі, які приводять до рівнянь Вольтерри і Фредгольма, а також властивості розв'язків цих рівнянь істотно різні. Тому рівняння Вольтерри виділяють в особливий тип рівнянь;

3) рівняння (13.1)-(13.4) називаються однорідними, якщо $f(x) \equiv 0$. В супротивному випадку ці рівняння називаються неоднорідними.

Розв'язком інтегрального рівняння називається функція $\varphi(x)$, яка при підстановці в це рівняння, перетворює його в тотожність по x .

13.3. МЕТОД КВАДРАТУР

Метод квадратур полягає у отриманні і безпосередньому використанні розрахункових виразів (кінцевих рівнянь, рекурентних формул), отриманих шляхом заміни інтегральних операторів кінцевими сумами на основі застосування різних квадратурних формул. У загальному випадку, квадратурні формули для наближеного обчислення визначеного інтеграла мають вигляд

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{i=1}^n A_i \varphi(x_i) + R[\varphi], \quad (13.5)$$

де x_i – фіксовані абсциси проміжку $[a, b]$ або вузли інтерполяції, A_i – числові коефіцієнти, $R[\varphi]$ – залишковий член (похибка) формули. При комп'ютерному способі розв'язання інтегральних рівнянь часто використовується формула трапецій, у якій вузли і коефіцієнти мають такі значення (для загальної формули трапецій):

$$A_1 = A_n = \frac{h}{2}, A_2 = A_3 = \dots = A_{n-1} = h, x_i = a + h(i-1), i = \overline{1, n}, h = \frac{b-a}{n-1}.$$

13.4. МЕТОД КВАДРАТУР ДЛЯ РІВНЯННЯ ВОЛЬТЕРРИ II РОДУ

Лінійне одномірне рівняння Вольтерри II роду має вигляд

$$y(x) - \int_a^x K(x,s)y(s)ds = f(x), \quad x \in [a,b], \quad (13.6)$$

де $K(x,s) \equiv 0$ при $s > x$.

З метою застосування до рівняння (13.6) методу квадратур, використаємо вираз

$$y(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i,s)y(s)ds = f(x_i), \quad i = \overline{1,n}. \quad (13.7)$$

Приймаючи значення x_i як вузли квадратурної формули і замінюючи інтеграл кінцевою сумою, одержимо

$$y(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) y(x_j) = f(x_i) + R_i[y]. \quad (13.8)$$

Вважаючи, що похибки апроксимації є незначними і не враховуючи їх, одержуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_i - \sum_{j=1}^i A_j K_{ij} y_j = f_i, \quad i = \overline{1,n}, \quad (13.9)$$

де введені наступні позначення: $\tilde{y}(x_i) = y_i$, $f(x_i) = f_i$, $K(x_i, x_j) = K_{ij}$.

Рішення (13.9) дає наближені значення шуканої функції $\tilde{y}(x_i) = y_i$ у вузлах x_i . Матриця коефіцієнтів системи (13.9) – трикутна, що дозволяє послідовно знайти y_1, y_2, \dots, y_n за рекурентними формулами. Застосування формули трапецій із кроком $h_i = x_i - x_{i-1}$, $i = \overline{2,n}$ (у загальному випадку змінним) приводить до розв'язання рівняння (13.6) у вигляді таких рекурентних формул:

$$\left. \begin{aligned} y_1 &= f_1, \\ y_2 &= \frac{f_2 + \frac{h_2}{2} K_{21} y_1}{1 - \frac{h_2}{2} K_{22}}, \\ &\dots \\ y_i &= \frac{f_i + \frac{h_i}{2} K_{i1} y_1 + \sum_{j=2}^{i-1} \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right) K_{ji} y_j}{1 - \frac{h_i}{2} K_{ii}}, \quad i = \overline{1,3}. \end{aligned} \right\} \quad (13.10)$$

Формули (13.10) справедливі за умови $h_i \neq \frac{2}{K_{ii}}$. Приведемо також ви-

рази, що дають наближену оцінку похибок при розв'язуванні рівняння (13.6) методом квадратур за формулами (13.10):

$$\left. \begin{aligned} \Delta y_1 \approx \Delta y_2 \approx 0, \\ R_i + \sum_{j=2}^{i-1} \left(\frac{x_{j+1} - x_{j-1}}{2} \right) K_{ij} \Delta y_j \\ \Delta y_i = \frac{\quad}{1 - \frac{x_i}{2} K_{ii}}, \quad i = \overline{1, 3}. \end{aligned} \right\}, \quad (13.11)$$

де

$$\begin{aligned} R_i &\approx -\frac{1}{12} \sum_{j=2}^i h_j^3 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} [K(x_i, s) y(s)] \right\}_{s=x_j}; \\ &\left\{ \frac{\partial^2}{\partial s^2} [K(x_i, s) y(s)] \right\}_{s=x_j} \cong \\ &\cong \begin{cases} 2 \left[\frac{K_{ij-1} y_{j-1}}{h_j (h_j + h_{j+1})} - \frac{K_{ij} y_j}{h_j h_{j+1}} + \frac{K_{ij+1} y_{j+1}}{(h_j + h_{j+1}) h_{j+1}} \right], \quad j = \overline{2, i-1}, \\ 2 \left[\frac{K_{ii-2} y_{j-2}}{h_{i-1} (h_{i-1} + h_i)} - \frac{K_{ii-1} y_{i-1}}{h_{i-1} h_i} + \frac{K_{ii} y_i}{(h_{i-1} + h_i) h_i} \right], \quad j = i \end{cases} \end{aligned} \quad (13.12)$$

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які є типи інтегральних рівнянь?
2. У чому полягає метод квадратур?

Тема 14.

ВАГОВА ФУНКЦІЯ.

ПЕРЕХІДНА ХАРАКТЕРИСТИКА

14.1. ВАГОВА АБО ІМПУЛЬСНА ПЕРЕХІДНА ФУНКЦІЯ СИСТЕМИ

Перш ніж дати визначення *вагової функції* системи, розглянемо функцію $\delta(t)$, названу *функцією Дірака* чи *дельта-функцією*. У теорії автоматичного керування цю функцію часто називають *одиничним імпульсом*. Зміст подібної назви стане ясний з подальшого.

Визначимо $\delta(t)$ наступними співвідношеннями:

$$\delta(t) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0, \end{cases} \quad (14.1)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (14.2)$$

Очевидно, що $\delta(t)$, так само як і $U(t)$, є деякою математичною абстракцією реально існуючих сигналів. Розглянемо допоміжну функцію $\delta(t, \mu)$, рівну

$$\delta(t, \mu) = \frac{dU(t, \mu)}{dt} = \frac{\mu}{\pi(1 + \mu^2 t^2)}. \quad (14.3)$$

Графіки цієї функції для різних значень μ ($\mu_1 > \mu_2 > \mu_3$) приведені на рис. 14.1.

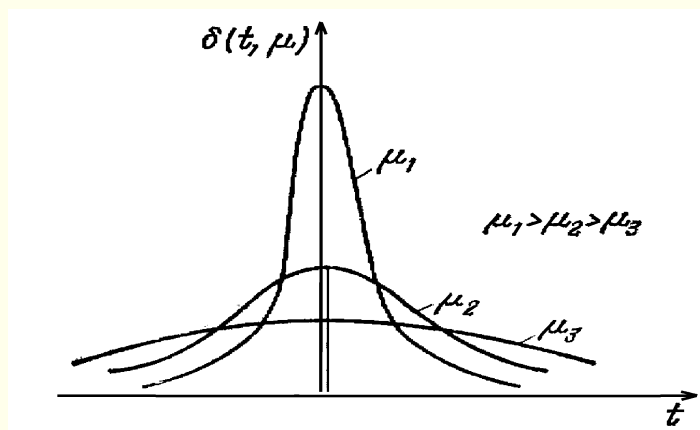


Рис. 14.1. Графіки функції (14.6)

У цьому випадку $\delta(t)$ можна розглядати як межа функції $\delta(t, \mu)$ при $\mu \rightarrow \infty$:

$$\delta(t) = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \delta(t, \mu) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t \neq 0. \end{cases}$$

Відмітимо, що

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = \lim_{\mu \rightarrow \infty} \frac{\mu}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{1 + \mu^2 t^2} = 1.$$

Ще більш наочним зміст $\delta(t)$ стане, якщо скористатись формальною рівністю $\delta(t, \mu) = \frac{dU(t)}{dt}$, що випливає з (14.3). За визначенням похідної

$$\delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \delta(t, \tau) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{U(t) - U(t - \tau)}{\tau}.$$

З рис. 14.2, на якому зображений графік функції $\delta(t, \tau)$, ясно, що площа прямокутного імпульсу $S = \tau \frac{1}{\tau} = 1$. Інакше цей результат можна записати так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t, \tau) dt = 1,$$

звідки і походить назва для $\delta(t)$ – одиничний імпульс.

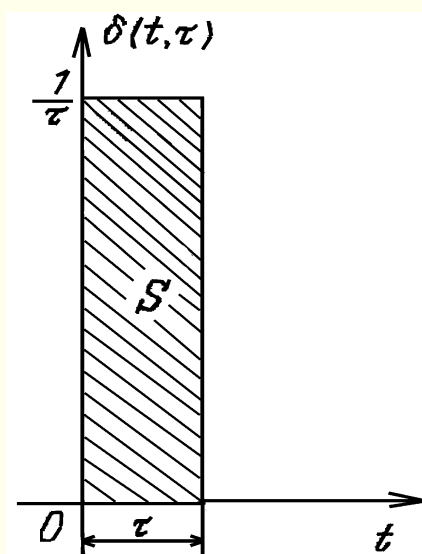


Рис. 14.2. Наближення одиничного імпульсу

14.2. ПЕРЕХІДНА ФУНКЦІЯ

Сигнал $h(t)$, який одержується на виході системи при подачі на його вхід одиничного стрибка $U(t)$, називається перехідною функцією системи.

Згідно перетворення Лапласа $U(t) \rightarrow \frac{1}{p}$, і, отже, за означенням маємо

$$Y(p) = \frac{W(p)}{p}. \quad (14.4)$$

Переходячи від зображення до оригіналу, одержимо

$$h(p) \rightarrow \frac{W(p)}{p}. \quad (14.5)$$

Знайдемо зв'язок між передатною й перехідною функціями. З формули

$$x(t) = \int_0^t x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \quad (14.6)$$

при $x(t) = U(t)$ випливає, що

$$h(t) = \int_0^t \omega(\tau) U(t - \tau) d\tau = \int_0^t \omega(\tau) d\tau, \quad (14.7)$$

звідки

$$\omega(\tau) = \frac{dh(t)}{dt}, \quad (14.8)$$

тобто оригінал передатної функції дорівнює похідній від перехідної функції системи. Не слід забувати, що, як і раніше, система має нульові початкові умови.

Виразимо $y(t)$ – реакцію системи на довільний вплив $x(t)$ через перехідну функцію $h(t)$. З (14.7) і (14.8) маємо

$$y(t) = \int_0^t \frac{dh(\tau)}{d\tau} x(t - \tau) d\tau. \quad (14.9)$$

Провівши інтегрування в (14.9) за частинами, одержимо

$$y(t) = h(t)x(0) + \int_0^t \frac{dx(\tau)}{d\tau} h(t - \tau) d\tau. \quad (14.10)$$

14.3. ВЛАСТИВОСТІ ОДИНИЧНОГО ІМПУЛЬСУ

$$1. \quad \delta(t - \tau) = \begin{cases} \infty & \text{при } t = \tau, \\ 0 & \text{при } t \neq \tau. \end{cases}$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - \tau) dt = 1.$$

$$3. \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t - \tau) dt = f(\tau), \quad (14.11)$$

якщо $f(t)$ – обмежена і неперервна функція.

Властивість (14.11) дає можливість представити будь-який сигнал у вигляді сукупності одиничних імпульсів. Справді,

$$x(t) = \int_0^t x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (14.12)$$

Виходячи з формальної рівності (14.8) і того, що $U(p) = \frac{1}{p}$, знаходимо, за властивістю диференціювання оригіналу

$$\delta(t) \rightarrow 1. \quad (14.13)$$

Цей же результат можна одержати безпосередньо з прямого перетворення Лапласа, застосування якого в даному випадку можливо, оскільки $\delta(t)$ абсолютно інтегрована.

Сигнал, який одержується на виході лінійних динамічних об'єктів при подачі на її вхід одиничного імпульсу, називається ваговою або імпульсною перехідною функцією $W(t)$.

Так як $\delta(t) \rightarrow 1$, то

$$Y(p) = W(p). \quad (14.14)$$

Переходячи від зображення до оригіналу, одержуємо, що вагова функція системи є оригіналом передатної функції.

Як впливає з викладеного вище, передатна, перехідна і вагова функції системи, що є її характеристиками, однозначно зв'язані одна з одною. Знаючи одну з них, завжди можна знайти будь-яку іншу.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Що таке функція Дірака?
2. Що таке вагова функція системи?
3. Як означається перехідна функція системи?
4. Який зв'язок між передатною функцією та перехідною функцією системи?

Тема 15.

ІНТЕГРАЛЬНИЙ ОПЕРАТОР ЗГОРТКИ

15.1. МАТЕМАТИЧНИЙ ОПИС ЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ ОБ'ЄКТІВ НА ОСНОВІ ОПЕРАТОРА ЗГОРТКИ

Інтеграл Дюамеля дозволяє визначати реакцію системи на дію $s(t)$ в поточному часі по її перехідній функції $g(t)$ на одиничний стрибок вхідної дії:

$$y(t) = y(0) + \int_0^t \frac{\partial}{\partial \tau} g(\tau) s(t - \tau) d\tau,$$

де $y(0)$ – початкове значення вихідного сигналу системи.

Інтеграл згортки – це варіант інтеграла Дюамеля. Довільний сигнал на вході системи з використанням виразів розкладу сигналу може бути представлений у вигляді послідовної лінійної комбінації зважених одиничних імпульсів:

$$y(t) = T[s(t)] = T \left[\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \right].$$

На основі принципу суперпозиції лінійний оператор T може бути внесений під знак інтеграла, оскільки останній є граничним значенням суми. При цьому операція перетворення діє тільки по змінній t . Звідси слідує:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) T[\delta(t - \tau)] d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau. \quad (15.1)$$

Цей вираз є інтегралом згортки (конволюції) вхідного сигналу з імпульсною характеристикою системи. Заміною змінних $t - \tau = \tau$ можна переконатися в тому, що згортка комутативна:

$$\int_{-\infty}^{\infty} s(\tau) h(t - \tau) d\tau \equiv \int_{-\infty}^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau. \quad (15.2)$$

Функція $h(\tau)$ називається ядром згортки (kernel) або імпульсною характеристикою лінійної системи.

Зміст інтеграла згортки полягає в тому, що вхідний сигнал представляється послідовністю слідуєчих один за одним коротких імпульсів, площі яких рівні значенню сигналу в моменти їх проходження при тривалості імпульсів, прямуєчої до нульової. Така послідовність імпульсів умовно може розглядатися у вигляді послідовності дельта-функцій з площами, рівними площам відповідних імпульсів. Реакція системи (15.1) знаходиться як сума реакцій на кожен імпульс, що становить вхідну дію.

Аналогічно, для дискретних сигналів, де значення Δt , як правило, приймається рівним 1, а індекси k і n виконують роль номерів відліку числових рядів:

$$y(k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} h(n)s(k-n). \quad (15.3)$$

У цифрових методах обробки сигналів функцію $h(n)$, зазвичай, називають оператором згортки, а його розмір по числу відліків – вікном оператора згортки.

Вирази (15.1) мають спеціальну форму спрощеного математичного запису в символічному вигляді:

$$y(t) = s(t - \tau) * h(\tau) \equiv s(t) * h(t).$$

В реальних фізичних системах імпульсний відгук, як правило, відмінний від нуля тільки на певному інтервалі, і, відповідно, межі інтегрування (сумування) у виразах (15.2 і 15.3) обмежуються значеннями, на яких функції $h(\tau)$ і $h(n)$ існують або набувають значення.

Сигнали, що обробляються на комп'ютері, мають кінцеву тривалість. Допустимо, сигнал $s(k)$ відмінний від нуля тільки на відрізьку від 0 до K включно («має довжину $K + 1$ »). Нехай вікно оператора згортки $h(n)$ відмінне від нуля на відрізьку від $-N$ до N ($2N + 1$ відлік). При підстановці цих сигналів в рівняння згортки, отримаємо сигнал $y(k)$, який відмінний від нуля на відрізьку від $-N$ до $K + N$ включно. Таким чином, довжина вихідного сигналу рівна $2N + K + 1$, тобто сумі довжин початкового сигналу і ядра згортки мінус один.

15.2. ЧИСЛОВА РЕАЛІЗАЦІЯ ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЗГОРТКИ

Лінійний стаціонарний динамічний об'єкт із одним входом і виходом може бути описаний інтегральним оператором Вольтерри:

$$y(t) = \int_0^{\infty} h(\tau) s(t - \tau) d\tau, \quad (15.4)$$

де $h(\tau)$ – функція імпульсного відгуку, $s(t - \tau)$ – ядро.

На рис. 15.1 наведено приклад імпульсного відгуку $h(t)$ елементарної фізичної системи перетворення електричних сигналів динамічного інтегруючого RC контуру.

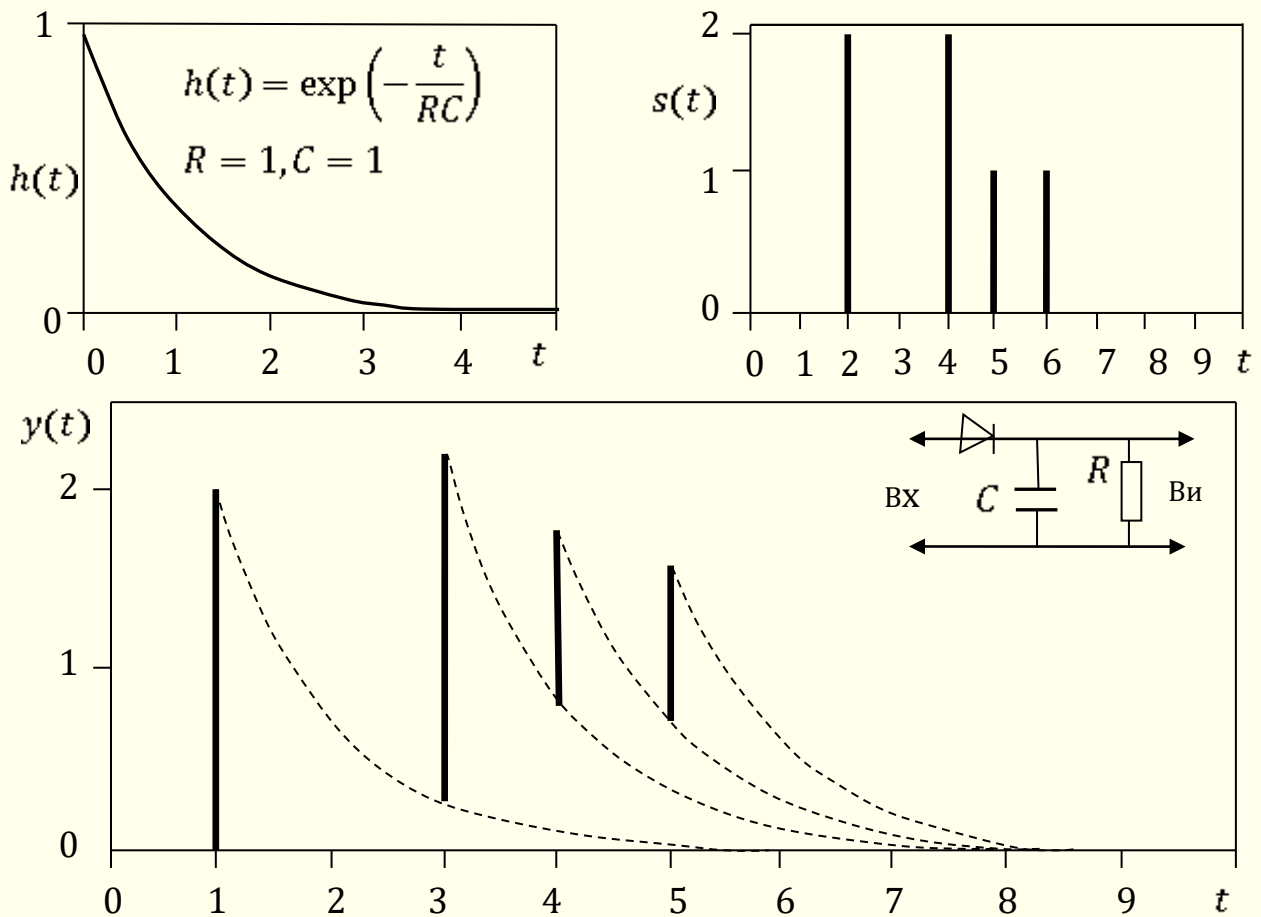


Рис. 15.1. Імпульсний відгук $h(t)$

При подачі на вхід RC контуру одиничного і дуже короткого ($\Delta t \ll RC$) імпульсу заряду Δq ємність C заряджається до напруг $V_0 = \Delta q / C$, і починає розряджатися через опір R , при цьому напруга на ємності змінюється згідно із законом $v(t) = V_0 \exp(-t/RC) = (\Delta q / C) \exp(-t/RC)$.

Звідси, імпульсний відгук RC контуру на одиничний вхідний сигнал з одиничним значенням заряду $\Delta q = 1$ рівний: $h(t) = \left(\frac{1}{C}\right) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)$, де форма відгуку визначається функцією експоненти, а множник $(1/C)$ є масштабним перетворювачем сигналу (заряду в напругу). По суті, імпульсним відгуком системи визначається частина вхідного сигналу, яка діє на виході системи після закінчення часу t після надходження сигналу на вхід (реакція системи з запізненням).

Якщо функція імпульсного відгуку системи відома, то, з урахуванням принципу суперпозиції сигналів в лінійній системі, можна виконати розрахунок реакції системи в будь-який довільний момент часу на будь-яку кількість вхідних сигналів в будь-які моменти часу їх приходу шляхом сумування реакцій системи з запізненням на ці вхідні сигнали. На малюнку 15.1 наведений приклад вхідного сигналу $s(t)$ для RC контуру у вигляді послідовності імпульсів і реакція системи $y(t)$ на такий вхідний сигнал, утворена сумуванням реакцій системи на кожен імпульс.

Припустимо, що на вхід RC контуру в моменти часу $t_1 = 1$ і $t_2 = 2$ поступили дуже короткі (в порівнянні із значенням RC) імпульси заряду величиною A і B . Математично це можна відобразити сигналом $s(t) = q_1(t) + q_2(t)$, де $q_1(t) = A\delta(t - t_1)$ і $q_2(t) = B\delta(t - t_2)$. Вихідний сигнал системи при відомому імпульсному відгуку $h(\tau)$ відобразиться формулою:

$$\begin{aligned} y(t) &= T[q_1(t) + q_2(t)] = T[A\delta(t - t_1)] + T[B\delta(t - t_2)] = \\ &= A T[\delta(t - t_1)] + B T[\delta(t - t_2)] = A h(t - t_1) + B h(t - t_2). \end{aligned}$$

При розрахунку значень вихідного сигналу в довільний момент часу t після приходу на вхід системи сигналів q_1 і q_2 , наприклад, для $t = 5$, для кожного з сигналів обчислюються значення їх реакцій з запізненням: $y_1 = A h(5 - 1) = A h(4)$ і $y_2 = B h(5 - 2) = B h(3)$, після чого значення реакцій з запізненням сумують $y = y_1 + y_2$. Приклад цієї операції можна бачити на рис. 15.2, де для зручності графічного уявлення прийняті значення $A = 1$ і $B = 1$. Суть операції не змінюється при будь-яких значеннях A і B , а в загальному випадку і для будь-якої кількості імпульсів.

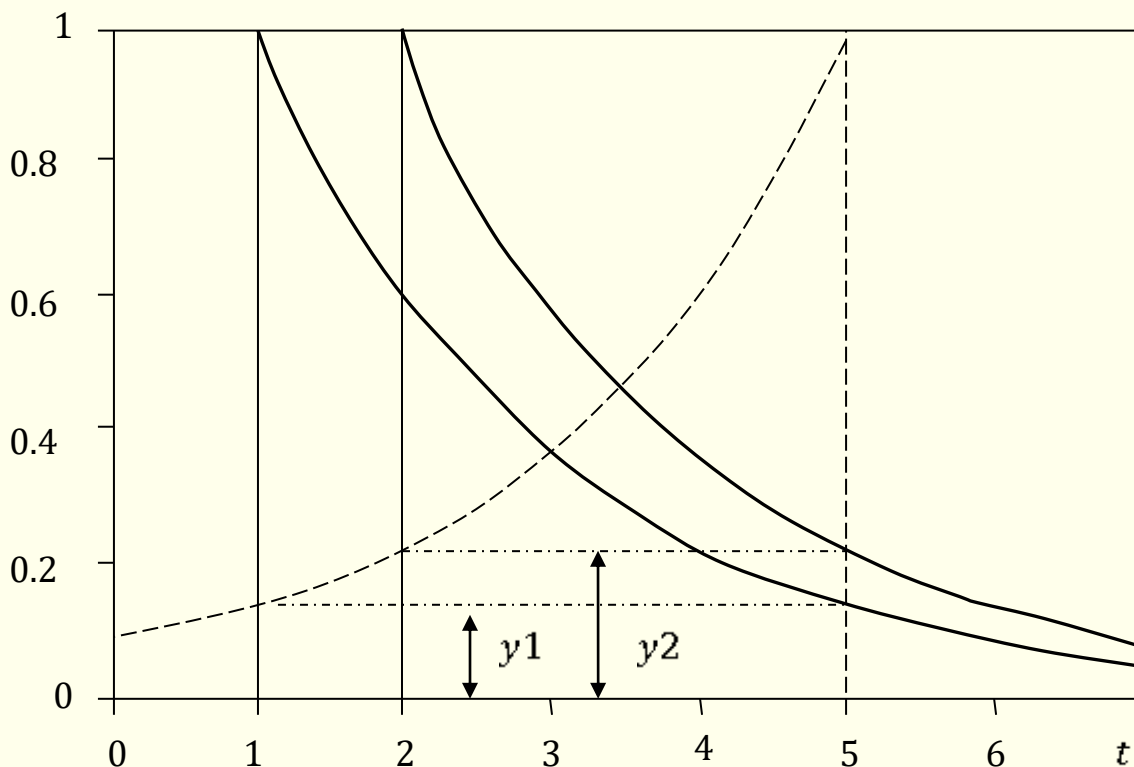


Рис. 15.2. Числова реалізація інтегрального оператора Вольтерри з різницевим ядром

Проте цю ж операцію можна розглядати і з іншої позиції. Розвернемо імпульсний відгук $h(t)$ системи на 180° і помістимо його початок $h(0)$ безпосередньо в точку, для якої потрібно виконати розрахунок вихідного сигналу, тобто в точку $t = 5$ для розглядуваного прикладу. Якщо тепер відлік координат для функції $h(t)$ розпочати назад від точки розрахунку по аргументу τ , тобто перейти на обчислення $h(\tau)$, де значення τ змінюється від 0 і далі (у межі до ∞), то неважко переконатися (на рисунку це наочно видно), що функція $h(\tau)$ перетне вхідні імпульси на тих же значеннях y_1 і y_2 . Для цих точок перетину першого і другого імпульсів відповідно має місце $\tau_1 = t - t_1$ і $\tau_2 = t - t_2$, як і при прямому методі розрахунку реакцій з запізненням при розрахунку значень $h(t - t_1)$ і $h(t - t_2)$. Після множення отриманих значень $h(\tau_1)$ і $h(\tau_2)$ на значення вхідного сигналу A і B , отримуємо повну аналогію:

$$y_1 = A h(\tau_1) = A h(t - t_1) \text{ і } y_2 = B h(\tau_2) = B h(t - t_2),$$

і відповідно сумарний сигнал $y = y_1 + y_2$.

Таке математичне представлення розрахунку зручніше для складання математичних алгоритмів обчислень. Умовно цей процес для ко-

ротких вхідних імпульсних сигналів може бути представлений в наступному вигляді. Для будь-якої точки розрахунку t_i вихідного сигналу інвертована по координатному напрямку функція імпульсного відгуку $h(\tau)$ поміщається в цю точку t_i і проглядається по своїй координаті τ з одночасним синхронним переглядом вхідного сигналу $s(t)$ назад від точки розрахунку (минулі значення вхідного сигналу) по координатах $t_i - \tau$. Значення всіх зустрінutih при перегляді імпульсів $s(t_i - \tau)$ перемножуються із значеннями $h(\tau)$ і підсумовуються. Тим самим, для кожної поточної точки розрахунку t_j в аналоговій системі виконується операція:

$$y(t_i) = \int_0^{\infty} h(\tau) s(t_i - \tau) d\tau,$$

Відповідно в цифрових системах для довільної точки k :

$$y(k\Delta t) = \sum_{n=0}^{\infty} h(n\Delta t) s(k\Delta t - n\Delta t).$$

Отримана сума значень і буде реакцією системи з запізненням на всі імпульси, що поступили на вхід системи до поточної точки розрахунку вихідного сигналу.

На практиці вхідні дані отримуються експериментально і мають табличний спосіб задання.

Приведемо фрагменти програм, кожна з яких реалізує інтегральну модель за трьома методами:

- за методом трапецій

```
function [T,Y]= prog1(a,b,k)
nt=100;
ns=10;
h=(b-a)/(nt*ns);
t=[a:h:b];
x=[a:0.1:b];
for i=1:nt
    y(i)=0;
    for j=1:i*ns-1
        y(i)=y(i)+k(i*ns-j);
```



```

    end;
    y(i)=h/2+y(i)*h+(0-h/2);
end;
plot(x,y);

```

- **за методом лівих прямокутників**

```

function [T,Y]= ptog2(a,b,k)
nt=100;
ns=10;
h=(b-a)/(nt*ns);
t=[a:h:b];
x=[a:0.1:b];
for i=1:nt
    y(i)=0;
    for j=0:i*ns-1
        y(i)=y(i)+k(i*ns-j);
    end;
    y(i)=y(i)*h;
end;
plot(x,y);

```

- **за методом правих прямокутників**

```

function [T,Y]= prog3(a,b,k)
nt=100;
ns=10;
h=(b-a)/(nt*ns);
t=[a:h:b];
x=[a:0.1:b];
for i=1:nt
    y(i)=0;
    for j=1:i*ns
        y(i)=y(i)+k(i*ns-(j-1));
    end;
    y(i)=y(i)*h;
end;
plot(x,y);

```

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Як можна використати інтеграл згортки для опису лінійних динамічних об'єктів?
2. В чому полягає зміст інтеграла згортки?
3. Які квадратурні формули можна використати для числової реалізації інтеграла згортки?

Тема 16.

ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ З ВИРОДЖЕНИМ ЯДРОМ

16.1. ПРОБЛЕМА НАКОПИЧЕННЯ ОБЧИСЛЕНЬ ПРИ ЧИСЛОВІЙ РЕАЛІЗАЦІЇ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ З ЯДРОМ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Розв'язування інтегральних рівнянь Вольтерри II роду. В задачах моделювання динамічних елементів систем часто виникає необхідність числової реалізації ланок, які складаються із двох паралельних каналів: безінерційного та інерційного. Математичною моделлю для таких ланок служить інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(t) - \int_{t_0}^t K(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t), \quad (16.1)$$

де $f(t)$ – відома вихідна величина, $\varphi(t)$ – шукана вхідна величина.

Для однозначної можливості розв'язування (16.1) досить, щоб виконувалась вимога неперервності ядра $K(t, \tau)$ та вільного члена $f(t)$.

Використаємо апроксимуючу систему рівнянь

$$\varphi(t_i) - \int_{t_0}^{t_i} K(t_i, \tau) \varphi(\tau) d\tau = f(t_i). \quad (16.2) \text{Приймаючи}$$

значення t_i за вузли квадратурної формули та замінюючи інтеграл кінцевою сумою, одержимо систему

$$\varphi(t_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, t_j) \varphi(t_j) = f(t_i) + R_i[\varphi]. \quad (16.3) \text{Зважаючи,}$$

що $R_i[\varphi]$ є малим і нехтуючи ним, отримаємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, де $t_j = j h$:

$$\tilde{\varphi}(t_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(t_i, t_j) \tilde{\varphi}(t_j) \cong f(t_i). \quad (16.4)$$

Вираз (16.4) дає наближене значення функції $\tilde{\varphi}(t_i)$ у вузлах t_i . Відповідно до виразу (16.4), застосовуючи формули трапецій для знаходження

наближених значень шуканої функції $\tilde{\varphi}(t_i)$, можна записати розрахункові вирази.

Для змінного кроку при $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = t_j - t_{j-1}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(t_1) = f(t_1), \\ \tilde{\varphi}(t_2) = \frac{\left(f(t_2) + \frac{h_2}{2} K(t_2, t_1) \varphi(t_1) \right)}{1 - \frac{h_2}{2} K(t_2, t_2)}, \\ \tilde{\varphi}(t_i) = \frac{\left(f(t_i) + \frac{h_2}{2} K(t_i, t_1) \varphi(t_1) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} K(t_i, t_j) \varphi(t_j) \right)}{1 - \frac{h_i}{2} K(t_i, t_i)}. \end{array} \right. \quad (16.5)$$

Для постійного кроку ($h = \text{const}$) при $i = 2, 3, \dots, n$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(t_1) = f(t_1), \\ \tilde{\varphi}(t_i) = \frac{\left(f(t_i) + \frac{h}{2} K(t_i, t_1) \varphi(t_1) + h \sum_{j=2}^{i-1} K(t_i, t_j) \varphi(t_j) \right)}{1 - \frac{h}{2} K(t_i, t_i)}. \end{array} \right. \quad (16.6)$$

Блок-схему алгоритму, який побудований на основі розрахункового виразу (16.6) зображено на рис. 16.1. Однак, розрахунковий вираз (16.6) не дозволяє будувати швидкий алгоритм розв'язування рівняння (16.1), оскільки час обчислення шуканої функції при цьому залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення кількості яких приводить до збільшення кількості обчислювальних операцій.

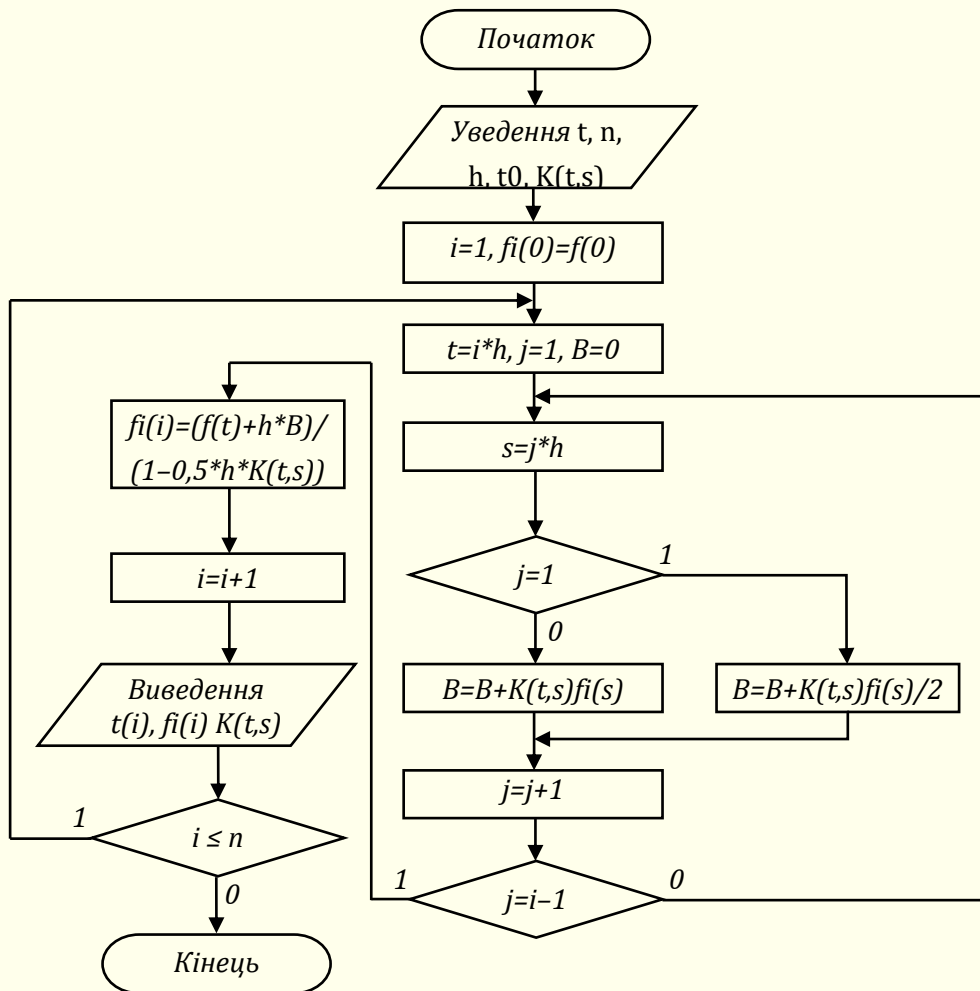


Рис. 16.1. Блок-схема алгоритму числового розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри II роду

Цей недолік усувається, якщо використати властивість подання ядра у вигляді суми добутоків незалежних функцій

$$K(t, \tau) = \sum_{l=1}^m q_l \frac{(t-\tau)^{l-1}}{(l-1)!} = \frac{1}{(m-1)!} \sum_{l=1}^m C_{m-1}^l t^{m-1-l} \tau^l = \sum_{l=1}^m \alpha_l(t) \beta_l(\tau), \quad (16.7)$$

$(l = \overline{1, m}), m \in N$

де q_l – невідомі величини; t і s – незалежні змінні,

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}, \quad \alpha_l(t) = C_{m-1}^l t^{m-1-l}, \quad \beta_l(t) = \tau^l.$$

Розрахунковий вираз, отриманий на основі використання властивості (2.11) із застосуванням формули трапецій, має вигляд:

- при змінному кроці дискретизації

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(t_1) = f(t_1), \\ \tilde{\varphi}(t_2) = \frac{f(t_2) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_2) \beta_l(t_1) \varphi(t_1)}{1 - \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_1) \beta_l(t_1)}, \\ \tilde{\varphi}(t_i) = \frac{f(t_i) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \beta_l(t_1) \varphi(t_1) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \beta_l(t_j) \varphi(t_j)}{1 - \frac{h_i}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \beta_l(t_i)}, \end{array} \right. \quad (16.8)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = t_j - t_{j-1}$.

- при постійному кроці дискретизації ($h = \text{const}$):

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{\varphi}(0) = f(0), \\ \tilde{\varphi}(t_i) = \frac{f(t_i) + h \sum_{l=1}^m \alpha_l(t_i) \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(t_j) \varphi(t_j)}{1 - \frac{h}{2} K(0)}, \end{array} \right. \quad (16.9)$$

де $i = 2, 3, \dots, n$; $A_j = \begin{cases} 0,5 & \text{при } j = 1, \\ 1 & \text{при } j > 1. \end{cases}$

Блок-схему алгоритму, побудованого на основі розрахункового виразу (16.9) зображено на рис. 16.2.

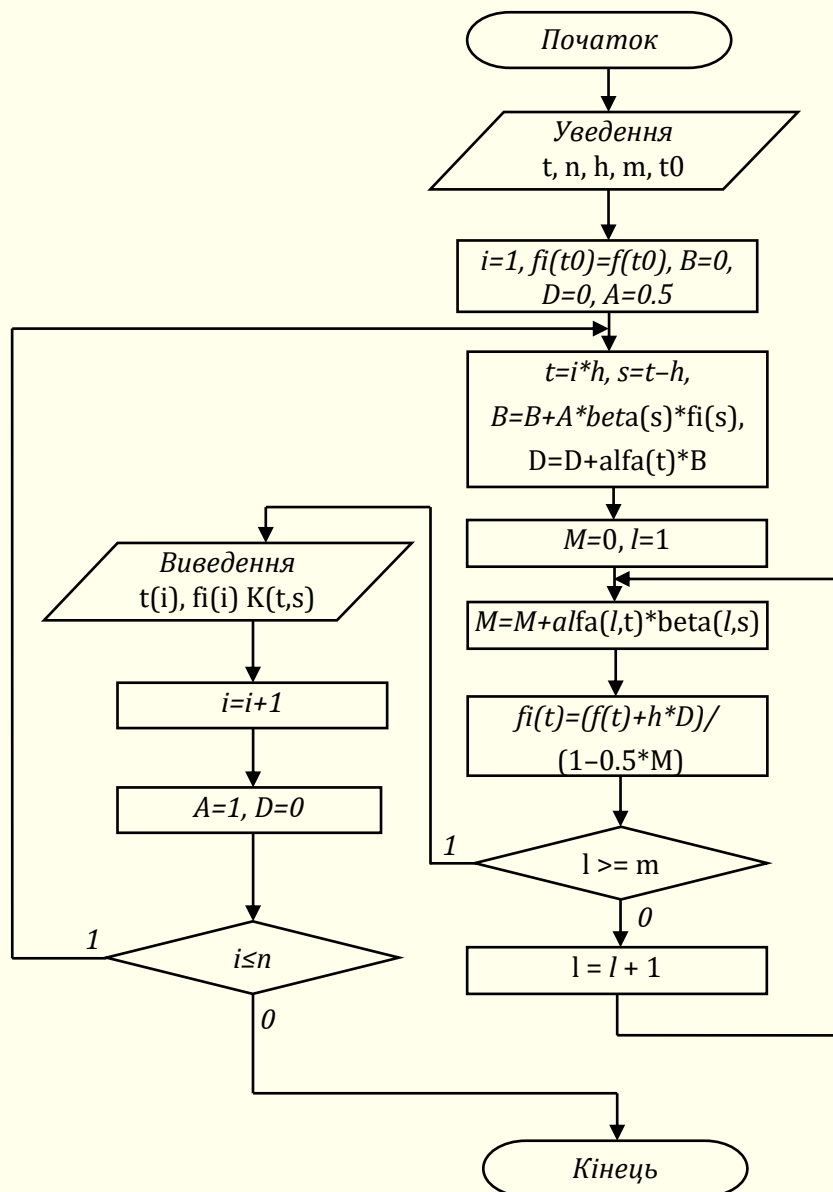


Рис. 16.2. Блок-схема алгоритму числового розв'язування інтегрального рівняння Вольтерри II роду з виродженим ядром

16.2. МЕТОД ВИРОДЖЕНОГО ЯДРА ІНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

Наростання об'єму обчислень в міру збільшення номера вузла стосується, насамперед, випадку розв'язування рівнянь із довільними ядрами. Метод вироджених ядер дозволяє одержати значне збільшення швидкості обчислень, завдяки такої особливості, як незмінне число обчислень на кожному кроці відшукування розв'язку. Зокрема, ця особливість важлива при побудові алгоритмів для числової реалізації моделей, які можна використовувати в програмних засобах візуального моделювання.

Для інтегрального оператора Вольтерри з виродженим ядром будемо мати:

$$\int_{t_0}^t K(t, \tau) y(\tau) d\tau = \int_{t_0}^t \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau = \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \int_{t_0}^t \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau.$$

(16.10) Після апроксимації інтеграла в (16.10) і застосування квадратурних сум одержимо:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t_i} K(t, \tau) y(\tau) d\tau &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \int_{t_0}^{t_i} \beta_i(\tau) y(\tau) d\tau \approx \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \sum_{j=0}^n \beta_i(t_j) y(t_j) = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) [\beta_i(t_n) y(t_n) + \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(t_j) y(t_j)] = \\ &= \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \beta_i(t_n) y(t_n) + \sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(t_j) y(t_j). \end{aligned}$$

(16.11) Значення суми $\sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \sum_{j=0}^{n-1} \beta_i(t_j) y(t_j)$ відоме, оскільки воно обчислене на попередньому $(i - 1)$ -му кроці. Тому залишається обчислити значення суми $\sum_{i=1}^m \alpha_i(t) \beta_i(t_n) y(t_n)$, що вимагає проведення незмінної кількості операцій на кожному i -му кроці.

Значна частина інтегральних операторів і рівнянь, що зустрічаються на практиці, містять різницеві ядра, які представлені в аналітичному вигляді, і володіють властивістю виродженості. Отже, на основі формули (16.11) можна будувати ефективні алгоритми з незмінною кількістю обчислень на кожному кроці для числової реалізації інтегральних ланок структурних моделей електромеханічних систем.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Яка основна проблема числової реалізації інтегральних моделей з ядром загального вигляду?
2. Яка особливість числової реалізації інтегральних моделей з виродженим ядром?

Тема 17.

ПРОБЛЕМИ ПОБУДОВИ ІНТЕГРАЛЬНИХ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ

17.1. ОТРИМАННЯ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА МОДЕЛЯМИ, ЩО ПОДАНІ В ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІЙ ФОРМІ

Традиційний спосіб математичного опису лінійних динамічних об'єктів полягає у використанні звичайного лінійного диференціального рівняння з сталими коефіцієнтами і нульовими початковими умовами:

$$\sum_{i=0}^n a_i \frac{d^i}{dt^i} y(t) = \sum_{j=0}^m b_j \frac{d^j}{dt^j} x(t), \quad \frac{d^i}{dt^i} y(0) = 0,$$

де $x(t)$ та $y(t)$ – вхідний та вихідний сигнали об'єкта.

Операторне рівняння

$$Y(p) \sum_{i=0}^n a_i p^i = X(p) \sum_{j=0}^m b_j p^j, \quad a_0 = 1, \quad (17.1)$$

можна записати в еквівалентній формі, помноживши обидві його частини на p^{-n} та змінивши порядок сумування:

$$a_0 = 1, \quad b_j = 0, \quad \text{при } j > m, \quad \sum_{i=0}^n a_{n-i} p^{-i} Y(p) = \sum_{j=0}^n b_{n-j} p^{-j} X(p).$$

Перейшовши до оригіналів, отримаємо інтегральне рівняння в кратних інтегралах

$$\sum_{i=0}^n a_{n-i} \left(\int_0^t \right)^i y(t) dt^i = \sum_{j=0}^n a_{n-j} \left(\int_0^t \right)^j x(t) dt^j,$$

звідки, використовуючи залежність

$$\left(\int_0^t \right)^n f(t) dt^n = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-s)^{n-1} f(s) ds,$$

знаходимо еквівалентне інтегральне рівняння в степеневих згортках

$$a_n y(t) + \sum_{i=1}^n \frac{a_{n-1}}{(i-1)!} \int_0^t (t-s)^{i-1} y(s) ds = b_n x(t) + \sum_{j=1}^n \frac{b_{n-j}}{(j-1)!} \int_0^t (t-s)^{j-1} x(s) ds.$$

З (17.1) можна отримати третій тип інтегрального рівняння

$$y(t) = \int_0^t v(t-s)x(s) ds, \quad (17.2)$$

де $v(t)$ – вагова функція чи імпульсна перехідна характеристика об'єкту, яка несе ту ж інформацію, що й передатна функція $W(p)$.

Якщо $x(t)$ є дельта-функцією, тоді з (17.2) маємо $y(t) = v(t)$, тобто вагова функція об'єкту – його реакція на дельта-функцію. Важливою перевагою такої непараметричної моделі об'єкту є те, що вся інформація про об'єкт задається однією одномірною функцією часу і може бути безпосередньо визначена експериментально. Вираз (17.2) в залежності від того, яка функція є шуканою $y(t)$ чи $x(t)$, називають відповідно оператором чи рівнянням Вольтерри першого роду. Якщо передатна функція подана у вигляді

$$W(p) = k_B + W_i(p), \quad (17.3)$$

то їй відповідає електронна модель з двох паралельних каналів: без інерційного з коефіцієнтом передачі k_B і інерційного з передатною функцією $W_i(p)$. Для дробово-раціональних передатних функцій випадок (17.3) завжди має місце, якщо порядки поліномів чисельника та знаменника рівні (випадок ще фізично можливий, але дріб вже не правильний, тобто можливе виділення цілої частини). Перейшовши від зображень (17.3) до оригіналів, отримаємо вираз

$$y(t) = k_B x(t) + \int_0^t v_i(t-s)x(s) ds, \quad (17.4)$$

який в залежності від задачі називають оператором чи рівнянням Вольтерри другого роду.

Вагова функція $v_i(t)$ з (17.4) співпадає з ваговою функцією $v(t)$ з (17.2), а їх інтеграли – перехідні характеристики – співпадають з точністю до константи.

17.2. ПОБУДОВА ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ ЗА ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНИМИ ДАНИМИ

Розповсюдженою, а в багатьох випадках і єдино можливою, моделлю скалярного лінійного динамічного об'єкта є інтегральний оператор виду

$$y(t) = \int_{t_0}^t K(t, \tau) x(\tau) d\tau, \quad (17.5)$$

(відомий як оператор Вольтерри), де $y(t)$ та $x(t)$ вхідна та вихідна змінні, $K(t, \tau)$ – ядро оператора, що представляє вагову (апаратну, імпульсну перехідну) функцію об'єкта, t_0, t – початковий та поточний час. Динамічні властивості об'єкта визначаються видом ядра. Якщо $K(t, \tau)$ – функція двох змінних довільного вигляду, то (17.5) описує нестационарний об'єкт. Якщо $K(t, \tau) = K(t - \tau)$, то об'єкт стаціонарний. Для об'єкта із зосередженими параметрами $K(t - \tau)$ є степеневим рядом. Для об'єкта з розподіленими параметрами ядро $K(t - \tau)$ має довільний вигляд. Модель (17.5) фрагменту динамічної системи, для якої ядро може бути отримано аналітично (шляхом переходу від передатної функції або диференціального рівняння) або чисельно (шляхом обробки експериментальних даних), і є відповідною макромоделлю.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які є способи отримання інтегральних моделей із моделей, що задані в диференціальній формі?
2. Як можна отримати інтегральну модель лінійного динамічного об'єкта за експериментальними даними?

Тема 18.

ЗАГАЛЬНІ ПИТАННЯ ІДЕНТИФІКАЦІЇ СИСТЕМ

18.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ХАРАКТЕРИСТИК СИСТЕМИ

Задачу ідентифікації характеристик системи можна розглядати як дуальну (спряжену) по відношенню до задачі керування системою. Не можна керувати системою, якщо вона не ідентифікована або заздалегідь, або в процесі керування. Наприклад, ми не можемо керувати автомобілем, поки не ознайомимося з його реакцією на поворот керма, натискання акселератора або гальма, тобто поки не ознайомимося з властивостями автомобіля. Цей процес освоєння автомобіля («звикання» до нього) і є процесом ідентифікації. Таким чином, ідентифікацію реакції автомобіля ми здійснюємо і в тому випадку, коли нам невідома система диференціальних рівнянь, що його описують. У загальному випадку, якщо необхідно перевести систему зі стану A в стан B , то можна покластися або на своє вміння керувати системою, або вивчити реакції системи на одне або декілька керуючих впливів. Якщо апріорі відомо, що вплив u_j переводить систему ближче до стану B , то слід докладати саме цей вхідний вплив. У відсутності такого апріорного знання можна вимірювати реакції системи на ряд вхідних впливів, виконуючи таким чином по суті ідентифікацію. Знання результатів ідентифікації до початку процесу управління суттєво впливає на його реалізацію.

Виявлення диференціальних рівнянь процесу представляє собою одну з можливих, але не єдину форму ідентифікації. Можна, наприклад, скласти таблицю можливих керуючих впливів і відповідних їм відгуків системи в заданому інтервалі часу. З цієї таблиці можна потім легко визначити кращі (з погляду переслідуваної мети) процеси керування. Подібно до цього можуть бути сформовані ідентифікаційні моделі і на підставі інших методів опису процесів.

Жоден з обговорюваних методів ідентифікації не годиться для ідентифікації всіх видів систем. Кожен з них має свою область або області застосування. Це, однак, не означає, що на сучасному рівні ідентифікація повинна розглядатися як набір готових рецептів для різних типів систем. Зараз вже можна говорити про теорію ідентифікації, що має справу з оцінюванням параметрів на підставі виміряних поточних вхідних і вихідних даних, причому якість ідентифікації підвищується зі збільшенням числа вимірювань. Помилки ідентифікації, природно, призводять до помилок в управлінні або в необхідному вихідному параметрі системи; ці помилки можуть бути використані для подальшого поліпшення ідентифікації. Отже, теорія ідентифікації аналогічна, точніше, дуальна теорії управління, в якій помилки управління (у припущенні, що система ідентифікована) використовуються для поліпшення подальшого процесу управління. Аналогічно теорії управління в теорії ідентифікації існує кілька підходів, що застосовуються до багатьох ситуацій і випадків.

Теорія ідентифікації поширюється на випадок оцінювання параметрів пристроїв передбачення і фільтрів. Це пояснюється тісним взаємозв'язком задач передбачення та ідентифікації, оскільки ідентифікація проводиться, зазвичай, з метою полегшення передбачення поведінки ідентифікованої системи в майбутньому. Однак завдання передбачення відрізняється від задачі ідентифікації тим, що остання для передбачення поведінки в майбутньому розглядає співвідношення входів і виходів системи при заданих параметрах і вхідних впливах системи. Передбачення часових рядів засноване на аналізі виміряних значень, проте вхідні дії часто недоступні вимірюванню і повністю невідомі. Тому ідентифікація параметрів пристроїв передбачення заснована лише на використанні попередніх вимірювань сигналів, значення яких в майбутньому необхідно передбачити (і які розглядаються як вихід системи, для якої вхід недоступний вимірюванню), а скористатися даними про співвідношення входів і виходів неможливо.

18.2. КЛАСИФІКАЦІЯ МЕТОДІВ ІДЕНТИФІКАЦІЇ

Взагалі кажучи, розрізняють кілька характерних ситуацій, для яких необхідні різні методи дослідження.

По-перше, розрізняють системи лінійні і нелінійні, причому лінійні системи легше ідентифікувати, оскільки вони володіють властивостями суперпозиції.

По-друге, розрізняють системи стаціонарні та нестаціонарні (до останніх відносяться системи зі змінними в часі параметрами). Системи можуть вважатися стаціонарними, якщо їх параметри міняються повільно в порівнянні з часом, який потрібно для точної ідентифікації.

По-третє, системи часто діляться на дискретні і неперервні, хоча перетворити формулювання неперервної задачі в дискретну, зазвичай, досить просто.

Четвертий варіант класифікації розрізняє методи ідентифікації для систем з одним або декількома вхідними впливами. Цей поділ доцільно вводити тому, що методи ідентифікації значно спрощуються, якщо на систему подається лише один вхідний вплив, у порівнянні з випадком, коли на систему діє одночасно комбінація декількох збурень або вхідних впливів.

П'ятий варіант класифікації передбачає можливість ідентифікації детермінованих чи стохастичних процесів. При ідентифікації останніх орієнтуються в основному на імовірнісні уявлення про точний стан системи. (На практиці всі результати вимірювань засмічені шумом і для точної ідентифікації необхідно здійснити фільтрацію або згладжування). При ідентифікації детермінованих систем, зазвичай, передбачається, що фільтрація вже була проведена.

Шостий, і, можливо, найбільш важливий, але важко здійснений варіант класифікації – класифікація методів ідентифікації залежно від наявності апріорної інформації про систему. При класифікації систем за ознаками лінійності або стаціонарності також використовують апріорну інформацію. Ці ознаки (лінійність і стаціонарність), якщо вони заздалегідь невідомі, звичайно, можуть бути встановлені в процесі аналізу результатів вимірювань. При будь-якому методі ідентифікації дуже важли-

вим є знання розмірності вектору стану і природи внутрішніх зв'язків або нелінійностей.

В основу перерахованих способів класифікації покладено по суті ступінь складності ідентифікації. Очевидно, ідентифікувати детермінований лінійний стаціонарний процес відомого порядку з одним входом істотно простіше, ніж аналогічний стохастичний процес невідомого порядку, який може бути нелінійним і нестаціонарним.

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. В чому полягає задача ідентифікації характеристик системи?
2. Як використовується класифікація об'єктів при ідентифікації їх математичних моделей?

Тема 19.

МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ЗА ДОПОМОГОЮ СИНУСОЇДАЛЬНИХ, СТУПІНЧАСТИХ ТА ІМПУЛЬСНИХ СИГНАЛІВ

19.1. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ РІЗНИХ ТИПІВ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ

Перші реалізовані в системах управління методи ідентифікації були засновані на використанні частотних, ступінчастих і імпульсних впливів. Більшість цих методів обмежується застосуванням для лінійних процесів. Вони можуть бути також використані і в лінеаризованих системах, якщо рівні сигналів невеликі. Ці методи вимагають спеціальних вхідних сигналів, а саме східчастих сигналів для ідентифікації за перехідною функцією (ступінчастою перехідною функцією), імпульсних вхідних сигналів для ідентифікації за імпульсною перехідною функцією і синусоїдальних вхідних сигналів з різними частотами для визначення частотної характеристики. Оскільки замість вхідних сигналів, що відповідають нормальному режиму роботи, потрібні зазначені вище спеціальні сигнали, то очевидно, що ці методи припускають ідентифікацію поза процесом управління. Тому зазначені методи застосовні тільки до лінійних стаціонарних процесів, де відношення вхід / вихід, отримані для одного типу вхідних сигналів, зберігаються для всіх інших типів вхідних сигналів.

З трьох типів вхідних сигналів, про які говорилося вище, ступінчастий вхідний сигнал є найбільш простим для застосування (він відповідає, наприклад, відкриттю або закриттю вхідного клапана або включення або виключення вхідної напруги), тоді як для подачі синусоїдального вхідного сигналу потрібно формування синусоїдальних впливів і зміна частоти у відповідному діапазоні. При ідентифікації за імпульсним впливом часто виникають технічні труднощі, пов'язані з формуванням і використанням

імпульсних вхідних сигналів. Цей метод не можна застосувати до лінеаризованих систем, так як амплітуда імпульсу за визначенням не може бути малою.

19.2. МЕТОДИ ІДЕНТИФІКАЦІЇ, ЗАСНОВАНІ НА ПЕРЕТВОРЕННІ ФУР'Є

Розглянемо аперіодичну функцію часу $x(t)$. Перетворення Фур'є $X(j\omega)$ для $x(t)$ визначається співвідношенням

$$F[x(t)] \doteq X(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-j\omega t} dt. \quad (19.1)$$

Перетворення Фур'є можна застосувати до функції $x(t)$, якщо вона абсолютно інтегрована, тобто при умові

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)| dt < \infty. \quad (19.2)$$

Ця умова виключає можливість безпосереднього застосування перетворення Фур'є до таких вхідних функцій, як синусоїдальні або ступінчасті. Труднощі застосування перетворення Фур'є до синусоїдальних або ступінчастих функцій може бути подолане, якщо розглядати інтеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-\sigma t} dt < \infty$$

при деякому, навіть дуже невеликому позитивному значенні σ . Тоді $x(t)e^{-\sigma t}$ можна розглядати як $x(t)$. Використовуючи перетворення Лапласа, отримаємо

$$X(s) = L[x(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-st} dt, \quad s \doteq \sigma + j\omega. \quad (19.3)$$

Отже, ступінчастий вхідний сигнал розглядається як сходинка, що асимптотично (і дуже повільно) зменшується, а синусоїдальний вхідний сигнал – як слабо демпфований.

Тепер можна отримати перетворення Лапласа і Фур'є стаціонарних лінійних співвідношень типу вхід/вихід наступним чином. Розглянемо лінійну систему $G(s)$ (рис. 19.1), вихід якої $x(t)$ при вхідному сигналі у визначається наступним інтегральним виразом:

$$x(t) = \int_0^t y(\tau)g(t-\tau)d\tau, \quad g(t) = L^{-1}[G(s)]. \quad (19.4)$$

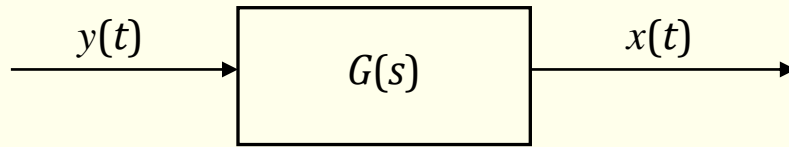


Рис. 19.1. Подання лінійної системи в параметрах вхід / вихід

(Тут $L^{-1}[\]$ – зворотне перетворення Лапласа.) Рівняння (19.4) у формі перетворення Фур'є має вигляд

$$X(j\omega) = G(j\omega)Y(j\omega). \quad (19.5)$$

Перетворення Лапласа для рівняння (13.4):

$$X(s) = G(s)Y(s) \quad (19.6)$$

де $G(j\omega)$ і $G(s)$ – передатні функції системи при використанні перетворень Фур'є і Лапласа відповідно. У рівнянні (19.5) $G(j\omega)$ можна переписати у вигляді $\alpha_\omega + j\beta_\omega = G(j\omega)$, тобто як комплексний коефіцієнт підсилення системи при вхідному сигналі з частотою ω . Отже, $\sqrt{\alpha_\omega^2 + \beta_\omega^2} = |G(j\omega)|$ є модуль коефіцієнта підсилення, $\text{arctg}(\beta/\alpha)$ – зсув фази між вихідним і вхідним сигналами, а зміна $G(j\omega)$ в залежності від ω є частотною характеристикою системи.

Отримання характеристики $G(j\omega)$ за допомогою перетворення Фур'є в разі використання східчастих або імпульсних вхідних сигналів набагато простіше, так як перетворення Фур'є для імпульсної перехідної функції рівне $G(j\omega)$, а для перехідної функції є $G(j\omega)/j\omega$ [з урахуванням міркувань, викладених після рівняння (19.2)]. Тому $G(j\omega)$ легко виходить в цифровому вираженні, якщо до перехідної і імпульсної перехідної функції застосовується цифрове перетворення Фур'є (алгоритм «швидкого перетворення Фур'є»). Крім того, з розгляду рівняння (19.5) випливає, що якщо перетворення Фур'є застосовується до кінцевого вхідного і відповідного вихідного сигналів, то характеристику $G(j\omega)$ можна визначити наступним чином:

$$G(j\omega) = \frac{X(j\omega)}{Y(j\omega)} = \frac{\text{Вихід}(j\omega)}{\text{Вхід}(j\omega)}. \quad (19.7)$$

Однак цей метод пов'язаний з чисельним перетворенням вихідного і вхідного сигналів, а значить, і з розподілом двох комплексних величин

$X(j\omega)$ і $Y(j\omega)$ при багатьох різних частотах. Тому зазначений метод досить трудомісткий, навіть якщо застосовується швидке перетворення Фур'є. Винятками є випадки, коли застосовуються ступінчасті або імпульсні вхідні сигнали, про які вже згадувалося, і випадки з зашумленими вхідними сигналами.

Використовуються методи кореляційних функцій для перетворення завдання ідентифікації в задачу ідентифікації по імпульсній перехідній функції без додатка імпульсу на вході. Це полегшує ідентифікацію в реальному масштабі часу. Очевидно, вхідні сигнали, які використовуються в методах ідентифікації з перетворенням Фур'є, повинні містити всі частоти, що представляють інтерес при аналізі характеристик системи. Якщо ступінчастий вхідний сигнал реалізується у вигляді зростаючої експоненціальної функції часу $1 - e^{-t/T}$ (рис. 19.2), то найвища частота ω , яка може бути точно ідентифікована за допомогою перетворення Фур'є, дорівнює $2\pi/T$ (в ідеальному випадку $T = 0$).

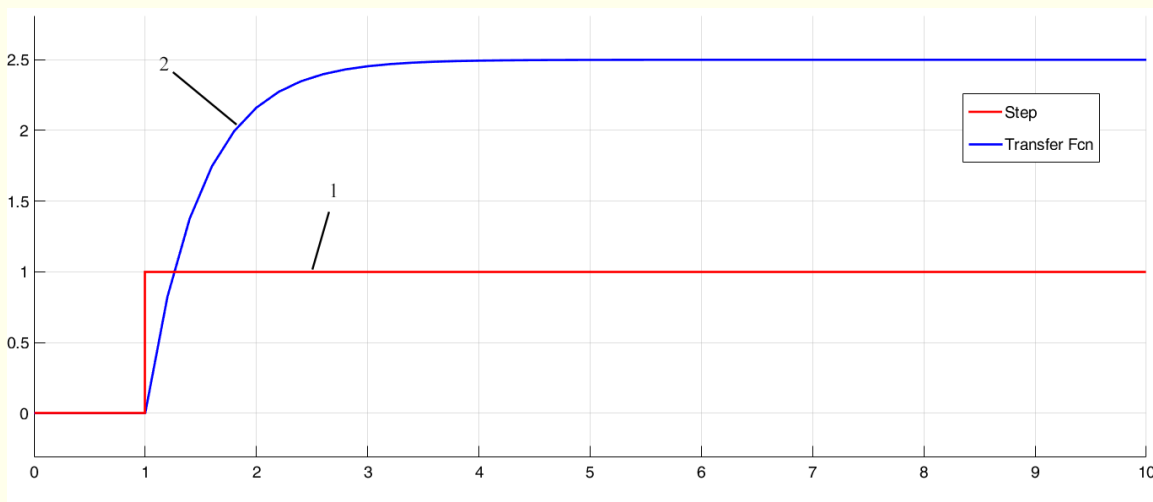


Рис. 19.2. Апроксимація ступінчастої функції зростаючою експонентою.

1 – ступінчаста функція; 2 – апроксимуюча функція

КОНТРОЛЬНІ ЗАПИТАННЯ

1. Які вхідні сигнали використовуються для ідентифікації характеристик системи?
2. Як використовується перетворення Фур'є для ідентифікації характеристик системи?

ЛІТЕРАТУРА

ОСНОВНА

1. Верлань А. Ф., Верлань А. А., Ключка К. М., Федорчук В. А. Інтегральні динамічні моделі електричних кіл: монографія. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. 172 с.
2. Дубовой В. М., Юхимчук М. С. Імітаційне моделювання в системі SCILAB/XCOS. URL: <https://web.posibnyky.vntu.edu.ua/fksa>
3. Томашевський В. М. Моделювання систем: підручник для вищих навч. закладів. Київ: Видавнича група BVH, 2005. 352 с. URL: https://pdf.lib.vntu.edu.ua/books/2016/Tomashev_2005_352.pdf
4. Федорчук В. А., Іванюк В. А., Верлань Д. А. Інтегральні рівняння в задачах математичного моделювання: навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2014. 144 с.
5. Чуйко Г. П., Дворник О. В., Яремчук О. М. Математичне моделювання систем і процесів: [навчальний посібник]. Миколаїв: Вид-во ЧДУ імені Петра Могили, 2015. 244 с. URL: <https://dSPACE.chmnu.edu.ua/jspui/bitstream.pdf>

ДОПОМІЖНА

6. Лазарев Ю. Ф. Початок програмування в середовищі Matlab: [навч. посібн.] Київ: НТУУ «КПІ», 2003. 424 с. URL: <https://elprivod.nmu.org.ua/files/mathapps.pdf>
7. М'ястковська М. О., Щирба В. С., Щирба О. В. Математичне моделювання елементів економічних систем: навч. посіб. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ ім. І. Огієнка, 2017. 82 с.
8. Федорова О. В., Смирнова І. М. Навчально-методичний посібник з дисципліни «Математичне моделювання процесів та систем механіки». Київ: Міленіум, 2017. 58 с.
9. Фельдман Л. П., Петренко А. І., Дмитрієва О. А. Чисельні методи в інформатиці. Київ: Видавнича група BVH, 2006. 480 с. URL: <http://library.kre.dp.ua/Books.pdf>
10. Чорний О. П., Луговой А. В., Сісюк Г. Ю., та ін. Моделювання електромеханічних систем: підручник. Кременчук, 2001. 376 с. URL: <https://elprivod.nmu.org.ua/files/modeling.pdf>
11. Stephen L. Campbell, Jean-Philippe Chancelier, Ramine Nikoukhah. Modeling and Simulation in Scilab/Scicos with ScicosLab 4.4. Springer Science, inc. New York, 2006. 313 p. URL: <http://www.sze.hu/~molnarka/SCILAB/book SCIALB.pdf>

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

НАВЧАЛЬНЕ ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

ФЕДОРЧУК Володимир Анатолійович,
доктор технічних наук, професор, професор
кафедри комп'ютерних наук Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

ІВАНЮК Віталій Анатолійович,
доктор технічних наук, доцент, завідувач
кафедри комп'ютерних наук Кам'янець-Подільського
національного університету імені Івана Огієнка

СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

ЕЛЕКТРОННЕ ВИДАННЯ

Підписано 31.08.2023. Формат 60x84/16. Гарнітура «Cambria».
Об'єм даних 1,96 Мб. Обл.-вид. арк. 5,2. Зам. № 1054.

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам'янець-Подільському національному
університеті імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.