

Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

**А. А. ВЕРЛАНЬ,
В. А. ФЕДОРЧУК**

**МОДЕЛЮВАННЯ КОМП'ЮТЕРНО-
ІНТЕГРОВАНИХ СИЛОВИХ
ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК**

МОНОГРАФІЯ

Кам'янець-Подільський
2023

УДК 519.6,004.942:519.876.2
ББК 22.183.4
В33

Друкується згідно з рішенням вченої ради Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 9 від 30 серпня 2023 року.

Рецензенти:

- С. А. Положаснко**, доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри комп'ютеризованих систем та програмних технологій Національного університету «Одеська політехніка»;
- О. В. Коваль**, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри інженерії програмного забезпечення в енергетиці Навчально-наукового інституту атомної та теплової енергетики Національного технічного університету України «Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»;
- В. А. Іванюк**, доктор технічних наук, доцент, завідувач кафедри комп'ютерних наук Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Верлань А. А., Федорчук В. А.

В33 Моделювання комп'ютерно-інтегрованих силових енергетичних установок: монографія. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 296 с.

ISBN 978-966-643-099-4

Розглянуто адаптаційні методи та засоби математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем (стосовно до силових енергетичних установок). Наводяться обчислювальні алгоритми та приклади розв'язування прикладних задач.

Для науковців, науково-педагогічних працівників та інженерів, які займаються моделюванням енергетичних систем, а також аспірантів та студентів відповідних технічних спеціальностей.

УДК 519.6,004.942:519.876.2
ББК 22.183.4

ISBN 978-966-643-099-4

© Верлань А. А., Федорчук В. А., 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	5
1. ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОГО І КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ КОМП'ЮТЕРНО-ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ	9
1.1. Особливості комп'ютерно-інтегрованих систем як об'єктів моделювання.....	9
1.2. Традиційні підходи до математичного моделювання динаміки силових енергетичних установок.....	17
1.3 Основні підходи до побудови методів моделювання та функціонального забезпечення об'єктів, що розглядаються.....	24
2. МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ.....	30
2.1. Основні види динамічних моделей.....	30
2.2. Методи еквівалентного перетворення скалярних динамічних моделей	40
2.3. Методи апроксимаційного перетворення динамічних моделей.....	47
3. МЕТОДИ ПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ	56
3.1. Способи спрощення математичних моделей	56
3.2. Принцип «точнісної» параметричної редукції математичних моделей	60
3.3 Основа алгоритмізації «точнісної» параметричної редукції	69
3.4 Підхід до програмної реалізації процесів редукції моделей динамічних систем	79
4. РОЗРОБКА МЕТОДУ СТРУКТУРНОГО СПРОЩЕННЯ БАЗОВИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ	83
4.1. Інтерполяційний метод (опорних перерізів) для моделювання об'єктів з розподіленими параметрами	83
4.2. Нестационарні об'єкти з несиметричними граничними умовами ..	95
4.3. Дослідження ефективності методу. Обчислювальні експерименти	106

5. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЕТАЛОННОЮ МОДЕЛЛЮ.....	118
5.1. Математичний опис адаптивної системи з еталонною моделлю	118
5.2. Метод параметричного настроювання системи.....	121
5.3. Метод сигнального настроювання системи	128
5.4. Метод комбінованого настроювання системи	132
6. МОДЕЛЬНО-ОРІЄНТОВАНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ДІАГНОСТУВАННЯ.....	138
6.1 Задачі ідентифікації і діагностики комп'ютерно-інтегрованих систем (на прикладі силових енергетичних установок).....	138
6.2. Аналіз і вибір методів ідентифікації.....	146
6.3. Процедура модельного діагностування динамічних систем... ..	157
7. ВИБІР ТА АДАПТАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ СТВОРЕННІ АЛГОРИТМІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМАХ.....	174
7.1. Адаптація обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей	174
7.2. Вибір оптимального (найкращого) алгоритму.....	188
7.3. Моделювання задач аналізу динамічних об'єктів на основі рівнянь типу Вольтерри II роду (прямі задачі).....	197
8. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ.....	209
8.1. Обґрунтування вибору середовища моделювання	209
8.2. Блок програм для перетворення динамічних моделей	213
8.3. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами	217
8.4. Програми для реалізації динамічних макромоделей	228
9. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ.....	234
9.1. Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силових установок з газовим приводом і системою керування	234
9.2. Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки.....	253
9.3. Отримання спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива.....	265
ВИСНОВКИ.....	274
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	282

ВСТУП

Однією з важливих проблем техніки є створення сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем, зокрема, розвиток сучасної енергетики шляхом розроблення нових та модернізації існуючих зразків силових енергетичних установок (СЕУ), які застосовуються як автономні енергогенеруючі та рухозабезпечуючі системи різного призначення, в тому числі у виробництві та на транспорті.

Сучасний рівень комп'ютеризації СЕУ визначається поточними задачами, які і визначають можливості і потреби в комп'ютерній техніці. До розповсюджених задач відносяться: проектування установок (при цьому широко відомий важливий недолік дорогих автоматизованих систем проектування — відсутність достатнього набору засобів модельної підтримки); обробка результатів випробувань (виконується автономними засобами); супровід результатів профілактики; реєстрація результатів вимірювань в контрольних точках при діагностиці та контролі; забезпечення процесів управління (використовуються регулятори, наприклад ПД-регулятори, які не враховують властивості об'єкта) [95]. Таким чином, клас задач, які вирішуються комп'ютеризованими засобами, є досить обмеженим і має обмежену складність, і не забезпечує вирішення задач повного спостереження і керування режимами функціонування СЕУ. Тоді як сучасні тенденції даного напрямку передбачають вирішення саме цих задач. Комп'ютерно-інтегровані системи з необхідними властивостями повинні задовольняти принципу «Full responsibility systems» (системи з повною відповідальністю) [102]. Створення таких систем з урахуванням комп'ютерно-інтегрованого виконання з властивими їм обмеженнями на ресурси вимагає вирішення нових проблем побудови математичних моделей динаміки установки, підсистем управління і діагностики, що забезпечують ефективне функціонування СЕУ [96]. Розв'язування даних проблем потребує проведення фундаментальних досліджень в області процесів моделювання, управління, діагностування, алгоритмічного і програмного

забезпечення. Задоволення вказаних вимог призводить до нагальної необхідності розробки адаптаційних методів з використанням процесів оптимізації [3, 186].

Існуючі наукові досягнення в області математичного моделювання динамічних систем, здебільшого, базуються на застосуванні апарату диференціальних рівнянь. На основі цього підходу створено та активно застосовується чимало методів і засобів комп'ютерного моделювання. Проте, такий підхід може мати деякі обмеження. Серед них можна виділити питання забезпечення стійкості обчислювального процесу при наявності значних рівнів високочастотних спектрів завад у вихідних даних, розповсюджений прояв ефекту Гіббса при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, обмежене застосування традиційних (не адаптованих) алгоритмів та ін. Для розв'язування вказаних задач необхідно, в доповнення до існуючих, створювати нові способи побудови і числової реалізації математичних моделей СЕУ. Ефективним кроком у цьому напрямку є використання інтегральних операторів та рівнянь [76]. Такий вибір обумовлений тим, що інтегральні моделі володіють низкою позитивних властивостей, зокрема високою універсальністю (структура моделі є незмінною для різних класів динамічних об'єктів, а властивості задаються однією функцією — ядром інтегрального оператора), потенційно високою адекватністю процесів моделювання, властивістю згладжування при виконанні обчислень та використанні у реальних системах із значним рівнем спектрів високочастотних завад, високою стійкістю обчислювальних процесів, можливістю ефективної побудови моделі за експериментальними даними тощо. Разом з тим, використання інтегральних моделей має ряд особливостей, врахування яких вимагає проведення низки теоретичних і практичних досліджень та розробок. Зокрема, це стосується проблеми отримання еквівалентних інтегральних моделей на основі відомої диференціальної моделі, оскільки значна частина фізичних законів записується в диференціальній формі [164].

Насичення установок вмонтованими комп'ютерними засобами дозволяє розв'язувати комплекс вказаних задач із забезпеченням інтелектуальних функцій [135]. Поява можливості вирішення складних та специфічних задач обумовлює необхідність розробки ефективних математичних та комп'ютерних моделей даного класу об'єктів. Ця обставина породжує таку вимогу до комп'ютерних моделей, як здатність роботи в реальному часі при обмежених обчислювальних ресурсах.

Отже, для розв'язування задач проектування, управління, контролю, діагностики виникає необхідність розвинення методів і засобів математичного і комп'ютерного моделювання таких систем та їх складових елементів, які здатні враховувати зазначені особливості. Аналіз публікацій у напрямку створення таких методів свідчить про існування певних тенденцій, але розв'язання проблеми в цілому не можна вважати завершеним.

До найбільш відомих центрів, які здійснюють розробки в цьому напрямку відносяться підрозділи провідних світових фірм: «Дженерал Електрик», «Сіменс», «Елекрісіте де Франс», «Вестингауз», «Бабкок», «Тошіба», «Хітачі», в Україні подібними роботами займаються у СКТБ ВАТ «Турбоатом», ДП «Івченко-Прогрес», ВАТ «Мотор-Січ», ВАТ Мінпромполітики України «Елемент», ДП НВКГ «Зоря» — «Машпроект».

Суттєвий внесок в проблему створення методів і засобів математичного моделювання процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем внесли результати праць Бублика Б. М. [6], Верляня А. Ф. [76-81], Гарашенка Ф. Г. [84], Горбаня А. В. [85], Дячука О. А. [92, 93], Жученка А. І. [98-100], Задіраки В. К. [102, 103], Іванова В. В. [104], Кветного Р. Н. [165, 175, 176], Кириченка М. Ф. [6], Клепікова В. Б. [107], Кубрака А. І. [1, 98, 99], Лозинського О. Ю. [94, 115], Мороза В. І. [112, 115, 122], Москвіної С. М. [109], Положаєнка С. А. [123], Святного В. А. [180, 181], Стахіва П. Г. [131], Хіміча О. М. [124, 141], Ali-Zade P. G. [182], Baker C. T. H. [145], Bird J. [146], Cinlar E. [150], Harvill Lawrence R. [156], Hoffman J. D. [159], Lyshevski S. E. [167], Moon F. C. [170] та ін.

Відмінною рисою технічних комп'ютерно-інтегрованих систем є різномірність елементів, що входять до складу фізичної частини, що, породжує неоднорідність у математичному описі системи, що надає відповідні особливості методів і засобів математичного моделювання, що створюються.

Таким чином, у зв'язку з інтенсивним якісним розвитком, ускладненням структур і суттєвим розширенням області застосування комп'ютерно-інтегрованих систем [135, 86, 103] актуальною є науково-технічна проблема створення адаптаційних методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання процесів їх функціонування для дослідження і забезпечення якісних показників вказаного класу систем, ефективного розв'язання задач аналізу, синтезу та побудови засобів керування і діагностики з урахуванням обмежень до інформаційних ресурсів.

Ефективне розв'язання вказаної проблеми може досягатись шляхом розширення класу математичних моделей для врахування особливостей окремих типів ланок систем, що моделюються, в тому числі із залученням інтегральних динамічних моделей і макромоделей, створення та застосування методів еквівалентних та апроксимаційних перетворень моделей, отримання та застосування швидкодіючих алгоритмів для реалізації динамічних моделей, підвищення рівня адекватності відтворення процесів як в окремих ланках, так і в цілому в системі, структурно-алгоритмічної організації програмних засобів комп'ютерного моделювання. Урахування особливостей комп'ютерно-інтегрованих систем приводить до необхідності придання методам і засобам моделювання адаптуючих можливостей.

Для розв'язання вказаної проблеми доцільним є застосування структурно-орієнтованого підходу в моделюванні, на якому традиційно ґрунтуються дослідження та інженерні розробки при створенні зразків нової техніки, та який є основою для створення нових методів математичного моделювання з використанням принципу декомпозиції, а також засобів комп'ютерного моделювання шляхом організації сучасних моделюючих програмних комплексів. Підхід дозволяє використовувати, в тому числі одночасно, різні види динамічних моделей, створювати розгалужене алгоритмічне забезпечення з можливістю розробки і застосування відповідного набору програмних модулів, використовувати опис системи, що моделюється, в природній і зручній для розробника графічній формі.

1. ПРОБЛЕМА МАТЕМАТИЧНОГО І КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ ТЕХНІЧНИХ КОМП'ЮТЕРНО- ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ

1.1. Особливості комп'ютерно-інтегрованих систем як об'єктів моделювання

Особливості сучасних комп'ютерно-інтегрованих систем доцільно розглянути на прикладах таких силових енергетичних установок як електромеханічні системи, які широко використовуються в машинобудуванні, енергетиці, при видобутку корисних копалин, в металургії, на транспорті тощо [95]. Оскільки під час функціонування електромеханічних систем спостерігається значне споживання електричної енергії, протягом багатьох років інтенсивно ведуться роботи по покращенню їх енергетичних характеристик [83]. Також актуальними залишаються задачі покращення динамічних характеристик завдяки використанню систем автоматичного керування [128, 131]. В залежності від поставленої задачі автоматизована система керування повинна забезпечувати необхідні режими функціонування електромеханічної системи з контролем швидкості, потужності, механічного моменту, частоти тощо [121]. Зараз для сучасних електромеханічних систем визначилась стійка тенденція зростання вимог щодо точності відпрацювання складних рухів виконавчих механізмів при умові збільшення швидкості їх переміщення [186]. Це стало можливим з появою потужних напівпровідникових силових перетворювачів та високоточних цифрових систем керування, які поклали початок розвитку мехатронних систем [10, 47, 89, 115, 120].

Показовою є функціональна схема електромеханічної системи мехатронного типу, що приведена на рис. 1.1. Вона включає три підсистеми: 1 — інформаційну, 2 — енергоелектронну і 3 — електромеханічну [177, 181, 182, 205].

Інформаційна підсистема містить систему керування, контролю і діагностики (СККД), набір сенсорних пристроїв (НСП), локальний інтерфейс (ЛІ) та зовнішній інтерфейс (ЗІ). *Енергоелектронна* підсис-

тема включає силовий напівпровідниковий перетворювач (СНП) і силовий блок живлення (СБЖ). Електромеханічна підсистема містить виконавчий механізм (ВМ) і електромеханічний перетворювач (ЕМП). Слід відзначити, що в деяких мехатронних системах функціональні блоки можуть відрізнятися від приведених на схемі. Так, наприклад, електромеханічний перетворювач може бути конструктивною ланкою виконавчого механізму, або в деяких мехатронних системах може бути відсутній зовнішній інтерфейс, якщо не передбачається робота в складі групи пристроїв з централізованим управлінням.

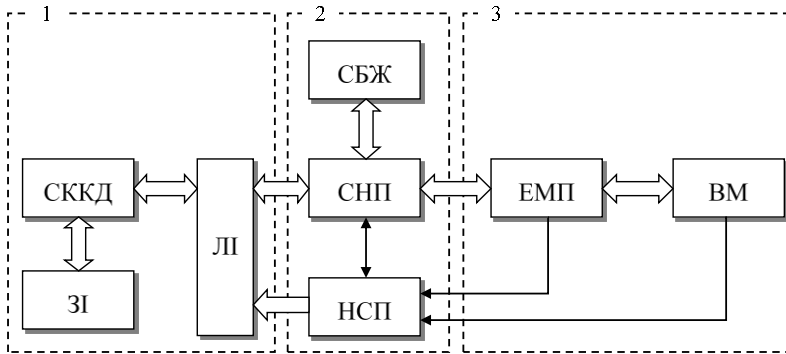


Рис. 1.1. Електромеханічна система мехатронного типу

Особливістю мехатронних систем є те, що вони охоплюють широкий клас задач завдяки універсальності комп'ютеризованих систем керування, контролю та діагностики. В залежності від особливостей виконавчого механізму (об'єкта керування) в мехатронній системі може використовуватись різний набір сенсорних пристроїв та різні алгоритми вироблення керуючих впливів. Наприклад, для керування асинхронними електродвигунами широкого розповсюдження набуває векторний метод, який передбачає використання моделі електродвигуна і виконавчого механізму (рис.1.2). Для підвищення ефективності керування складними багатоканальними та багатозв'язними об'єктами планується використання їх еталонних та прогнозних моделей (рис. 1.3). До таких моделей висуваються додаткові вимоги, зокрема здатність функціонування в режимах реального та прискореного часу, високої надійності, можливості синхронізації поточного стану моделі відносно реально діючого об'єкта тощо [42, 43].

Використання в мехатронних пристроях комп'ютеризованих систем керування дозволяє не лише підвищувати показники якості керування, але й розв'язувала комплекс задач, пов'язаних з управлінням складними системами із великою кількістю електромеханіч-

них перетворювачів. Специфіка цих задач полягає в тому, що при виробленні сигналів керування необхідно враховувати їхню взаємозв'язність через спільність об'єкта керування, який може мати складну структуру. Для розв'язування таких задач виникає необхідність створення математичних моделей багатозв'язних об'єктів керування. Ефективним підходом до побудови математичних моделей багатозв'язних динамічних об'єктів є використання математичного опису у вигляді інтегральних рівнянь та їх систем [39, 112].

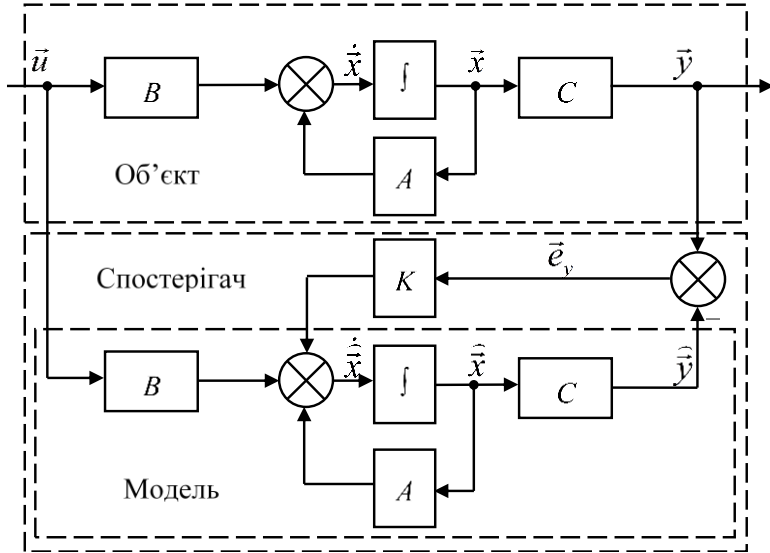


Рис. 1.2. Структура системи векторного керування

Відмінною особливістю сучасних мехатронних систем є використання принципів уніфікації, агрегування та типізації. Це дає змогу проводити конструювання мехатронної системи на основі уніфікованих блоків, які, при потребі, можуть замінюватись аналогічними типовими блоками. Така гнучкість структури мехатронної системи дозволяє оперативнo проводити в ній зміни з метою оптимізації структури для конкретного класу задач. В доповнення до структурної гнучкості, мехатронні системи володіють також програмною гнучкістю, завдяки використанню в системах керування, контролю і діагностики програмованих мікроконтролерів та мікрокомп'ютерів. Зміна алгоритмів керування в мехатронних системах, в переважній більшості випадків, проводиться шляхом зміни програмних модулів. Також позитивним напрямком для розвитку мехатронних систем є суттєве підвищення ефективності алгоритмів ке-

рування, контролю та діагностики при використанні математичних моделей об'єктів керування. При цьому, на сучасному етапі розвитку таких систем виникла необхідність створення ефективних високошвидкісних алгоритмів для моделювання динаміки різноманітних виконавчих механізмів як об'єктів керування.

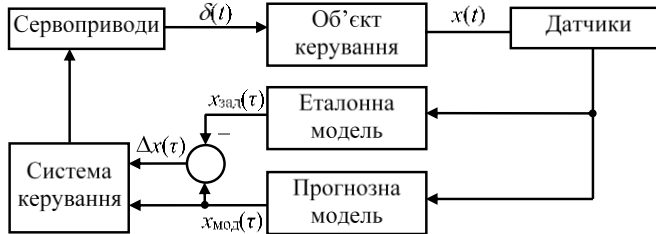


Рис. 1.3. Схема контролера з використанням еталонної та прогнозної моделей

Отже, особливості сучасних електромеханічних систем слід шукати в площині аналізу властивостей виконавчих механізмів (об'єктів керування) з метою отримання для них відповідних математичних залежностей у такому вигляді, який би давав змогу ефективно розв'язувати задачі їх моделювання.

Різноманітність способів математичного опису електромеханічних систем, доцільність комбінування різних підходів до моделювання різнотипних елементів — все це приводить до необхідності врахування специфіки математичного опису кожного елемента системи [81, 84, 108]. Так, при описі динаміки складних механічних елементів (довгих кінематичних передач, просторових рамних конструкцій і механізмів), які складаються як з однорідних так і з неоднорідних елементів (балок, стержнів, пластин, оболонок тощо) з різними типами зв'язку між собою (з'єднання через пружні і демпферні елементи, жорсткі та рухомо-шарнірні з'єднання тощо) застосування традиційного методу математичного опису (на основі різних закономірностей) викликає значні труднощі. Крім того, наявність різнотипних зв'язків та різних типів руху між елементами (поздовжнього, поперечного, крутильних коливань) також ускладнюють задачу математичного опису. Така різноманітність способів взаємодії може бути відтворена за допомогою структурних моделей, які можуть складатися з різнотипних ланок, об'єднаних в єдину блочно-структурну схему.

Істотною особливістю кінематики приводу платформи *маніпулятора для армування* є те, що в деяких точках розподілено-пружного кільцевого елемента присутні жорстко зв'язані з ним зо-

середженні маси (двигун, редуктор, платформа маніпулятора, натяжна станція). Таким чином, задача математичного опису ланки з розподіленими параметрами приводу платформи маніпулятора зводиться до пошуку передатної функції одновимірного поздовжньо-пружного замкнутого в кільце елемента, навантаженого n масами, які зосереджені в окремих його точках (рис. 1.4).

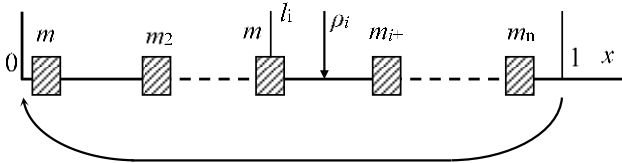


Рис. 1.4. Кільцева система з n зосередженими масами

Труднощі моделювання в цьому випадку полягають в тому, що крайова задача для одновимірного точково-неоднорідного об'єкта, як об'єкта з розподіленими параметрами (ОРП), записується у наступному вигляді [7]:

$$\begin{aligned} \rho(x) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= f(x, t); \\ u(x, 0) &= u_0(x); u(0, t) = u(l, t); \\ \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} &= u_1(x); \frac{\partial u(0, t)}{\partial x} = \frac{\partial u(l, t)}{\partial x}; \\ 0 \leq x \leq l; \rho(x) &> 0; E > 0, \end{aligned}$$

де $u(x, t)$ — зміщення точки за координатою x розподіленого об'єкта в момент часу t ; $E = \text{const}$ — лінійний модуль пружності матеріалу; $f(x, t)$ — розподілений зовнішній вплив; $u_0(x)$, $u_1(x)$ — зміщення і швидкість перерізу x розподіленого об'єкта в момент часу $t = 0$; l — довжина кільця; $\rho(x)$ — лінійна густина матеріалу об'єкта в точці x .

Маси m_j , зосереджені у точках l_j , зручно враховувати з допомогою δ -функції як нескінченні стрибки густини матеріалу стержня в точках l_j , тоді

$$\rho(x) = \rho_l + \sum_{i=1}^n m_i \delta(x - l_i), \quad \rho_l = \text{const},$$

де ρ_l — лінійна густина об'єкта, який ненавантажений масами.

Колони бурильних труб бурових установок. За останні роки у зв'язку з ростом глибини буріння особливої актуальності набула проблема автоматизації подачі долота, як у випадку створення працездатних конструкцій автоматичних регуляторів, так і у випадку розробки теоретичних питань, пов'язаних зі специфікою застосу-

вання регуляторів у бурових установках. Основним процесом під час буріння є робота долота по заглибленню стовбура свердловини. Показовою рисою систем автоматичного регулювання подачі долота є наявність колони бурильних труб, через яку здійснюється замір параметрів вибою (осьового навантаження та швидкості переміщення долота), а також передача з поверхні на забій регулюючої дії. Вплив бурильної колони проявляється в істотному спотворенні і запізненні інформації, яка отримується з вибою, і керуючої дії, яка передається у зворотному напрямку. Тому організація процесу управління подачі долота пов'язана зі значними труднощами. Підвищення продуктивності бурових установок може бути досягнуто шляхом врахування динамічних характеристик бурильної колони при передачі механічних зусиль від устя свердловини до вибою.

Спрощена структурна схема регулятора подачі долота бурових установок приведена на рис. 1.5, де 1 — колона бурильних труб; 2 — забійний двигун; 3 — долото; 4 — нерухомий кінець талевого канату; 5 — датчик навантаження; 6 — барабан лебідки; 7 — редуктор; 8 — електродвигун подачі долота; 9 — силовий перетворювач; 10 — керуючий пристрій.

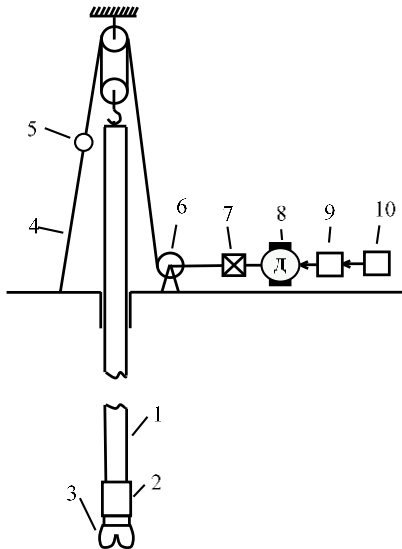


Рис. 1.5. *Спрощена схема механізму подачі долота бурової установки*

До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція вибою і реакція долота, а по довжині розподілено сили ваги, в'язкого тертя, інерції. Колону бурильних труб, із врахуванням ряду допущень, мож-

на вважати пружним однорідним стержнем з розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям. Зміщення перерізів елементів колони описуються диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + h \frac{\partial u}{\partial t} = Es \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

або при введенні позначень $a = h / (2m)$, $c = \sqrt{Es / m}$ рівнянням

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2a \frac{\partial u}{\partial t} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

де m — маса одиниці довжини колони; u — зміщення перерізу колони відносно положення рівноваги; E — модуль пружності; s — площа перерізу колони; x — координата перерізу колони; a — коефіцієнт затухання; h — коефіцієнт демпфування на одиницю довжини колони; c — швидкість розповсюдження зміщення вздовж колони. Швидкість переміщення перерізу колони

бурильних труб v і приріст сили P визначаються виразами $v = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}$,

$$P = -Es \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}.$$

При використанні наземного регулятора подачі долота керуючим впливом для колони бурильних труб є швидкість зміщення верхнього кінця колони $v_0(t)$. Гранична умова для цього кінця колони має вигляд

$$\left. \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} \right|_{x=0} = v_0(t).$$

Граничні умови для нижнього кінця колони бурильних труб мають вигляд

$$P(l, t) = -Es \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{x=l} = z v_l(t),$$

де l — довжина колони; v_l — швидкість долота; z — параметр, що визначає взаємодію долота з породою (при абсолютно твердому забої $z \rightarrow \infty$). Наведені рівняння відображають той факт, що реальні бурильні колони складаються із різних за фізичними властивостями частин, а також є системами, що розвиваються. Для забезпечення необхідної адекватності математичної моделі колони бурильних труб необхідно залучати нові підходи до її побудови, зокрема структурно-орієнтований підхід, який передбачає представлення моделі складного динамічного об'єкта у вигляді такої сукупності математичних описів, яка дає змогу врахувати особливості кожного структурного елемента при його математичному описі та числовій реалі-

зації. Можна бачити, що суттєвою є проблема побудови і числової реалізації моделей динамічних розподілених об'єктів.

Наведені приклади об'єктів моделювання свідчать про те, що суттєвими особливостями сучасних автономних силових установок, поряд із зростанням складності структур і режимів і підвищенням вимог до якості функціонування, є неоднорідність їх складу, наявність ланок з розподіленими параметрами, зміна параметрів в процесі функціонування, наявність комп'ютерних компонентів керування, контролю та діагностики. Характерною рисою керованих автономних енергетичних силових установок є різноманітність елементів, що входять до їх складу. Це, в свою чергу, породжує, зазвичай, неоднорідність у математичному описі системи. Фізична неоднорідність викликана наявністю різних за фізичною сутністю елементів (механічні, електричні, оптичні, магнітні та електромагнітні і т. д.). Функціональна неоднорідність проявляється у присутності різних за призначенням сигналів (керуючі, вимірювальні, дублюючі, допоміжні та ін.). Таким чином, сучасні автономні енергетичні силові установки відносяться до класу складних неоднорідних динамічних систем.

Вказані обставини, природно, потребують суттєвого вдосконалення існуючих методів і засобів розв'язування задач моделювання динаміки автономних силових енергетичних установок, що ґрунтуються на традиційному застосуванні диференціальних моделей, для реалізації яких в переважній більшості застосовуються розповсюджені типові програмні пакети моделювання загального призначення [104]. Відомо, що виникаючі при цьому утруднення стосуються: можливої нестійкості обчислювальних процесів, накопичення похибок та складностей, які виникають при моделюванні ланок з розподіленими параметрами; має місце висока трудомісткість процедур зміни структур комп'ютерних моделей при відображенні відповідних змін в об'єкті моделювання; дослідження систем в цілому чи окремих компонентів, в тому числі при наявності зворотних зв'язків; не використовується можливість підвищення адекватності моделей при залученні експериментальних даних.

Попередній досвід проведення досліджень і практичних розробок в галузі математичного моделювання енергетичних силових установок свідчить про те, що до ефективних шляхів розв'язання зазначених проблем відноситься розвиток та розширене застосування оптимізаційного підходу до формування алгоритмів та програмних засобів, залучення динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів та інтегральних рівнянь.

Практичне значення очікуваних результатів визначається тим, що розроблені методи та засоби моделювання повинні забезпечувати оперативне розв'язування задач дослідження, аналізу, керування,

контролю та діагностики складних динамічних об'єктів з можливістю раціонального вибору математичних описів ланок і систем в цілому та відповідних програмних модулів; отримані моделі призначаються для забезпечення високої швидкодії, точності та стійкості обчислювального процесу при їх числовій реалізації. Тим самим створюються можливості для досягнення нового рівня технічної, економічної і енергетичної ефективності силових енергетичних установок, а також їх надійності та безпеки.

1.2. Традиційні підходи до математичного моделювання динаміки силових енергетичних установок

Традиційні підходи до математичного опису задач динаміки силових енергетичних установок доцільно розглянути на прикладах об'єктів газотурбінного типу, які відносяться до розповсюдженого виду силових установок. При дослідженні динамічних характеристик газотурбінних силових установок математичні моделі являють собою системи нелінійних звичайних диференціальних і алгебраїчних рівнянь. Вони описують баланс між характеристиками елементів газотурбінної силової установки у вигляді рівнянь неперервності потоків маси, збереження енергії, зміни моменту кількості руху. В алгебраїчній формі вони визначають статичну частину моделі, а у вигляді диференціальних рівнянь — динамічну модель. Число визначальних параметрів у таких моделях залежить від схеми силової установки і ступеня її деталізації.

При побудові детальних нелінійних динамічних моделей газотурбінних силових установок необхідно здійснити аналіз нестационарних (перехідних) процесів, у тому числі в нештатних режимах їх функціонування. Хоча такі моделі можуть бути використані для аналізу роботи систем керування, однак велика кількість розрахунків, які при цьому потребуються, роблять такий підхід малопродуктивним, і звичайно для цих цілей застосовуються спрощені математичні моделі, приклади яких представлені нижче.

Моделювання динамічних процесів у газотурбінних силових установках на основі лінійних (лінеаризованих в околі робочої точки) математичних моделей. Для керованих систем у просторі станів лінійні моделі з постійними коефіцієнтами мають вигляд

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Delta x &= A \Delta x + B \Delta u, \\ y &= C \Delta x + B \Delta u, \end{aligned} \quad (1.1)$$

де Δx — вектор відхилень від стаціонарного стану (збурень) змінних стану системи, Δu — вектор відхилень керувань, y — вектор спостережень, а A , B , C і D — матриці відповідної розмірності. Аналогічний вигляд мають кусково-лінійних моделі. Згідно з традиційною практикою, моделі у вигляді рівнянь (1.1) отримуються шляхом ідентифікації. Приклади отриманих моделей наводяться нижче.

Задачі ідентифікації параметрів математичних моделей.

Нехай, виходячи з попередніх уявлень про структуру та характеристики досліджуваної динамічної системи, обрана певна форма операторного представлення її математичної моделі, зокрема у наступному загальному вигляді.

$$A(\vec{x}, \vec{u}, t | \vec{p}) = 0. \quad (1.2)$$

Тут A — оператор (диференціальний або інтегральний чи інтегро-диференціальний), $\vec{x} = \vec{x}(t) \in R^n$ — вектор стану (фазовий вектор) динамічної системи, що розглядається, $\vec{u} = \vec{u}(t) \in R^m$ — вектор управлінь (зовнішніх дій), t — час, а $\vec{p} \in R^l$ — вектор параметрів, який визначає характеристики моделі динамічної системи. Якщо компоненти вектора \vec{p} (параметри системи) не залежать від часу, то така система називається стаціонарною, в іншому ж випадку — не-стаціонарною.

Крім того, для виділення з множини розв'язків рівняння (1.2) розв'язку, який відповідає конкретним умовам, необхідно визначити початкові умови, які в загальному операторному вигляді представляються у формі

$$B(\vec{x}(0) | \vec{c}) = 0, \quad (1.3)$$

де B — оператор початкових умов, $\vec{x}(0)$ — вектор стану динамічної системи, що розглядається, у початковий (нульовий) момент часу, а $\vec{c} \in R^n$ — вектор параметрів початкових умов.

Рівняння (1.2) з умовами (1.3) визначають початкову задачу (задачу Коші) для динамічної системи. У випадку інтегрального формулювання початкової задачі початкові умови включаються безпосередньо до оператора задачі A , що є однією з переваг інтегрального метода моделювання.

Для знаходження параметрів математичної моделі динамічної системи, яка досліджується, за даними експерименту (фізичного або математичного) розв'язується наступна задача ідентифікації.

Нехай в результаті проведення певних експериментальних досліджень динамічної системи, яка розглядається, ми маємо деякий набір X_{exp} (у багатьох випадках — декілька наборів $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$) значень вектора стану динамічної системи, що розглядається, $\vec{x}_{\text{exp}} = \{\vec{x}_i(t_i)\}$, де $t_i, i = \overline{1, M}$ — дискретні значення часу, в яких фіксувались значення вектора \vec{x} (часові ряди).

Для (наближеного) визначення за \vec{x}_{exp} невідомих компонент вектора параметрів \vec{p} математичної моделі динамічної системи і, якщо потрібно, параметрів початкових умов \vec{c} , необхідно розв'язати задачу параметричної ідентифікації, яка за своєю суттю, взагалі кажучи, є задачею операторної апроксимації часових рядів, які у даному випадку представляють експериментальні дані \vec{x}_{exp} .

Таким чином, нехай ми маємо операторне рівняння (1.2) з початковими умовами (1.3), а також множину наборів експериментальних даних $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$. Для визначення невідомих компонент $\{p_i^u\}$ вектора параметрів \vec{p} моделі динамічної системи і, при необхідності, невідомих компонент $\{c_i^u\}$ вектора параметрів початкових умов \vec{c} необхідно (у явному чи неявному вигляді) розв'язати наступну задачу мінімізації на множині невідомих параметрів $\{\{p_i^u\}_{i=1}^r \cdot \{c_i^u\}_{j=1}^s\}$ деякого функціонала, в загальному вигляді монотонно (не обов'язково лінійно) зв'язаного з відстанню в деякому метричному просторі F між обчисленими за математичною моделлю динамічної системи, яка ідентифікується, і часовими рядами з множини наборів експериментальних даних $\{X_{\text{exp } j}\}_{j=1}^k$:

$$\arg \min_{\{\{p_i^u\}_{i=1}^r, [c_j^u]_{j=1}^s\}} \Phi \left[\left\{ d \left(\vec{x}_{\text{comp } j}(t_i), \vec{x}_{\text{exp } j}(t_j) \right) \right\}_{j=1}^k \right], i = \overline{1, M}. \quad (1.4)$$

Розглянемо цю задачу на прикладі ідентифікації параметрів нелінійної моделі компресорної секції ГТСУ. Структурна схема моделі компресора наведена на рис. 1.6, де $L_{\text{comp}}, L_{\text{thr}}, L_{\text{bl}}$ — довжина компресора, дроселя і перепускного каналу [м], $V_{\text{pl}}, T_{\text{pl}}, p_{\text{pl}}$ — об'єм [м³], температура [К] і тиск [Па] у камері тиску.

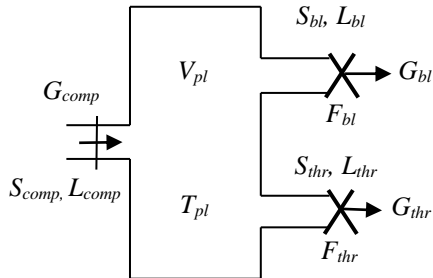


Рис. 1.6. Структура базової моделі компресора

В результаті ідентифікації отримано, що динамічні процеси в системі компресорної секції («компресор-камера тиску») описуються базовою системою нелінійних звичайних диференціальних рівнянь четвертого порядку

$$\begin{aligned} \frac{dG_{comp}}{dt} &= \frac{S_{comp}}{L_{comp}} (\Delta p_{compSS} - p_{pl} + p_{in}), \\ \frac{dG_{thr}}{dt} &= \frac{S_{thr}}{L_{thr}} (p_{pl} - p_{out} - \Delta p_{thr}), \\ \frac{dG_{bl}}{dt} &= \frac{S_{bl}}{L_{bl}} (p_{pl} - p_{out} - \Delta p_{bl}), \\ \frac{dp_{pl}}{dt} &= \frac{\gamma RT_{pl}}{V_{pl}} (G_{comp} - G_{thr} - G_{bl}), \end{aligned} \quad (1.5)$$

де G_{comp} , G_{thr} , G_{bl} — масові потоки через компресор, дросель і перепускний канал [кг/с]; S_{comp} , S_{thr} , S_{bl} — площі перерізів компресора, дроселя і перепускного каналу [м²]; Δp_{compSS} — стаціонарне підвищення тиску відповідно до статичних робочих характеристик компресора [Па]; Δp_{thr} , Δp_{bl} — падіння тиску на клапані дроселя і перепускному клапані [Па]; p_{out} — тиск на виході [Па]; η_{comp} — ККД компресора [б/р]; γ — відношення теплоємностей c_p/c_v [б/р].

Величина підвищення тиску на компресорі

$$\Delta p_{compSS} = \Delta p_{compSS} (G_{comp}) \quad (1.6)$$

визначається за його статичними характеристиками, а падіння тиску у дросельному і перепускному клапанах — за формулами

$$\Delta p_{thr} = \frac{G_{thr}^2}{2\rho S_{thr}^2}, \quad \Delta p_{bl} = \frac{G_{bl}^2}{2\rho S_{bl}^2}, \quad (1.7)$$

де ρ — густина повітря (при атмосферних умовах) [кг/м³]. У багатьох випадках можна вважати, що $p_{out} = p_{in}$.

Ступінь зростання температури у камері тиску (відносно підвищення температури) при цьому обчислюється у вигляді

$$\theta_{pl} = \frac{T_{pl}}{T_{in}} = \left(\frac{p_{pl}}{p_{in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma M_{comp}}}, \quad (1.8)$$

а

$$a_{pl} = \sqrt{\gamma R T_{pl}}. \quad (1.9)$$

являє собою швидкість звуку в ній. Тут R — газова постійна [дж/(кг К)].

В результаті ідентифікації у даному випадку оператор у рівнянні (1.2) абстрактної математичної моделі конкретизується у вигляді системи чотирьох ЗДР першого порядку, а параметри системи — площі перерізів компресора, дроселя та перепускного каналу, їх довжини та об'єм камери тиску, котрі можуть бути ідентифіковані, складають вектор

$$\vec{p} = [s_{comp}, S_{thr}, S_{bl}, L_{comp}, L_{thr}, L_{bl}, V_{pl}]. \quad (1.10)$$

При здійсненні ідентифікації шляхом розв'язання задачі мінімізації (1.3) цільовий функціонал Φ , який характеризує відстань між обчисленим розв'язком та експериментальними даними, найчастіше вибирається у вигляді суми квадратів відхилень (тобто квадрату евклідової норми), хоча у деяких випадках застосовуються також зважені квадратичні суми і навіть більш складні функціональні залежності. При цьому ідентифікація може здійснюватись як за повним набором параметрів, так і за неповним, якщо частина їх відома, наприклад, за результатами досліджень окремих складових досліджуваної системи (експериментальних чи ідентифікаційних). Попередня тестова ідентифікація для оцінки можливої точності ідентифікації параметрів та характеристик методу ідентифікації, який застосовується, може здійснюватись за даними комп'ютерного моделювання з додаванням шуму різного рівня.

При параметричній ідентифікації нелінійної моделі газотурбінної силової установки в цілому, в математичній моделі (рис. 1.7) до розгляду, крім компресора та камери тиску, включені камера згоряння і газова турбіна.

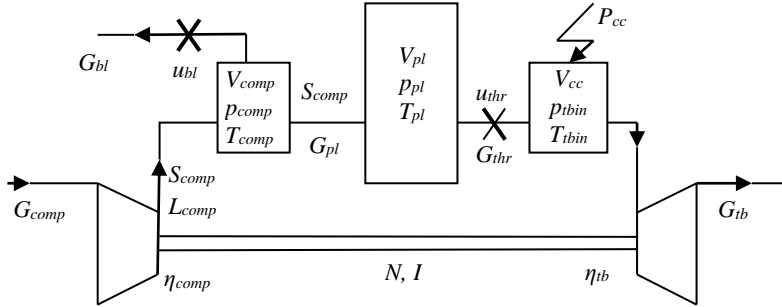


Рис. 1.7. Структура моделі газотурбінної силової установки в цілому

Повна система нелінійних диференціальних і алгебраїчних рівнянь, що описують динаміку турбіни, при цьому має наступний вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dp_{comp}}{dt} &= \frac{\gamma R}{V_{comp}} \left[G_{comp} T_{cpout} - (G_{pl} + G_{bl}) T_{comp} \right], \\ \frac{dT_{comp}}{dt} &= \frac{RT_{comp}}{P_{comp} V_{comp}} \left[\gamma \left(G_{comp} T_{cpout} - (G_{pl} + G_{bl}) T_{comp} \right) - \right. \\ &\quad \left. - T_{comp} \left(G_{comp} - (G_{pl} + G_{bl}) \right) \right], \\ \frac{dp_{tbin}}{dt} &= \frac{\gamma_T R_T}{V_{cc}} \left[G_{thr} T_{ccin} \frac{c_{pcomp}}{c_{pT}} - G_{tb} T_{tbin} + \frac{P_{cc}(uf)}{c_{pT}} \right], \\ \frac{dT_{tbin}}{dt} &= \frac{R_T T_{tbin}}{P_{tbin} V_{cc}} \left[\gamma_T \left(G_{thr} T_{ccin} \frac{c_{pcomp}}{c_{pT}} - G_{tb} T_{tbin} + \frac{P_{cc}(uf)}{c_{pT}} \right) - \right. \\ &\quad \left. - T_{tbin} (G_{thr} - G_{tb}) \right], \\ \frac{dN}{dt} &= \left[G_{tb} c_{pT} (T_{tbin} - T_{tbout}) - G_{comp} c_{pcomp} (T_{cpout} - T_{in}) \right] \frac{1}{NI}, \quad (1.11) \end{aligned}$$

де індексом *cpout* позначено величини на виході компресора, *comp* — величини у камері компресора, індекси *tbin*, *tbout* позначають величини на вході і виході турбіни, P_{cc} — потужність, що подається до камери згоряння, об'єм якої V_{cc} , при спалюванні палива, I — параметр, що визначає момент інерції ротора ГТУ, а індексом T позначено параметри газу у камері згоряння, $G_{comp} = f_{comp}(N, p_{comp}, p_{in}, T_{in})$ — залежність масового розходу повітря через компресор від швидкості

обертання та інших параметрів, $G_{bl} = f_{bl}(u_{bl}, p_{comp}, T_{comp}, p_{in})$ — залежність масового розходу повітря через перепускний канал від положення регулятора перепускного клапана u_{bl} та інших параметрів,

$G_{pl} = \sqrt{\frac{2p_{comp}S_{comp}^2(p_{comp} - p_{pl})}{\xi RT_{comp}}}$ — масовий розхід повітря, що над-

ходить до камери тиску (ξ — поправочний коефіцієнт),

$G_{thr} = f_{thr}(u_{thr}, p_{comp}, T_{comp}, p_{in})$ — залежність масового розходу повітря через дросельний клапан на вході до камери згоряння перепускний канал від положення його регулятора u_{thr} та інших параметрів,

$G_{tb} = f_{tb}(p_{tbin}, T_{tbin}, p_{tbout})$ — розхід газу в турбіні, а

$$\begin{aligned} T_{cpout} &= T_{in} \left(\frac{p_{comp}}{p_{in}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma\eta_{comp}}}, \\ T_{plin} &= T_{comp} \left(\frac{p_{pl}}{p_{comp}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\ T_{ccin} &= T_{pl} \left(\frac{p_{tbin}}{p_{pl}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}, \\ T_{tbout} &= T_{tbin} \left(\frac{p_{tbout}}{p_{tbin}} \right)^{\frac{(\gamma_T-1)\eta_{tb}}{\gamma_T}}, \\ p_{cc} &= e^{13,421718 - \frac{0,756721}{\sqrt{u_f}}}, \end{aligned} \quad (1.12)$$

u_f — положення регулятора подачі палива до камери згоряння.

В даному випадку математична модель являє собою систему диференціальних рівнянь першого порядку, а параметри системи, які можуть бути ідентифіковані — площа перерізу, довжину та об'єм компресора об'єм камери тиску і камери згоряння, а також характеристику обертвої інерції ротора — складають вектор

$$\vec{p} = [S_{comp}, L_{comp}, V_{comp}, V_{pl}, V_{cc}, I]. \quad (1.14)$$

Таким чином, наведені приклади свідчать, що традиційні підходи до побудови динамічних моделей об'єктів, що розглядаються в роботі, базуються на отриманні моделей у вигляді звичайних диференціальних рівнянь.

1.3 Основні підходи до побудови методів моделювання та функціонального забезпечення об'єктів, що розглядаються

Моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах.

Інтенсивний розвиток комп'ютерних і комп'ютеризованих засобів обробки інформації в сучасних технічних системах характеризується постійно зростаючою складністю їх структур і режимів, підвищенням вимог до якості функціонування (швидкодія, точність, надійність, економічність тощо). Ці чинники викликають нові вимоги до методів і засобів математичного моделювання динамічних процесів у вказаних системах. Але особливості комп'ютерно-інтегрованих систем, що мають у своєму складі фізичні об'єкти, приклади яких розглянуті вище (п.1.2), потребують додаткових якостей методів математичного і комп'ютерного моделювання. Це викликано, головним чином, обмеженими часовими та апаратними ресурсами, які обумовлені вимогами до засобів інформаційного забезпечення процесів функціонування відповідних об'єктів (силових енергетичних установок) у реальному часі. При цьому необхідно враховувати, що сучасні методи організації комп'ютерно-інтегрованих систем передбачають, що засоби інформаційної підтримки забезпечують відпрацювання режимів з "повною відповідальністю". Тобто, передбачається виконання процесів керування, діагностики і контролю технічних об'єктів. Саме ці задачі повинні розв'язуватись в комп'ютерній частині систем [141].

Відмічені обставини повинні відобразитися в методах і засобах математичного і комп'ютерного моделювання, що розробляються та досліджуються в даній роботі. Це в свою чергу потребує певного розвитку методології моделювання вказаного класу систем. Згідно з аналізом публікацій у даному напрямку досліджень і розробок методики моделювання базуються, головним чином, на використанні динамічних моделей фізичної (технічної) частини систем у вигляді диференціальних рівнянь, що отримуються за допомогою відповідних фізичних закономірностей. Алгоритмічне забезпечення комп'ютерної частини будується на основі застосування чисельних методів розв'язування диференціальних рівнянь. Таким чином, пошук можливостей для покращення існуючих методик моделювання пов'язаний з необхідністю вирішення задач побудови динамічних моделей процесів в фізичній частині комп'ютерно-інтегрованої системи, вибору та удосконаленні методів побудови підсистеми керування та діагностики (контролю), а також розробки відповідних чи-

сельних алгоритмів для реалізації математичних моделей та розробки необхідних прикладних засобів. При цьому необхідно враховувати, що як математичні моделі так і алгоритми повинні мати можливість для врахування вимог до комп'ютерно-інтегрованих систем.

Напрямки удосконалення процесів вибору форми та побудови конкретної структури математичної моделі фізичної частини комп'ютерно-інтегрованої системи. Широке застосування диференціальних рівнянь у задачах динаміки цілком виправдано історично (Ньютон, Лейбніц, XVII ст.). До теперішнього часу глибоко розвинута теорія цього класу динамічних моделей, а також розроблено багато діючих програмних засобів для їх числової реалізації. Але кількість і складність практичних задач неперервно і неухильно збільшується, що потребує також цього напрямку математичного моделювання. Зокрема мають місце такі фактори як складність і трудомісткість алгоритмів розв'язування рівнянь у частинних похідних; у зв'язку з певною неточністю (грубістю) вихідних даних в інженерно-технічних задачах є можливість і доцільність спрощення базових моделей, отриманих на основі фізичних закономірностей (які до речі, не завжди можуть бути отримані у зв'язку із суттєвою фізичною неоднорідністю технічних об'єктів); при чисельному розв'язанні багатьох задач має місце ефект Гіббса, тобто суттєва неточність результатів; не завжди забезпечується стійкість обчислювальних процесів, особливо при розв'язуванні обернених задач динаміки.

Відмічені обставини обґрунтовують доцільність такої якості методів математичного моделювання, як альтернативність форм динамічних моделей, згідно з якою один і той же об'єкт може бути описаний різними формами математичних моделей, аналітично еквівалентних чи не еквівалентних (наближених) між собою. Для цього достатньо, щоб конкретна модель мала необхідний рівень адекватності, тобто з необхідною (заданою) точністю відповідала даним експеримента і поставленій прикладній цілі, тобто допускала можливість її практичного використання. Сучасні комп'ютерні технології забезпечують генерування та порівняння різних варіантів моделей що дозволяє створювати нові методи побудови і чисельної реалізації математичних моделей [163].

Досвід свідчить, що ефективним підходом є використання певних видів інтегральних операторів і рівнянь, що мають ряд таких позитивних властивостей: універсальність, яка полягає в тому, що на відміну від диференціальних рівнянь, структура інтегральної моделі є незмінною для різних класів динамічних об'єктів, а властивість моделі задається однією функцією, тобто ядром інтегрального

оператора (ще, до речі, означає, що дані моделі є непараметричними); властивість згладжування при чисельній реалізації і обробці сигналів з шумами, а також висока збіжність інтегральних процесів, можливість отримання моделей, зокрема макромоделей, безпосередньо за експериментальними даними [157]. Слід відзначити, що інтегральні рівняння, як розділ прикладної математики і як динамічні моделі почали свій розвиток значно пізніше ніж диференціальні (Вольтерра, ХХ ст.)

Підсистема керування. При моделюванні процесів в підсистемі керування [114] основними задачами, що розв'язуються при цьому, є аналіз заданої системи з метою визначення характерних реакцій на дії і перешкоди; керування, яке полягає в знаходженні керуючого сигналу, в результаті впливу якого на досліджувану систему її реакція відповідає вимогам, що пред'являються до якості процесу керування [5, 86, 87].

Методи розв'язання вказаних задач істотно залежать від того, якого роду математичний опис процесу управління використовується. У класичній теорії автоматичного регулювання математичною моделлю системи є звичайне диференціальне рівняння, що залежить від похідних вхідного і вихідного сигналів певних порядків. Якщо досліджувана система лінійна і стаціонарна, то для розробки найбільш раціональних методів розв'язання основних задач теорії керування вводяться також і інші еквівалентні способи опису, засновані на використанні передатних функцій, частотних і часових характеристик. Для математичного опису лінійних систем зі змінними параметрами використовуються або параметричні моделі у вигляді диференціальних рівнянь зі змінними коефіцієнтами, або все частіше непараметричні моделі. Причиною підвищеного інтересу до пошуку математичних моделей, адекватних розв'язуванню в теорії керованих систем задачам, є широке впровадження в практику процесів управління об'єктів з розподіленими параметрами, коли є необхідність побудови такої математичної моделі керованого процесу, яка дозволила б із єдиних позицій ефективно розв'язувати основні задачі теорії керування всіх можливих класів неперервних систем. В якості математичних описів у багатьох випадках доцільно використовувати інтегральні рівняння, що в багатьох випадках дозволяє будувати стійкі методи розрахунку вихідних сигналів, спрощення математичних моделей, аналізу основних типів з'єднань ланок і перевірки стійкості системи. Тобто, є важливі підстави для ефективного використання інтегрального підходу при розв'язанні проблем, що мають істотне значення для теорії і практики керування.

Одним із перспективних напрямків розвитку методів організації систем керування є їх побудова з використанням моделі об'єкту, що керується, тобто еталонної моделі. Застосування такого підходу, хоча і потребує проведення додаткових досліджень, дає можливість максимально враховувати характеристики об'єкта керування, спростити задачу синтезу безпосередньо регулятора, використати алгоритми та програмні засоби моделювання об'єкту. Подібний підхід по суті наділяє систему керування адаптивними властивостями, забезпечує універсальність і спрощення задачі синтезу, можливість досягнення необхідної якості процесу керування в умовах зміни характеристик об'єкта керування. Разом з тим, при застосуванні відомих методів синтезу систем керування, пов'язаних з досягненням умов стійкості, отримуються складні структури, що потребує розробки певних удосконалень.

Підсистема діагностування. Існуючі методи та засоби діагностування технічних об'єктів в більшості випадків будуються на оцінюванні стану об'єкту за результатами вимірювання деяких значень внутрішніх сигналів (змінних процесу) у контрольних точках. Даний підхід потребує значної кількості таких точок, що достатньо складно забезпечити, особливо у випадках сучасних об'єктів діагностування, що характеризуються значною складністю. Крім того, в багатьох випадках доступ до необхідних контрольних точок взагалі неможливий.

Виходячи з такої ситуації, в роботі розглядається підхід, заснований на розвитку єдиної модельно-орієнтованої теорії діагностування широкого класу об'єктів, особливо при обмеженому доступі до їх внутрішніх елементів, з можливістю охоплення значної групи допустимих несправностей. Звичайно елементам (фрагментом) моделі об'єкта можна поставити у відповідність його конструктивні елементи, що дозволяє задачу визначення місця дефекту звести до задачі визначення місця зміни моделі об'єкта. Можна вибачити, що така постановка задачі діагностування схожа до задачі ідентифікації, але відмінна в тому, що при ідентифікації необхідно визначити модель об'єкта, а при діагностуванні — відхилення моделі від деякого еталону, тобто моделі справжнього об'єкта. Розглянуті принципи положення дають загальний підхід до побудови алгоритмів діагностування об'єктів вхідним і вихідним сигналам.

Алгоритмічне і програмне забезпечення. Створення алгоритмів та розробка програмних засобів [200] призначені для забезпечення необхідних обчислювальних експериментів при побудові відзначених вище методів математичного моделювання. Зокрема, необхідно

передбачити створення алгоритмів, що супроводжують методи побудови математичних моделей і їх чисельної реалізації. При цьому можуть бути використані уже відомі обчислювальні схеми і програмні засоби для реалізації моделей у вигляді диференціальних рівнянь. Але є необхідність у виконанні нових розробок стосовно до проведення обчислювальних експериментів при отриманні і реалізації інтегральних динамічних моделей.

В цілому, з урахуванням сумісності наукового та інженерно-технічного характеру досліджень в розробках методів моделювання, доцільне застосування структурного підходу при створенні засобів алгоритмічного і програмного забезпечення [144].

Оскільки при числовій реалізації математичної моделі задача зводиться до числової реалізації окремих структурних елементів моделі, які, в свою чергу, отримано на основі базової множини математичних моделей підсистем, тоді є сенс в розробці для кожного елемента базової множини алгоритмів його числової реалізації [202]. В результаті отримуємо базову множину алгоритмів для числової реалізації моделей підсистем, що дає можливість синтезу моделей складних систем із певного базового набору скалярних моделей-алгоритмів. При цьому важливою задачею є забезпечення алгоритмічної сумісності програмних модулів незалежно від методів їх внутрішньої алгоритмічної реалізації [212].

Що до задач побудови програмних засобів, то слід враховувати, що при математичному моделюванні доцільним є використання пакетів прикладних програм, які є цілісними програмними продуктами і забезпечують необхідну функціональність. З огляду на доступність пакетів прикладних програм і результатів проведення тестів, можна зробити висновок, що найбільш прийнятними пакетами для чисельного аналізу є MATLAB, Mathematica і MathCAD. Однак, жоден з відомих і проаналізованих пакетів не містить вбудованих можливостей для реалізації інтегральних операторів та розв'язання інтегральних рівнянь. По набору функцій, необхідних для чисельної реалізації інтегральних динамічних моделей, найбільш потужним прикладним пакетом є MATLAB, основними відмінними рисами якого є наступні: модульна структура пакету дозволяє нарощувати його потужність шляхом включення нових програмних модулів, в тому числі програм користувача; внутрішня мова пакету дозволяє здійснювати операції у векторно-матричній формі; можливість викликати підпрограми, написані на C і Фортран, як вбудовані функції MATLAB.

Отже, аналіз сучасного стану розвитку електромеханічних систем показує зростання їх рівня складності. Від систем з простими аналоговими регуляторами електромеханічні системи розвинулись

до сучасних мехатронних систем з комп'ютерним керуванням та використанням імпульсних силових перетворювачів і, як наслідок, з новими можливостями, зокрема, гнучкістю алгоритмів функціонування, забезпеченням віддаленого контролю і керування, можливістю роботи у складі робототехнічних комплексів тощо. Такі особливості вимагають подальшого розвитку як самої методології автоматичного керування, так і методів числової реалізації математичних моделей сучасних електромеханічних систем.

Нові задачі, пов'язані з розширенням сфери застосування електромеханічних систем, обумовлюють необхідність підвищення вимог щодо їх точності та надійності, покращення динамічних характеристик, наявності функцій контролю та діагностики під час функціонування, розширення функцій керування, зокрема забезпечення адаптивного та інтелектуального керування. Для зниження металомісткості обладнання шляхом зниження вимог до характеристик механічної частини виникають задачі удосконалення функцій керування (компенсація системами керування шкідливих резонансних та нелінійних проявів, вібрацій, автоколивань тощо).

Наявність у складі електромеханічних систем різнотипних елементів (електричних, магнітних, електромагнітних, електронних, механічних, одномірних та багатомірних, лінійних та нелінійних, із зосередженими та розподіленими параметрами та ін.), різного роду зв'язків між ними (пружні, гідравлічні, пневматичні, електричні та ін.) породжує їх суттєву неоднорідність. Врахування особливостей різнорідних елементів із збереженням комплексного підходу до моделювання системи в цілому можливе за умови її декомпозиції з отриманням ланок, які об'єднуються в певну структуру (граф-топологічну схему), яка є джерелом додаткової інформації при знаходженні розв'язків.

Складність та неоднорідність сучасних електромеханічних систем, що досліджуються, вимагає розробки нових підходів до організації процесу моделювання. В основу методики моделювання електромеханічних систем доцільно покласти структурно-орієнтований підхід, який дозволяє максимально враховувати їх особливості та надати розробнику можливість вибору способу математичного подання та числової реалізації компонент структурної моделі.

Існуючі досягнення в області математичного моделювання динамічних систем базуються, здебільшого, на застосуванні апарату диференціальних рівнянь, простору станів та передатних функцій, які мають певну область ефективного застосування. В інших областях, зокрема при моделюванні об'єктів з розподіленими параметрами, дискретних та імпульсних елементів, доцільно застосування інших підходів, а саме — застосування інтегральних моделей.

2. МЕТОДИ ФОРМУВАННЯ ДИНАМІЧНИХ МОДЕЛЕЙ КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНИХ СИСТЕМ

2.1. Основні види динамічних моделей

При розв'язуванні практичних задач моделювання комп'ютерно інтегрованих систем доводиться шукати компроміс між складністю отриманої математичної моделі та необхідною точністю [137, 194]. При цьому вибір моделі може вестися в рамках одного виду рівнянь, або шляхом порівняння моделей, які належать різним видам рівнянь [107, 151, 191]. Математичний опис таких систем базується, головним чином, на скалярних динамічних моделях [1, 134].

Для отримання математичної моделі в цілому прийнято здійснювати математичний опис динамічної системи як сукупності окремих ланок [90]. Класичною моделлю, що зв'язує вхід і вихід лінійної динамічної системи зі змінними зосередженими параметрами, є система диференціальних рівнянь кінцевого порядку k :

$$\begin{aligned} a_k(t)y^{(k)}(t) + a_{k-1}(t)y^{(k-1)}(t) + \dots + a_0(t)y(t) = \\ = b_l(t)x^{(l)}(t) + b_{l-1}(t)x^{(l-1)}(t) + \dots + b_0(t)x(t), \end{aligned} \quad (2.1)$$

де набори $\{a_k(t), a_{k-1}(t), \dots, a_0(t)\}$ і $\{b_l(t), b_{l-1}(t), \dots, b_0(t)\}$ складаються з матриць розмірності $n \times n$ і $n \times m$ відповідно. Будемо вважати, що вхідний сигнал і коефіцієнти системи рівнянь (2.1) такі, що вона має єдиний розв'язок при заданих початкових умовах

$$y(t_0) = y_0, \quad y^{(1)}(t_0) = y_0^{(1)}, \dots, y^{(k-1)}(t_0) = y_0^{(k-1)},$$

а вхідний сигнал має достатню гладкість для справедливості подальших перетворень [120, 126, 136]. Припустимо також, що система (2.1) фізично реалізується, тобто $l \leq k$. Для зручності надалі не розрізнятимемо скалярний і векторний випадки, якщо це не зазначено окремо. Тому, говорячи про коефіцієнти виразів (2.1), маємо на увазі як скалярні величини так і матриці відповідної розмірності.

Широке застосування в теорії керування знайшли методи простору станів [139, 140]. У випадку лінійної неперервної системи зі змінними використовується наступна математична модель [146, 172]:

$$\left. \begin{aligned} \dot{y}(t) &= A(t)y(t) + B(t)x(t) \\ z(t) &= C(t)y(t) + D(t)x(t) \end{aligned} \right\}, \quad (2.2)$$

де $y(t)$ — вектор стану; $x(t)$ — вектор керування; $z(t)$ — вектор виходу; $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$, $D(t)$ — відомі матриці відповідної розмірності.

Рівняння (2.1) завжди може бути записане у вигляді (2.2), у той час як зворотний перехід можливий лише при певних обмеженнях, які накладаються на параметри системи (2.2).

Іншою формою математичного опису лінійних систем, яка часто застосовується завдяки поширенню частотних методів аналізу та синтезу систем управління, є опис за допомогою передатних функцій виду [170]:

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}, \quad (2.3)$$

де Y — зображення вихідної змінної $y(t)$; X — зображення вхідного впливу $x(t)$; s — комплексна змінна Лапласа.

Для скалярних лінійних стаціонарних динамічних об'єктів із зосередженими параметрами математична модель (2.3) має вигляд дробово-раціональної передатної функції

$$W(s) = \frac{\sum_{j=0}^m b_j s^j}{\sum_{i=0}^n a_i s^i}, \quad a_0 = 1, \quad n \geq m, \quad (2.4)$$

де a_i , b_j — дійсні сталі коефіцієнти.

Якщо прийняти $s = j\omega$, то отримаємо амплітудно-фазову характеристику

$$H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)} = \frac{b_m(j\omega)^m + b_{m-1}(j\omega)^{m-1} + \dots + b_1(j\omega) + b_0}{a_n(j\omega)^n + a_{n-1}(j\omega)^{n-1} + \dots + a_1(j\omega) + a_0}, \quad (2.5)$$

яка може бути записана в алгебраїчній або показниковій формі як:

$$H(j\omega) = \operatorname{Re}[H(j\omega)] + \operatorname{Im}[H(j\omega)] = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)},$$

де $A(\omega) = \sqrt{\operatorname{Re}[H(j\omega)]^2 + \operatorname{Im}[H(j\omega)]^2}$ — амплітудно-частотна характеристика,

$\varphi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[H(j\omega)]}{\operatorname{Re}[H(j\omega)]}$ — фазочастотна характеристика.

Чисельник і знаменник передатної функції (2.4) є поліномами змінної s . Корені полінома чисельника перетворюють вираз в нуль, тому їх називають нулями (Zero), а корені полінома знаменника пе-

ретворюють вираз в нескінченність і називаються полюсами (Pole) передатної функції. Передатна функція, записана при використанні нулів (z) і полюсів (p), подається у вигляді:

$$W(s) = K \frac{(s - z_m)(s - z_{m-1}) \cdots (s - z_1)}{(s - p_n)(s - p_{n-1}) \cdots (s - p_1)}, \quad (2.6)$$

де K — коефіцієнт підсилення. При описі дискретних (цифрових) систем використовують дискретну z -передатну функцію

$$D(z) = \frac{x[nT]}{u[nT]} = \frac{A_0 + A_1 z^{-1} + A_2 z^{-2} + \cdots + A_k z^{-k}}{B_0 + B_1 z^{-1} + B_2 z^{-2} + \cdots + B_l z^{-l}}. \quad (2.7)$$

Використавши властивість, що добуток двох функцій-зображень в просторі Лапласа відповідає згортка їхніх оригіналів в часовому просторі, з (2.4) отримаємо інтегральну модель [76]:

$$y(t) = \int_0^t v(t-s)x(s)ds, \quad (2.8)$$

де $v(t)$ — вагова функція (імпульсна перехідна характеристика) об'єкта.

Фізичні теорії складних розподілених об'єктів (полів і середовищ) приводять до моделей у вигляді диференціальних рівнянь в частинних похідних, які у самому загальному випадку є функціональними рівняннями виду

$$\Phi(x, y, z, \dots, u, u_x, u_y, u_z, \dots, u_{xx}, u_{yy}, \dots) = 0, \quad (2.9)$$

що містять одну або більше частинних похідних (у тому числі вище першого порядку) від шуканої функції декількох змінних $u = (x, y, z, \dots)$ і які зв'язані деякою функціональною залежністю Φ . Описові можливості моделей цього виду винятково великі, а самі моделі найчастіше є наслідком фізичних законів, які представлені у диференціальній формі. Відомі також великі труднощі, що зустрічаються на шляху реалізації моделей цього виду, особливо при розв'язуванні нелінійних задач. Цим пояснюється застосування великої кількості прийомів спрощення або перетворення їх до інших видів моделей як на фізичному, так і на математичному рівнях. Зокрема, такими прийомами є спрощення постановок задач (зниження розмірності), використання фізичних законів в інтегральній формі, лінеаризації тощо. Граничні умови, що накладаються на шукані функції і їх похідні у сукупності з рівнянням (2.9) утворюють велику різноманітність постановок задач, для розв'язування яких застосувати який-небудь загальний, універсальний підхід неможливо [4].

Для опису передатних властивостей елементів з розподіленими параметрами можна використовувати функцію Гріна (вагову функ-

цію) $v(x, \xi, t - \tau)$, яка відтворює реакцію розподіленого елемента в точці x в момент часу t при нульових початкових та однорідних крайових умовах, на імпульсний сигнал, прикладений в кожній точці ξ та в кожен момент часу τ . Тоді лінійний стаціонарний розподілений блок описується інтегральним оператором:

$$Q(x, t) = \int_{t_0}^t \int_{D_1} v(x, \xi, t - \tau) \omega(\xi, \tau) d\xi d\tau, \quad (2.10)$$

де D_1 — область в r -вимірному евклідовому просторі; $\omega(\xi, \tau)$ — вхідна дія.

Зв'язок між передатною і ваговою функцією $v(x, \xi, t)$ задається співвідношенням

$$W(x, \xi, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} v(x, \xi, t) dt. \quad (2.11)$$

Значно менш систематизованою і дослідженою в технічних застосуваннях є область використання інтегральних рівнянь, які в загальному нелінійному випадку можуть представлятись у вигляді

$$\int_Q K(x, y, u(y)) dy = F(x, u(x)), \quad (2.12)$$

де інтеграл береться по області Q , а шукана функція u може залежати як від однієї, так і від багатьох змінних $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \in Q(x)$; функції K (ядро) і F — наперед відомі. Математичні моделі виду (2.12) мають ряд переваг, зокрема, вони містять в собі повну постановку задачі, що відповідає моделям (2.10) разом з їх граничними умовами, завдяки незмінності своєї структури допускають більш універсальний підхід при числовій реалізації, ніж у випадку диференціальних моделей.

Динамічні макромоделі [125]. Складність сучасних технічних об'єктів в багатьох випадках розв'язування практичних задач призводить до труднощів отримання якісних і кількісних результатів [174, 118, 119]. Ці труднощі найбільш притаманні задачам моделювання об'єктів з розподіленими параметрами, для математичного опису яких застосовуються диференціальні рівняння з частинними похідними, які відносяться до найбільш складних видів математичних моделей. Задача побудови та числової реалізації ефективних динамічних моделей об'єктів з розподіленими параметрами додатково ускладнюється в тих розповсюджених випадках, коли модель «вбудовується» в діючі системи керування, контролю або діагностування і повинна враховувати необхідність функціонування в реальному часі [77].

Ефективним підходом для подолання вказаних ускладнень є використання макромоделей. При цьому передбачається, що макромоделі задовольняють вимогам адекватності і, разом з тим, мають більш зручну форму чи структуру, або спрощують процес числової (комп'ютерної) реалізації з досягненням необхідної точності результатів [81, 92].

Ґрунтовною основою для побудови макромоделей об'єктів з розподіленими параметрами є аналітичні методи інтегральних представлень розв'язків низки класів диференціальних рівнянь з частинними похідними, які можуть бути доповнені використанням досягнень в галузі числових методів із застосуванням сучасних комп'ютерних засобів [174].

Прагнення підвищити продуктивність комп'ютерних засобів, забезпечити високу точність, мінімізувати ресурси комп'ютера призводить до доцільності дослідження можливостей застосування різноманітних видів математичного опису в якості моделей динамічних об'єктів. Зокрема, не повністю розв'язаною залишається проблема дослідження і використання можливостей динамічних макромоделей у вигляді інтегральних рівнянь та операторів. Інтегральні макромоделі є самостійним і своєрідним видом математичного опису задач динаміки [131]. На відміну від параметричних моделей, для формування яких в якості вихідних даних використовуються задані параметри (постійні або змінні) структурованого об'єкта, динамічні макромоделі формуються на основі заданих динамічних характеристик об'єкта, його ланок або елементів. Динамічні характеристики являють собою функціональні залежності (функції), які можуть бути отримані у вигляді експериментальних даних або в аналітичному вигляді, якщо існує розвинена теорія досліджуваного об'єкта. Слід відмітити, що сучасні розповсюджені пакети програм поки що не достатньо охоплюють своїми можливостями інтегральні динамічні моделі. Крім того, користувач має обмежені можливості здійснити такі операції, як диференційований вибір числових алгоритмів реалізації тих чи інших видів моделей, зокрема, при реалізації математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. Важливу роль при цьому відграють методи отримання спрощених описів об'єктів з розподіленими параметрами, тобто макромоделей.

Використання інтегральних операторів та рівнянь в якості макромоделей об'єктів з розподіленими параметрами відповідає інтегральному методу математичного моделювання, як сукупності способів визначення інтегральних відношень між вихідними даними і динамічними характеристиками об'єкта, що вивчається, а також

методів еквівалентних перетворень отриманих інтегральних моделей і числової чи комп'ютерної реалізації.

Під макромоделлю в даній роботі розуміється математичний опис процесів у динамічному об'єкті (системі), що представлений в загальному випадку у довільній математичній формі, має необхідний рівень адекватності, мінімальну складність серед можливих альтернативних варіантів та забезпечує завдяки цьому ефективну числову (комп'ютерну) реалізацію. Виходячи з такого визначення, можна вважати, що макромодель динаміки деякого об'єкта може відображати його поведінку як реакцію певної просторової частини об'єкта чи певного місця в його структурі, не торкаючись в цьому відображенні, повністю або частково, поведінки іншого зовнішнього чи внутрішнього «змісту» об'єкта. Крім того, макромодель може відображати (безпосередньо аналізувати) лише частину властивостей чи характеристик об'єкта, тобто ту їх частину, яка відповідає реальній, обмеженій за своїм обсягом, меті дослідження. Тому до макромоделей відносяться: достатньо розповсюдженні моделюючі вирази типу «вхід-вихід» при описі об'єктів з розподіленими і зосередженими параметрами; спрощенні моделі, отримані шляхом еквівалентних або апроксимаційних перетворень вихідної «повної» моделі, зокрема спрощені є лінеаризовані математичні описи; структурні представлення об'єктів (структурні моделі), що інтегрують в собі велику кількість елементів «первинної» розгалуженої структури об'єкта; моделі, отримані за експериментальними даними, тобто на основі методів та засобів ідентифікації, зокрема до цього класу макромоделей пропонується відносити спрощені математичні описи, отримані шляхом обчислювальних експериментів з вихідною моделлю.

З іншої сторони, розвиток загальної теорії систем і, зокрема, систем керування об'єктами з розподіленими параметрами, призвело до створення структурної теорії такого роду систем. В основі цієї теорії лежить ідея розподіленого блоку, який відповідає визначеному фізичному процесу в суцільному середовищі і який в лінійному випадку однозначно і повністю описується відповідною функцією Гріна або передатною функцією.

З точки зору структурної теорії автоматичного керування, кожна задача для рівнянь математичної фізики відповідає деякій «елементарній» системі або «елементарному» блоку, який однозначно описується функцією Гріна (імпульсною перехідною функцією) або передатною функцією (у стаціонарному випадку) даної задачі для рівнянь математичної фізики.

Існуючі досягнення в області числових методів, інформаційних технологій і програмної інженерії дозволяють ефективно користуватись апаратом вказаних характеристик для розв'язку задач комп'ю-

терного моделювання при дослідженні і проектуванні широкого класу технічних систем, в тому ж числі при автоматизації процесів керування [18, 185].

Структурні (структурно-функціональні) моделі. Найбільш часто структурно-функціональними моделями відображуються системи автоматичного керування (рис. 2.1), які містять наступні компоненти, що забезпечують їх функціонування: об'єкт (керований процес); виконуючі пристрої (ВикП); пристрої вимірювання (ПВим); пристрої керування (ПК). Стан об'єкта характеризується змінними стану $x_i = x_i(t)$; вихідними змінними $y_j = y_j(t)$; зовнішній вплив: похибки вимірювання $\delta_j(t)$, збурюючі дії $f_j(t)$ або зовнішньо задані дії $y_j^*(t)$.

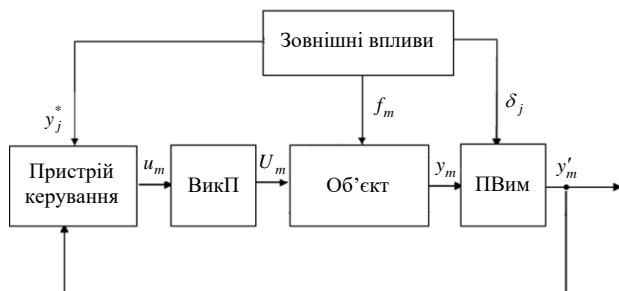


Рис. 2.1. Структурно-функціональна схема системи автоматичного керування

Інтегральні рівняння динамічної системи. Одним із шляхів отримання можливостей для покращення якості процесів моделювання, є використання інтегральних динамічних моделей у вигляді інтегральних операторів і рівнянь типу Вольтерри [145]. Ці моделі мають властивість універсальності, зокрема їх структура не залежить від того, моделюється об'єкт із зосередженими чи з розподіленими параметрами. Крім того, вони дають змогу враховувати такі особливості, як необхідність побудови математичних моделей за експериментальними даними, можливість застосування макромоделей для окремих фрагментів систем, наявність високочастотних завад у вихідних даних, які використовуються для формування математичних описів [79].

Лінійна багатоканальна система керування описується багатовимірним лінійним інтегральним рівнянням Вольтерри II роду [49, 51, 52, 86]

$$k(t)y(t) + \int_{t_0}^t K(t, \tau)y(\tau)d\tau = l(t)x(t) + \int_{t_0}^t L(t, \tau)x(\tau)d\tau + f(t, t_0), \quad (2.13)$$

де $y(t) = (y^1(t), y^2(t), \dots, y^n(t))^T$ — n -вимірний вектор вихідних сигналів (реакцій) системи; $x(t) = (x^1(t), x^2(t), \dots, x^m(t))^T$ — m -вимірний вектор вхідних (керуючих) впливів на систему;

$$K(t, \tau) = \begin{pmatrix} K_{11}(t, \tau) & K_{12}(t, \tau) & \dots & K_{1n}(t, \tau) \\ K_{21}(t, \tau) & K_{22}(t, \tau) & \dots & K_{2n}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{n1}(t, \tau) & K_{n2}(t, \tau) & \dots & K_{nn}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$$L(t, \tau) = \begin{pmatrix} L_{11}(t, \tau) & L_{12}(t, \tau) & \dots & L_{1m}(t, \tau) \\ L_{21}(t, \tau) & L_{22}(t, \tau) & \dots & L_{2m}(t, \tau) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ L_{n1}(t, \tau) & L_{n2}(t, \tau) & \dots & L_{nm}(t, \tau) \end{pmatrix};$$

$K(t, \tau)$, $L(t, \tau)$ — ядра інтегральних операторів Вольтерри, що відображають динамічні характеристики ланок системи;

$$k(t) = \begin{pmatrix} k_{11}(t) & k_{12}(t) & \dots & k_{1n}(t) \\ k_{21}(t) & k_{22}(t) & \dots & k_{2n}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{n1}(t) & k_{n2}(t) & \dots & k_{nn}(t) \end{pmatrix}; \quad l(t) = \begin{pmatrix} l_{11}(t) & l_{12}(t) & \dots & l_{1m}(t) \\ l_{21}(t) & l_{22}(t) & \dots & l_{2m}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ l_{n1}(t) & l_{n2}(t) & \dots & l_{nm}(t) \end{pmatrix};$$

$k(t)$, $l(t)$ — змінні матриці, причому, якщо не зазначено додатково, матриця $k(t)$ вважається рівною одиничній матриці I ; t_0 — момент початку функціонування системи (подачі керуючого впливу); t — поточний момент часу. $f(t, t_0) = (f^1(t, t_0), f^2(t, t_0), \dots, f^n(t, t_0))^T$ — вільний член, що містить всю інформацію, необхідну для однозначного знаходження $y(t)$ для всіх $t \geq t_0$.

Рівняння (2.13) описує лінійну систему і має властивість лінійної залежності розв'язку від правої частини рівняння і, отже, від вхідного впливу. Вираз (2.13) описує систему, що фізично реалізується, так як значення вихідного сигналу в момент t обумовлюється лише значеннями вхідного впливу в цей і в попередні моменти і не залежить від наступних змін сигналу $x(t)$. Рівняння (2.13) можна реалізувати у вигляді структури, зображеної на рис. 2.3. Типовим блоком приведеної структурної моделі є матриця $n \times m$ модулів (рис. 2.3), кожен з яких реалізує інтегральний оператор Вольтерри з ядром $L_{nm}(t, \tau)$.

Порівняємо інтегральну модель (2.13) із відомими методами математичного опису лінійних систем. Ясно, що вигляд моделі (2.13) і конк-

ретні алгоритми її аналізу не пов'язані з порядком досліджуваної системи, який визначається як найвищий порядок похідної вихідного сигналу, що входить у рівняння. У багатьох задачах важливою є і та обставина, що у рівнянні (2.13) використовуються лише сигнали $x(t)$ і $y(t)$ і не потрібні їхні похідні. І, нарешті, при переході від моделі в просторі станів до моделі (2.13) в загальному випадку розмірність векторів $x(t)$ і $y(t)$ не лише не зростає, але практично може виявитися меншою [39].

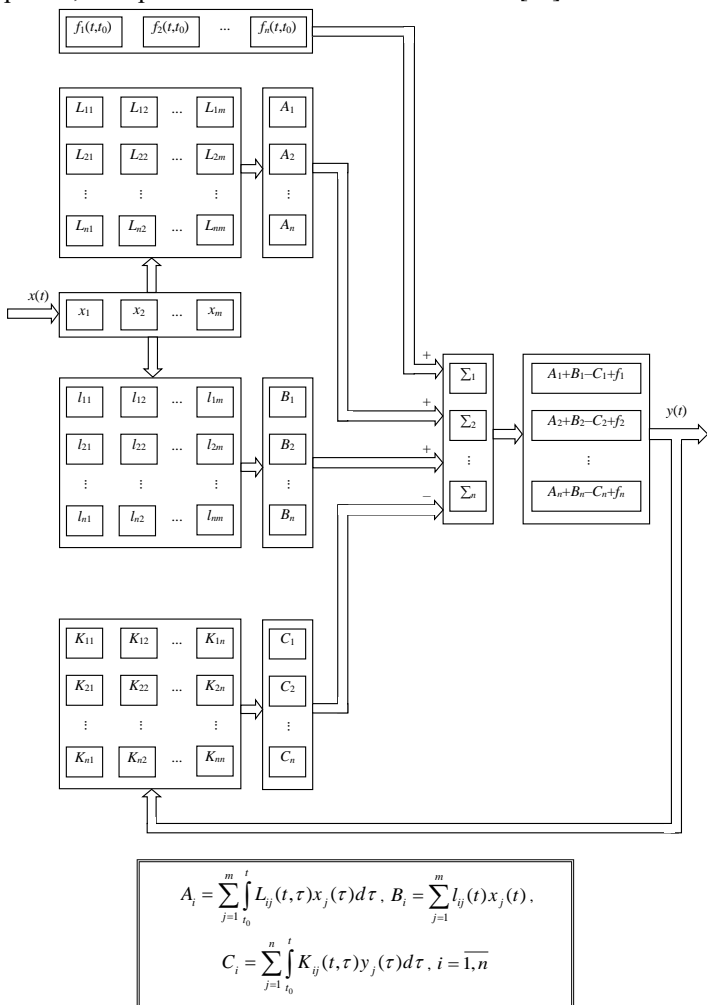


Рис. 2.2. Блок-схема рівняння (2.13)

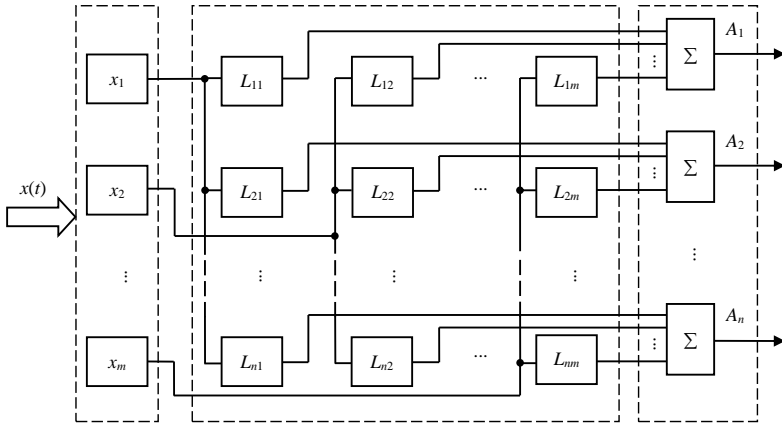


Рис. 2.3. Структура інтегрального модуля моделі багатоканальної керованої електромеханічної системи

З'ясуємо тепер сенс введення у рівняння (2.13) вільного члена $f(t, t_0)$. Нехай $\theta \in [t_0, t]$ — деякий довільний момент часу. Замінімо у рівнянні (2.13) t_0 на θ і отримаємо

$$k(t)y(t) + \int_{\theta}^t K(t, \tau)y(\tau) d\tau = l(t)x(t) + \int_{\theta}^t L(t, \tau)x(\tau) d\tau + f(t, \theta).$$

Вилучаючи цей вираз із рівняння (2.13), після еквівалентних перетворень отримаємо

$$f(t, \theta) = f(t, t_0) - \int_{t_0}^{\theta} [K(t, \tau)y(\tau) - L(t, \tau)x(\tau)] d\tau. \quad (2.14)$$

З формули (2.14) випливає, що функція $f(t, \theta)$ характеризує вплив попередньої історії функціонування системи до моменту θ на вихідний сигнал у момент часу t . Інакше кажучи, значення вільного члена у рівнянні (2.13) визначається запасом енергії, яка була накопичена системою до початку дослідження.

Клас систем, поведінка яких описується інтегральними моделями, включає в себе системи, які вивчаються в класичній теорії регулювання (системи в просторі станів, з нейтральним аргументом та аргументом, що запізнюється тощо), і зводиться до останніх лише при визначеній структурі виразу (2.13).

2.2. Методи еквівалентного перетворення скалярних динамічних моделей

При моделюванні динамічних систем важливим методом вияву їх специфічних властивостей і можливостей чисельної реалізації є представлення моделей в різних еквівалентних формах, що само собою потребує розвитку методів еквівалентного перетворення [156]. Використання еквівалентних форм динамічних моделей є загальноприйнятим підходом при дослідженні систем управління (часові моделі, операторні у вигляді передатних функцій, частотні), які використовуються для аналізу різних властивостей заданої системи. Часто отримання моделі, виходячи з її фізичних властивостей, зручно в одній формі, а її чисельна реалізація в іншій, еквівалентній вихідній.

Для еквівалентного (аналітичного) перетворення динамічних моделей можна виділити наступні методи:

1. Методи еквівалентного перетворення диференціальних моделей в інтегральні моделі, що включають в себе:
 - метод перетворення з розчепленням;
 - метод послідовного інтегрування;
 - метод старшої похідної.
2. Метод еквівалентного перетворення диференціального рівняння n -го порядку до системи диференціальних рівнянь 1-го порядку.
3. Метод еквівалентного перетворення диференціальної моделі в модель у вигляді передатних функцій.
4. Метод еквівалентного перетворення інтегральної моделі Вольтерри II з ядром, що розділяється в диференціальну модель.

Особливості методів еквівалентного перетворення динамічних моделей можна розглянути на наступних прикладах.

Метод перетворення з розчепленням. Нехай відома модель динамічного об'єкта у вигляді звичайного диференціального рівняння [58]

$$D[y] = y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^n a_i y^{(n-i)}(x) = f(x), \quad y^{(i)}(0) = C_i, \quad i = \overline{0, n-1}, \quad (2.15)$$

або в операторній формі

$$D[y] = f. \quad (2.16)$$

Для отримання ряду еквівалентних інтегральних динамічних моделей, тобто залежностей, що містять інтегральний оператор, може бути застосований досить загальний прийом, що базується на

різноманітних розщепленнях вихідного диференціального оператора. Дійсно, розщиплюючи оператор D на два оператори, тобто записуючи $D = D_1 + D_2$, отримуємо диференціальне рівняння

$$D_1[y] = \psi, \quad (2.17)$$

де $\psi(x) = f(x) - D_2[y]$. Вибираючи такий спосіб розщеплення, щоб допустимим був аналітичний розв'язок рівняння (1.23), отримаємо розв'язок

$$y = D_1^{-1}[\psi], \quad (2.18)$$

який є інтегральним або інтегро-диференціальним рівнянням, оскільки оператор D_1^{-1} як обернений по відношенню до D_1 є інтегральним оператором.

Розглядуваний метод еквівалентного перетворення може бути застосований в нелінійних задачах. Якщо, наприклад, задано нелінійне диференціальне рівняння $D_H = D_1 + D_{2H}$, де D_1 — лінійний оператор. Тоді вихідне рівняння також зводиться до виду (2.18), тобто в загальному випадку до нелінійного інтегро-диференціального рівняння.

Розглянемо даний метод дещо детальніше на прикладі рівняння (2.15), яке запишемо у вигляді

$$y^{(n)}(x) + \sum_{i=1}^m a_i y^{(n-i)}(x) = f(x) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(x), \quad (2.19)$$

Після заміни змінних

$$u(x) = y^{(n-m)}(x), \quad u'(x) = y^{(n-m+1)}(x), \dots, u^{(m)}(x) = y^{(n)}(x) \quad (2.20)$$

отримуємо рівняння m -го порядку

$$u^{(m)}(x) + \sum_{i=1}^m a_i u^{(n-i)}(x) = \psi(x), \quad (2.21)$$

де

$$\psi(x) = f(x) - \sum_{i=m+1}^n a_i y^{(n-i)}(x). \quad (2.22)$$

Переходячи від (2.21) до еквівалентної системи диференціальних рівнянь і використовуючи фундаментальний розв'язок стосовно канонічної системи диференціальних рівнянь, отримуємо рівняння з ядром експоненціального виду

$$u(x) = e^{Ax} u_0 + \int_0^x e^{As} \Phi(a, u, s) ds, \quad (2.23)$$

де $u(x) = [u'(x), u''(x), \dots, u^m(x)]$, $u_0 = [u'(0), u''(0), \dots, u^m(0)]$,
 $\Phi(a, u, s) = [0, 0, \dots, \psi(x)]$, а матриця A порядку m має вид

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -a_m & -a_{m-1} & \dots & -a_1 \end{pmatrix}.$$

Враховуючи залежність

$$y(x) = \int_0^x \underbrace{\dots}_0 \int_0^x u(s) ds = \frac{1}{(n-m-1)!} \int_a^x (x-s)^{n-m-1} u(s) ds \quad (2.24)$$

можна бачити, що перехід від одного варіанту моделі до іншого відбувається шляхом зміни значення $m \in 1, n$.

Метод послідовного інтегрування. Якщо в розглянутому вище методі прийняти $m = n$, то розчеплення оператора D зводиться до розв'язання вихідного рівняння відносно старшої похідної. В такому випадку розв'язок рівняння полягає в послідовному n -кратному інтегруванні, в результаті якого отримаємо інтегральне рівняння виду

$$y(x) + \int_0^x K(x-s)y(s)ds = F(x),$$

де

$$K(x-s) = \sum_{i=1}^n q_i \frac{(x-s)^{(i-1)}}{(i-1)!},$$

$$F(x) = \int_0^x \frac{(x-s)^{n-1}}{(n-1)!} f(s)ds + \sum_{i=0}^{n-1} C_i \frac{x^i}{i!} + C_0 \sum_{i=1}^{n-1} q_i \frac{x^i}{i!} +$$

$$+ \dots + C_1 \sum_{i=1}^{n-2} q_i \frac{x^{i+1}}{(i+1)!} + \dots + C_{n-2} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}$$

Метод старшої похідної. Даний метод є частковим випадком методу розчеплення, в якому використовується заміна

$$\begin{cases} u(x) = y^{(n)}(x), \\ \int_0^x u(s)ds + C_1 = y^{(n-1)}(x) \text{ і т.д.}, \end{cases} \quad (2.25)$$

$$y(x) = C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 + \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x (x-s)^{n-1} u(s) ds, \quad (2.26)$$

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^n a_i(x) \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!}, \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} \varphi(x) = & f(x) - C_{n-1} a_1(x) - (C_{n-1} x + C_{n-2}) a_2(x) - \\ & - \left(C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 \right) a_n(x). \end{aligned} \quad (2.28)$$

При отриманні даних виразів виконуються інтегрування виразів (2.25) і використовується формула (2.24).

Можна побачити, що диференціальна модель задачі (2.15) еквівалентна усім інтегральним моделям у вигляді рівнянь Вольтерри II роду з частковим видом ядра (2.27). Вибір однієї з двох еквівалентних форм запису задачі Коші залежить від самої постановки задачі, що розв'язується, і від її властивостей при чисельному розв'язанні.

Метод послідовного інтегрування лінійного інтегро-диференціального рівняння має вигляд

$$u^{(n)} + \sum_{i=1}^{n-1} a_i u^{(i)} + a_n \int_a^x ((x-s)^m + R) u(s) ds = f(x), \quad (2.29)$$

з початковими умовами $u^{(i)}(0) = C_i, i = \overline{0, n-1}$.

Для знаходження еквівалентного інтегрального рівняння за допомогою даного методу передбачається послідовне n -кратне інтегрування вхідного інтегро-диференціального рівняння виду (2.29). При цьому використовуються рекурентні формули для знаходження ядра інтегрального рівняння

$$K(x, s) = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{(x-s)^{i-1}}{(i-1)!} a_i + \frac{(x-s)^{(n+m-1)}}{(n+m-1)!} a_n + \frac{R(x-s)^{(n-1)}}{(n-1)!}, \quad (2.30)$$

та правої його частини

$$\varphi(x) = \int_0^x \dots \int_0^x f(x) - C_{n-1} a_1(x) - \left(C_{n-1} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \dots + C_1 x + C_0 \right) a_n(x). \quad (3.31)$$

n раз

Для розв'язування інтегральних рівнянь, отриманих шляхом еквівалентних перетворень, є велика кількість чисельних методів, в основі більшості з них лежить заміна інтегралу квадратурними формулами. Крім цього, широке застосування знаходять ітераційні методи,

методи Рунге-Кутта, методи, основані на використанні сплайнів і кусково-гладких поліномів. У випадку нелінійних рівнянь, ефективним є використання спеціалізованих ітераційних методів.

Еквівалентне перетворення інтегральних моделей в диференціальні моделі. Перехід від інтегральних рівнянь до диференціальних, як один з підходів до розв'язання лінійних і нелінійних інтегральних рівнянь Вольтерри, можливий лише в частковому випадку, що є наслідком високої універсальності рівнянь Вольтерри II роду як форми опису задачі Коші. Одним з таких часткових, але розповсюджених випадків є випадок виродженого або близького до нього ядра. Такий підхід може бути цілком аргументованим як при математичній постановці задачі, так і при їх розв'язуванні, оскільки методи розв'язування диференціальних рівнянь досить добре розроблені і широко застосовуються.

Метод структурно-функціонального перетворення моделей. Загальна структурно-функціональна схема об'єкта керування зі зворотнім зв'язком може бути самостійною системою або частиною більш складної системи управління.

На рис. 2.4 зображено вигляд структурно-функціональної схеми системи управління, в якому вона задається в Simulink. В цій моделі мають місце наступні позначення: u — вхідний сигнал; T_1 і T_2 — елементи, що регулюються; T_{oy} — об'єкт управління; $T_{зб}^{(1)}$ і $T_{зб}^{(2)}$ — елементи зворотного зв'язку; $T_{зб}$ — об'єкт збудження; y — сигнал системи на виході.

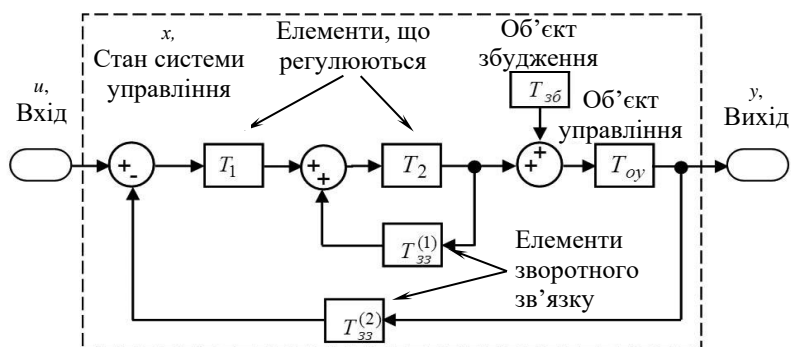


Рис. 2.4. Структурно-функціональна simulink-модель типової системи управління зі зворотнім зв'язком

Кожний simulink-блок однозначно описується наборами вхідних параметрів u , змінними стану x і вихідними змінними y . В математичній формі блок можна описати змішаною системою диференціальних, різницевих та алгебраїчних рівнянь:

$$\begin{cases} \dot{x}_c = f_c(t, x, u), \\ x_d(k) = f_d(t, x, u), \\ x = x_c + x_d, \\ y = g(t, x, u), \end{cases}$$

де x_c — вектор змінних стану; \dot{x}_c — вектор похідних змінних стану; x_d — вектор дискретних змінних стану; y — вектор вихідних змінних; f_c — функція обчислення похідних вектора стану; f_d — функція обчислення дискретних змінних; g — функція обчислення виходів системи.

Будь-якій лінійній simulink-моделі «вхід-вихід» однозначно відповідає математична модель в просторі станів:

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx + Du, \end{cases}$$

де x, u та y вектори стану, входу та виходу системи відповідно. A, B, C та D — сталі матриці, наперед задані, або отримані експериментально.

Аналіз систем управління, що мають багато контурів, часто виявляється досить громіздким із-за наявності взаємозв'язаних контурів, що мають загальні елементи. При експериментальних дослідженнях може виявитись корисним заміна моделі динамічного об'єкту чи її частини — макромоделлю, яка має найпростіший вигляд та є менш енергоємною. Тому актуальною постає задача побудови макромоделі, що зображена на рис. 2.5, яка мала б досить точно відтворювати поведінку початкової системи.



Рис. 2.5. Макромодель системи управління

В макромоделі вхідний вектор u залишається тим самим що і у початковій моделі, а сама система управління засобами Simulink-Matlab перетворюється так, що її можна описати за допомогою однієї передатної функції H . На виході отримується вектор \tilde{y} , що

наближено дорівнює вектору u , з наперед заданою або з отриманою задовільною точністю.

Виходячи з вище сказаного, можна запропонувати наступний комп'ютерний алгоритм побудови спрощеної макромоделі динамічної системи стосовно складних лінійних simulink-моделей. При цьому, для пониження розмірності моделі в просторі станів використовуються методи виділення домінантних власних значень. Основна їх ідея полягає в тому, що при пониженні розмірності початкової моделі можна знехтувати тими елементами системи, що характеризують перехідні процеси, які швидко спадають. Алгоритм запропонованого методу побудови спрощеної макромоделі динамічної системи має наступний вигляд.

1. В середовищі Simulink, яке виконує блочно-ситуаційне моделювання, будується та зберігається структурно-функціональна модель складної динамічної системи.
2. За допомогою пакету Matlab отримується еквівалентна диференціальна модель, яка є неперервною або дискретною лінійною моделлю, що задана в просторі станів матрицями A , B , C , D .
3. Після отримання моделі в просторі станів, якщо це потрібно, її розмірність понижується. Для цього можна використати методи виділення домінантних власних значень, такі як перший, другий і модифікований методи Девісона [35-38], метод Маршала [37-39] або методи, що представлені в пакеті Matlab — MatchDC та Truncate [40-43] та інші методи, які дозволяють, при задовільній похибці апроксимації, будувати спрощені моделі.
4. Отримавши апроксимаційну модель засобами Matlab перетворюємо представлену модель в просторі станів в рівноцінну їй модель у вигляді передатної функції.
5. У якості критерію ефективності методів апроксимації динамічної системи регулювання можуть бути вибрані такі показники як комп'ютерний час побудови спрощеної моделі, похибки апроксимації, оцінка амплітудно-фазово-частотної характеристики або реакції системи на заданий вхідний сигнал, а також певний комбінований показник.

Таким чином, на основі застосування запропонованих у розділі методів може бути побудований та ефективно реалізований у вигляді програм ряд алгоритмів.

2.3. Методи апроксимаційного перетворення динамічних моделей

Принцип спрощення і корегування математичних моделей. Задачі спрощення і корегування математичних моделей [93] припускають, що є відома деяка математична модель об'єкта

$$Y = L(A)X, \quad (2.31)$$

де $L(A)$ — у загальному випадку деякий відомий оператор. У випадку корегування задача полягає в уточненні числових параметрів $A = (a_1, \dots, a_s)$ математичної моделі, виходячи з даних про функціонування об'єкта. Дана задача відома також як задача оцінювання параметрів математичної моделі або задача параметричної ідентифікації.

До необхідності коригування математичної моделі можуть призводити наступні випадки. Математична модель, отримана аналітичним способом, часто включає ряд числових параметрів, які потребують подальшого уточнення або визначення на діючому об'єкті. В іншому випадку для об'єкта зі структурою, яка змінюється з часом, може бути прийнята математична модель зі сталими параметрами, з якими вона задовольняє вимогам точності для інтервалу $(t_0, t_0 + T]$, а для наступного інтервалу $(t_0 + T, t_0 + 2T]$ у зв'язку із зміною структури об'єкта може виникнути необхідність уточнення цих параметрів.

Для задач корегування або оцінювання параметрів математичної моделі важливим є характер взаємозв'язку між вихідними змінними $Y(t)$ і оцінюваними параметрами A . Характер цього зв'язку визначається як вихідною математичною моделлю, так і обраною функцією неузгодженості або якості математичної моделі

$$\delta(A) = \|Y_0(t) - L(A)X\|, \quad (2.32)$$

де $Y_0(t)$ — вектор виходів об'єкта, $\|\cdot\|$ — знак норми вектор-функції. З точки зору оцінювання параметрів математична модель називається лінійною, якщо $\delta(A)$ лінійна відносно параметрів. Тому математична модель може бути нелінійною в звичайному сенсі і лінійною відносно оцінюваних параметрів. Оскільки задача оцінювання параметрів A формулюється як екстремальна задача пошуку

$$\delta(A^*) = \min_{A \in \Theta} \delta(A), \quad (2.33)$$

де Θ — допустима множина векторів A , то складність алгоритмів пошуку точки мінімуму $A^* \in \Theta$ буде визначатися властивостями

$\delta(A)$. На практиці функцію $\delta(A)$, зазвичай, вибирають так, щоб $\delta(A)$ була лінійною відносно A або зводилася до лінійної задачі визначення A . Для того, щоб точка мінімуму A^* була єдиною, бажано, щоб $\delta(A)$ була опуклою або хоча б унімодальною функцією.

Задачу корегування математичної моделі $Y(t) = L(A_0)X(t)$ можна поставити як задачу уточнення вихідних числових параметрів A_0 за X, Y , які належать заданій області D , до таких значень $\tilde{A} \in \Theta$, для яких критерій якості $\delta(A)$ задовольняє умові

$$\delta(\tilde{A}) \leq \Delta, \quad (2.34)$$

де Δ — необхідна точність. Для задачі корегування параметрів A_0 суттєвим є те, що при використанні ітераційних алгоритмів пошуку \tilde{A} в якості початкового наближення параметрів A слід брати лише $A = A_0$, тому що, зазвичай, достатньо вести пошук в околі вихідних значень A_0 . Крім того, ітераційні алгоритми можна завершувати не по досягненню точки мінімуму функції $\delta(A)$, а в точці \tilde{A} , в якій виконується (2.34). Проте не виключено, що навіть у точці глобального мінімуму A^* не буде досягнуто необхідної точності, тобто $\delta(A^*) > \Delta$. Це вказує на те, що вибрана структура математичної моделі погано описує реальний об'єкт і необхідно для підвищення точності моделі шукати її в іншому класі. Можливий також випадок, коли необхідна точність буде досягнута при тому ж $L(A)$, але при зміні обмежень D, Θ .

Задачу корегування параметрів A математичної моделі статички

$$Y = f(X, A_0) \quad (2.35)$$

можна сформулювати наступним чином. За спостережуваними в статичному режимі на об'єкті значеннями $X^{(v)}$ і $Y_0^{(v)}$ та відповідним значенням моделі $Y^{(v)} = f(X^{(v)}, A_0)$ необхідно уточнити вихідні числові параметри A_0 . Задачу корегування математичної моделі статички нерідко можна звести до розв'язання системи лінійних або нелінійних рівнянь. Якщо, наприклад, математична модель статички записується у вигляді

$$Y_j = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(X), \quad j = \overline{1, n}, \quad \left(\sum_{j=1}^{nm} s_j = s \right), \quad (2.36)$$

де $\varphi_{ij}(X)$ — задані координатні функції, або шляхом перетворення змінних її можна звести до такого вигляду, то за відсутності обме-

жень на A і за умови, що функція неузгодженості математичної моделі має вигляд

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n q_{vj} \left[Y_{0j}^{(v)} - Y_j \left(X^{(v)} \right) \right]^2, \quad Y_0^{(v)} = Y_0 \left(X^{(v)} \right), \quad (2.37)$$

де задані вагові коефіцієнти $q_{vj} \geq 0$, необхідна умова мінімуму

$$\frac{\partial \delta(A)}{\partial a_{ij}} = 0 \text{ приводить до } n \text{ систем лінійних алгебраїчних рівнянь}$$

$$\sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \sum_{v=1}^N \varphi_{ij} \left(X^{(v)} \right) \varphi_{kj} \left(X^{(v)} \right) = \sum_{v=1}^N Y_{0j}^{(v)} \varphi_{kj} \left(X^{(v)} \right), \quad k = \overline{1, s_j}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.38)$$

Проте при коригуванні параметрів не завжди вдається математичну модель звести до лінійного вигляду відносно A , і у цих випадках та у випадку функції (2.38) необхідна умова мінімуму призводить до нелінійної відносно A системи рівнянь. Часто виявляється, що замість розв'язування нелінійної системи прийнятніше розв'язувати безпосередньо задачу мінімізації (2.33).

У динаміці корегування параметрів математичної моделі (2.31) здійснюється за спостережуваними значеннями входів $X(t)$ і виходів $Y_0(t)$ об'єкта на деякому проміжку часу $[t_0, t_0 + T]$ і значеннями $Y(t)$ математичної моделі на цьому ж проміжку за такими ж значеннями входів $X(t)$. Зазвичай припускається, що в початковому стані Y_0 та Y співпадають.

На практиці розповсюджені математичні моделі динаміки, що описується системою диференціальних рівнянь

$$\frac{dY}{dt} = F(t, X, Y; A_0), \quad Y|_{t=t_0} = Y^0, \quad (2.39)$$

де параметри A_0 необхідно корегувати. Ця задача навіть для лінійних диференціальних рівнянь є доволі складною. Наприклад, у випадку одного лінійного диференціального рівняння

$$\frac{dy}{dt} = a_0 y(t) + x(t), \quad y(0) = y^0, \quad (2.40)$$

для якого розв'язок можна записати в явному вигляді

$$y(t, a_0) = y^0 e^{a_0 t} + \int_0^t x(\tau) e^{a_0(t-\tau)} d\tau, \quad (2.41)$$

задача коригування одного параметра a_0 на основі критерію

$$\min_a \int_0^T [y(t, a) - y_0(t)]^2 dt \text{ є лінійною задачею.}$$

Нелінійної задачі вдається позбутися, якщо експеримент поставлений так, що крім $Y_0(t)$ вимірюється також і $\frac{dY_0}{dt}$. Тоді для математичної моделі, заданої системою рівнянь виду (2.40), а також для систем нелінійних диференціальних рівнянь, в праві частини яких A входить лінійно:

$$\frac{dY_j}{dt} = \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t, X, Y), \quad j = \overline{1, n}; \quad (2.42)$$

задачу визначення A можна звести до системи лінійних алгебраїчних рівнянь, для цього функція якості моделі береться у вигляді

$$\delta(A) = \sum_{v=1}^N \sum_{j=1}^n \left[Y_{0j}^{(v)} - \sum_{i=1}^{s_j} a_{ij} \varphi_{ij}(t_v, X^{(v)}, Y^{(v)}) \right]^2 \quad (2.43)$$

і всі її похідні по a_{ij} прирівнюються до нуля. До лінійної системи зводиться задача і тоді, коли $Y_0(t)$ не вимірюється, а визначається чисельними методами за наближеними експериментальними даними $Y_0(t_v)$. Цей підхід не можна вважати задовільним без належної обережності, оскільки чисельне диференціювання наближених експериментальних даних може внести великі похибки.

У випадку впливу на об'єкт деякого вектора завод, коли вхідні і вихідні величини доцільно розглядати як випадкові, корегування параметрів моделі за спостережуваними $X^{(v)}$, $Y^{(v)}$ можна провести, базуючись на алгоритмах теорії оцінок математичної статистики або за допомогою процедур стохастичної апроксимації.

У задачі спрощення математичної моделі вважається, що вихідна математична модель відома із надлишковою точністю, причому використання цієї моделі пов'язане із певними труднощами — складністю алгоритмів, неприйнятним часом їх реалізації та ін. Для практичного застосування більш доцільно мати не лише точну, але і просту для реалізації математичну модель. Тому виникає задача за рахунок зниження точності отримати, базуючись на вихідній математичній моделі, спрощену математичну модель об'єкта.

Питання спрощення математичної моделі можна розв'язувати на різних етапах моделювання. Дійсно, нехай ступінь адекватності математичної моделі M об'єкту O характеризується функцією $\rho_1(O, M)$, а точність чисельної реалізації математичної моделі M у вигляді програми P — функцією $\rho_2(M, P)$. Будемо вважати, що функція неузгодженості $\rho(O, P)$ результатів, виміряних на об'єкті O і розрахованих програмою P , задовольняє нерівність

$$\rho(O, P) \leq \rho_1(O, M) + \rho_2(M, P) \leq \varepsilon, \quad (2.44)$$

де число ε може бути збільшене. З (2.44) випливає, що $\rho(O, P)$ можна збільшити двома шляхами: зробити спрощуючі допущення, гіпотези і припущення про фізичний процес, і тим самим перейти від математичної моделі M процесу до більш грубої математичної моделі M_1 ; взяти більш «грубі», а значить, і простіші чисельні методи реалізації алгоритмів математичної моделі M у вигляді програми P_1 .

Таким чином, надмірна точність математичної моделі M дає можливість перейти до простіших математичних моделей процесу M_1 і простіших чисельних методів для її реалізації. Природно, що такий перехід у кожному конкретному випадку повинен здійснюватися із врахуванням специфіки математичної моделі.

Підходи до спрощення динамічних об'єктів з розподіленими параметрами. В практиці розв'язування рівнянь із частинними похідними досить поширеними є ті чи інші прийоми спрощення вихідних залежностей. У тому числі методи апріорного подання форми (структури) шуканого розв'язку, такі як методи Фур'є, Гальоркіна та ін. Сюди ж слід віднести метод розділення змінних або розщеплення, тобто метод аналітичного подання шуканої функції двох і більше змінних у вигляді добутку функцій одного аргументу. Відомі також методи кускового наближення функцій та ряд інших методів. Вказані методи можуть служити основою для структурного спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами. Проте слід зазначити, що при використанні цих методів, як правило, ставиться за мету отримання спрощеної моделі для подальшого її самостійного застосування в якості основи функціонування комп'ютеризованих систем технічного призначення, таких як системи вимірювання, контролю, діагностики, керування, а також сучасних і перспективних систем моніторингу, які інтенсивно розвиваються. Завдання, поставлені за мету, відносились, як було сказано вище, до отримання чисельного результату для конкретної обчислювальної задачі. Таким чином, напрямок досліджень, який розглядається, потребує подальшого розвитку шляхом пошуку і створення ефективних методів спрощення моделей об'єктів із розподіленими параметрами, розробки відповідних алгоритмів та програмних засобів моделювання.

Спрощення складної моделі завжди ґрунтується на деякій близькості або еквівалентності складної і спрощеної моделей. У зв'язку з тим, що оцінка близькості моделей суттєвим чином визначається цілями дослідження системи і специфікою складної моделі, класифікація методів спрощення моделей є достатньо складною. Достатнє

уявлення про різноманіття способів і прийомів спрощення математичних моделей дає їх розгляд з точки зору простору змінних, в якому відбувається спрощення моделі. Відповідно двом основним просторам, які використовуються при аналізі систем, маємо дві настановні множини підходів до спрощення моделей.

Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості вихідної і спрощеної моделі в просторі зображень. При цьому отримують: канонічні форми редуційних моделей, в яких зберігаються визначені власні значення вихідної системи, або задаються деякі полюси і зберігаються декілька марковських параметрів і (або) часових моментів; спрощені моделі зі збереженням домінантних власних значень, полюсів або нулів вихідної моделі; спрощені моделі, що отримуються інтерполяцією Коші передатної функції $W(p)$ системи; апроксимацією передатної функції $W(p)$ системи поліномами Гурвіца, неперервними дробами (апроксимація Паде), поліномами Чебишева, формами Кауера, — з контролем положення полюсів, нулів, сталих часу, часових границь та (або) моментних характеристик перехідного процесу спрощених моделей. До методів перетворення в просторі зображень відносять частотні методи спрощення моделей, що використовують: перетворення змінних в комплексній площині, причому на високих частотах s — площина перетворюється в область всередині одиничного кола, а нові передатні функції перетворюються до модифікованих поліномів Чебишева; мінімізацію інтеграла від різниці дійсних і уявних частотних характеристик вихідної і спрощеної моделей у визначеному інтервалі частот; мінімізацію вагової міри відхилень частотних реакцій вихідної і спрощеної моделей на всьому діапазоні частот; квадратично-амплітудну частотну характеристику і методи Чебишева при апроксимації передатної функції ланцюговими дробами.

Побудова спрощеної моделі за критерієм близькості показників якості складної і спрощеної моделі в просторі станів. В цю множину методів спрощення моделей входять всі методи, які ґрунтуються на операціях над змінними в просторі станів. Різноманіття використовуваних показників якості систем обумовлює багаточисельність способів спрощення цієї групи. Значна їх кількість ґрунтується на мінімізації різноманітних мір відхилень перехідних процесів, імпульсних і перехідних характеристик або деяких функціоналів від різниці вихідних координат складної і спрощеної моделей тощо.

При постановці і розв'язанні задачі спрощення моделей як у просторі зображень, так і в просторі станів не можна обійтися без інженерних, евристичних прийомів спрощення, що враховують специфіку кон-

кретної задачі дослідження системи і відомості про порівняльну важливість факторів (або фрагментів), отримані в результаті попереднього досвіду використання спрощеної моделі. Прикладом такого роду евристичного прийому при спрощенні математичного опису електроенергетичних систем є використання того факту, що в складних системах вплив збудження по мірі віддалення від місця його виникнення зменшується в силу розсіювання енергії та інших причин.

Інженерний підхід використовується також і при спрощенні моделі, що отримується при послідовному нехтуванні деякими фрагментами в початковій моделі і оцінці їх значимості. Інженерним способом визначається і допустима похибка при спрощенні математичних моделей. Відзначимо деяку складність цієї задачі при врахуванні похибок вхідної інформації і потрібної точності отриманих результатів. Як при використанні будь-яких методів спрощення, що не враховують параметричну чутливість моделей, після спрощення вихідної моделі алгебраїчними методами також необхідна оцінка точності отриманої спрощеної моделі із врахуванням збурень параметрів системи.

Системний підхід при спрощенні моделей має на увазі не тільки задовільну точність спрощеної моделі, що отримується, але й задоволення інших вимог, пов'язаних з її практичним застосуванням. Такими вимогами можуть бути спрощення обладнання і підвищення надійності — при апаратній реалізації спрощення моделі, мінімізація машинного часу і об'єму пам'яті, що використовується при програмній реалізації.

Для прикладу розглянемо спосіб структурного спрощення математичної моделі об'єкта з розподіленими параметрами. Математичний опис об'єкта з розподіленими параметрами задано у прямокутній області G з границею $\Gamma\{a < x < \beta; t_0 < t < t_0 + l\}$ у вигляді диференціального рівняння із частинними похідними

$$a(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - b(x,t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + c(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + d(x,t)u = f(x,t), \quad (2.45)$$

$$a, b > 0 \text{ у } G + \Gamma,$$

з граничними умовами

$$\begin{cases} u(x_0, t) = \varphi_0(t); u(x_0 + l, t) = \varphi_l(t); (t_0 \leq t \leq T), \\ u(x, t_0) = \psi_0(x); u(x, T) = \psi_T(x); (x_0 \leq x \leq x_0 + l), \end{cases} \quad (2.46)$$

де $\varphi_0(t)$, $\varphi_l(t)$, $\psi_0(x)$, $\psi_T(x)$ — задані функції.

Застосувавши метод прямих до рівнянь (2.45)-(2.46), отримуємо систему з n звичайних лінійних диференціальних рівнянь другого порядку

$$a_k(t)\ddot{u}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[u_{k+1}(t) - 2u_k(t) + u_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{u}_k(t) + d_k(t)u_k(t) = f_k(t) + O(h^2), \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (2.47)$$

де $x_k = x_0 + kh$, ($k = 0, 1, 2, \dots, n$), $h = \frac{l}{n+1}$, $x_k(t) = u(t, x_k)$.

Нехтуючи у (2.47) членами $O(h^2)$ та позначивши через $U_k(t)$ наближені значення розв'язку $u(t, x)$ на прямій $x = x_k$ для їх визначення, отримаємо систему рівнянь

$$a_k(t)\ddot{U}_k(t) - \frac{b_k(t)}{h^2}[U_{k+1}(t) - 2U_k(t) + U_{k-1}(t)] + c_k(t)\dot{U}_k(t) + d_k(t)U_k(t) = f_k(t), \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (2.48)$$

Використовуючи граничні умови на Γ , маємо:

$$\left. \begin{aligned} U_0(t) &= \varphi_0(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_{n+1}(t) &= \varphi_l(t), & (\alpha \leq t \leq T); \\ U_k(t_0) &= \psi_0(x_k), & U_k(T) = \psi_T(x_k); \quad (k = 1, 2, \dots, n). \end{aligned} \right\} \quad (2.49)$$

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь (2.48) з граничними умовами (2.49) апроксимує з точністю до $O(h^2)$ диференціальне рівняння (2.45) з граничними умовами (2.46). Слід відзначити, що за допомогою методу прямих, по суті, проводиться декомпозиція вихідної моделі на n структурних елементів, кожен з яких реалізує диференціальне рівняння другого порядку.

Отже, на основі проведеної декомпозиції здійснюється побудова структурних моделей об'єктів з розподіленими параметрами. При цьому слід враховувати, що заміна моделі з нескінченною кількістю степенів свободи скінченновимірною приводить до розходжень значень їх власних частот. Для оцінки точності апроксимаційної моделі можна скористатися визначенням величини відмінності власних частот вихідної та апроксимаційної моделі.

Аналіз існуючих в публікаціях методів спрощення складних математичних моделей дозволяє визначитись з вибором підходу і методів розв'язування дослідницьких задач і досягнення мети, що відносяться до даної дисертаційної роботи.

При вирішенні задачі формування робочої динамічної моделі принцип альтернативності моделей надає можливість широкого вибору однієї із форм можливих математичних залежностей, яку, не дивлячись на аналітичну еквівалентність, можуть суттєво розрізнятися за критерієм обчислювальності складності, оскільки реалізуються за допомогою різних за своєю якістю обчислювальних схем. При цьому вибір моделі

здійснюється шляхом обчислювальних експериментів. Для застосування інтегральних динамічних моделей, які володіють згладжуючими властивостями при побудові моделей за експериментальними даними, запропоновані відповідні форми у вигляді явних моделей, тобто інтегральних операторів, які мають однакову структуру для об'єктів із зосередженими і розподіленими параметрами. Моделі цього виду відносяться також до класу економічних макромodelей. Крім того, запропонована загальна форма інтегральних моделей у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри II роду для опису багатозв'язних динамічних систем, що забезпечує безпосередню структурну реалізацію програмними засобами.

Для отримання широкого кола моделюючих виразів запропонований узагальнений метод еквівалентного перетворення диференціальних рівнянь — у інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, що включає відомі методи послідовного інтегрування. Для побудови спрощених динамічних моделей сформульовано відповідний принцип спрощення і корегування моделюючих залежностей, що базується на введенні функції неузгодженості (критерію якості) математичної моделі та оптимізаційному пошуку необхідного результату. Наведені шляхи реалізації процесів спрощення моделей. У випадку об'єктів з розподіленими параметрами запропоновано метод структурного спрощення, який здійснює перехід від базових рівнянь з частинними похідними до спрощеної моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі інтерполяційного підходу; метод забезпечує значну перевагу спрощеної моделі при обмежених часових ресурсах інформаційної частини комп'ютерно-інтегрованої системи.

3. МЕТОДИ ПАРАМЕТРИЧНОЇ РЕДУКЦІЇ МАТЕМАТИЧНИХ МОДЕЛЕЙ

3.1. Способи спрощення математичних моделей

Природне прагнення дослідників до збільшення точності математичного моделювання досліджуваних явищ призводить до зростання обчислювальної складності моделей, які використовуються. Стосовно задач, які розглядаються в даній роботі, ступінь складності математичних описів динаміки досліджуваних об'єктів спричиняє значний вплив на можливості моделювання в реальному часі процесів комп'ютерно-інтегрованих систем. У зв'язку з цим, при створенні останніх, реальним шляхом зниження вимог до швидкодії комп'ютерної частини є застосування замість складних математичних моделей якихось більш простих, але таких, що зберігають в певному сенсі, інформативність результатів моделювання. Іншими словами, таких, які зберігають *властивість адекватності* об'єкту, що моделюється. Саме наявність сенсу адекватності спрощеної та вихідної моделей визначає різноманіття підходів до спрощення складних моделей [55, 184].

Питання спрощення (або *редукції*) математичних описів об'єктів або явищ тісно пов'язане із задачею *ідентифікації* [9]. Тому різноманітні прийоми, які використовуються при ідентифікації, з успіхом застосовуються і для побудови спрощених описів (математичних моделей) динамічних об'єктів за наявного складного об'єкта (явища) [67]. Основні з цих прийомів це: пониження порядку системи рівнянь; поділ руху на «швидкий» та «повільний»; зменшення числа незалежних змінних; лінеаризація вихідних нелінійних рівнянь; нехтування впливом окремих факторів, а також ряд інших [129, 133, 199].

Відомі підходи до спрощення математичних моделей [92] в порядку убування апріорних відомостей про «фізичну» значущість тих частин моделі, які в процесі спрощення видаляються з неї, можна розташувати в наступній послідовності [62, 201]:

- послідовне нехтування деякими фрагментами у початковій математичній моделі та оцінка його значущості;
- збереження в моделі фрагментів, змінні в яких є значущими за фізичним смыслом, та мінімізація певної міри нев'язок у спрощеній моделі для заданого класу входів системи;

- побудова спрощеної моделі за близькістю показників якості початкової та спрощеної моделей в просторі зображень; різноманітні варіанти цього підходу дуже широко використовуються при редукції лінійних систем [14, 166].

При побудові спрощеної моделі за близькістю показників якості початкової та спрощеної моделей в просторі зображень значне різноманіття показників якості, що використовуються, зумовлює багаточисельність способів цієї групи. В якості прикладів мінімізації різних мір відхилення змінних початкової та спрощеної моделей в просторі станів можна назвати способи мінімізації середньоквадратичних відхилень перехідних процесів, імпульсних або перехідних характеристик [40, 84, 168].

Аналіз публікацій з питань редукції моделей, свідчить про наступні напрямки досліджень: редукція моделей шляхом апроксимації типових відгуків систем високого порядку відповідними відгуками моделей більш низького порядку; *рівномірної апроксимації*, тобто такі, що використовують мінімізацію міри похибки, яка вноситься апроксимацією, коли входи системи приймають всі припустимі значення [149, 150]. Незалежна від входів системи міра рівномірної апроксимації пропонується у вигляді

$$E = \sup_{u \in U} \frac{\|y_s - y_m\|}{\|u\|}, \quad (3.1)$$

де u, y_s, y_m — загальний вхід (для системи и моделі), а також виходи системи и моделі, відповідно. Можна зазначити, що мінімізація цієї міри узагальнює багато класичних критеріїв, які використовуються при редукції, а алгоритми редукції із застосуванням міри E можуть застосовуватися для апроксимації багатомірних нестационарних систем і систем з розподіленими параметрами.

Системний підхід при дослідженні об'єктів, які моделюються, має на увазі не тільки мінімізацію похибки спрощеної моделі, але й задоволення вимог до редукційної (тобто такої, що зазнала редукції) моделі, пов'язаних з її застосуванням. Такими вимогами можуть бути зменшення обладнання та підвищення надійності (при апаратурній реалізації), мінімізація машинного часу та обсягу пам'яті (при програмній реалізації) та інші.

Стосовно до даної роботи задачу корегування моделі об'єкта з n входами $x = x(x_1, \dots, x_n)$ та m виходами $y = y(y_1, \dots, y_m)$ доцільно ставити як задачу про уточнення або визначення параметрів α оператора A математичної моделі

$$Y = A(\alpha) x,$$

причому α визначається з умови

$$\inf_{\alpha} \|Y_0 - A(\alpha) x\|$$

близькості моделі та об'єкта, точна модель якого — вектор-функція

$$Y_0 = Y_0(x) = \begin{cases} y_1^0(x_1, \dots, x_n), \\ y_m^0(x_1, \dots, x_n). \end{cases}$$

Якщо математична модель об'єкта відшукується у вигляді вектор-функції

$$Y_M = Y_M(x, A) = \begin{cases} y_1^M(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p), \\ \dots \\ y_m^M(x_1, \dots, x_n, a_1, \dots, a_p), \end{cases}$$

то умова

$$\inf_A \|Y_M - Y_0\| = \Delta_0 \quad (3.2)$$

найкращого визначення параметрів $A \{a_k\}_1^p$ оптимальної за точністю зкоригованої моделі замінюється більш простою

$$\|Y_M - Y_0\| \leq \Delta. \quad (3.3)$$

В останньому співвідношенні Δ — вектор, який визначає (забезпечує) необхідну точність зкоригованої моделі.

В якості міри наближення вектора Y_M до вектора Y_0 обирається найбільш підходяща міра в залежності від вимог, що висуваються до моделі. Це може бути:

- *рівномірна* міра точності

$$\max_j |y_j^M - y_j^0|_{x \in D} \leq \delta, \quad (3.4)$$

де D — область зміни $x(x_1, \dots, x_n)$, δ — елемент вектора Δ , який відповідає певному, наперед прийнятому критерію (наприклад, мінімальний з усіх, тобто. $\delta = \min_j (\delta_j)$, $j = 1, m$);

- *середньоквадратична* міра точності

$$\max_j \sum_{i=1}^N (y_j^M(x^{(i)}) - y_i^0(x^{(i)}))^2 \leq \delta, \quad (3.5)$$

де $x^{(i)} = (x_1^{(i)}, \dots, x_n^{(i)}) \in D$;

- ймовірнісна міра точності

$$\min_A M[\rho(Y_M, Y_0)], \quad (3.6)$$

де $M[\cdot]$ — символ математичного очікування, $\rho(Y_M, Y_0)$ характеризує неузгодження між векторами Y_M і Y_0 .

При постановці задачі корегування моделі показник Δ слід обирати з умови

$$\Delta \geq \Delta Y_B + \Delta Y_C + \Delta_0, \quad (3.7)$$

прийнято наступні позначення: ΔY_B — оцінка похибки вимірювання координат системи, яка визначається як $\Delta Y_B \geq \|Y_{\text{іст}}^B - Y_{\text{вим}}^B\|$, де $Y_{\text{іст}}^B$ — істинне значення вектора Y_B ; $Y_{\text{вим}}^B$ — вимірне значення вектора Y_B , ΔY_C — обчислена похибка при використанні спрощеної математичної моделі, яка визначається як $\Delta Y_C = \Delta Y_m + \Delta Y_H + \Delta Y_a$, де, в свою чергу, $\Delta Y_m = \|\tilde{Y}^m(x, \tilde{A}) - Y^M(x, A)\|$ — вектор похибки методу внаслідок заміни моделі $Y^M(x, A)$ моделлю $\tilde{Y}^m(x, \tilde{A})$ з наближеними методами реалізації; $\Delta Y_H = \|\tilde{Y}^M(x^u, \tilde{A}) - Y^M(x, \tilde{A})\|$ — похибка, що не усувається (спадкова), зумовлена використанням значень, які вимірюються з похибками значень x^g ; $\Delta Y_a = \|\tilde{Y}_a^M(x^u, \tilde{A}) - \tilde{Y}^M(x^u, \tilde{A})\|$ — похибка округлення (при числовій реалізації) або інструментальна похибка (при апаратурній реалізації).

На відміну від задачі корегування математичної моделі, в задачі параметричної редукції моделей динамічних об'єктів, що розглядається нижче, відомі параметри ρ моделі, яка спрощується і рівняння стану об'єкта. В задачі ж корегування стан об'єкта задається в дискретні моменти часу значеннями векторів входу $x = x(x_1, \dots, x_n)$ та виходу $y = y(y_1, \dots, y_m)$ збуджень, які реєструються.

3.2. Принцип «точнісної» параметричної редукції математичних моделей

Як витікає з попереднього викладу, за звичай, задача спрощення моделі ставиться як задача *мінімізації* певної міри відхилення виходів початкової та спрощеної моделей при заданому характері спрощення. При цьому, як правило, передбачається, що параметри вихідної моделі відомі точно. Природно, що на практиці ця обставина не має місця, у зв'язку з чим питання спрощення математичних моделей може ставитись як питання узгодження виду моделі з характеристиками точності (можна вважати за припустимий термін «точнісні» характеристики) вихідних даних. Інтуїтивно ясно, що немає сенсу використовувати складні в структурному відношенні моделі, якщо їх параметри відомі з достатньо великою похибкою. Ця обставина і зумовлює необхідність узгодження таких характеристик моделей як складність та точність вихідних даних. Не дивлячись на те, що така постановка задачі спрощення моделей відома, виявляючись наслідком техніки наближення обчислень, визначення конструктивних шляхів її розв'язування має важливе значення при дослідженні складних об'єктів і, зокрема, при розробці алгоритмічного та програмного забезпечення обчислювально-керуючих систем різного призначення.

Точність та швидкодія є основними показниками якості, моделювання процесів в комп'ютерно-інтегрованих системах. Спрощення моделей досліджуваних об'єктів дозволяє зменшити величину необхідної швидкодії, знижуючи, в загальному випадку, точність моделювання. Вирішення виникаючого при цьому протиріччя між тенденціями збільшення точності моделювання та зменшення необхідної швидкодії може бути досягнуте саме на основі узгодження математичного опису досліджуваного об'єкта з «точнісними» характеристиками вихідних даних.

Достатньо загальна і конструктивна постановка задачі спрощення математичних моделей на основі ідеї узгодження виду моделі з точністю вихідних даних формулюється як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які формально можна співставити за точністю зі спостереженнями (вихідними даними). Клас моделей, які формально можна співставити, визначається обмеженням типу нерівності на міру точності.

В рамках вказаної загальної постановки задачі спрощення математичних моделей може бути сформульовано ряд частинних постановок,

одна з яких, а саме — «точнісна» параметрична редуція моделей — та основні підходи до її розв’язування розглядаються нижче.

Нехай задано певний математичний опис (модель) M явища, яке моделюється, та нехай вихідні дані (зазвичай це числові значення параметрів) задано з певною похибкою, мірою якої слугує ε_ρ . Ясно, що, якщо $\varepsilon_\rho \rightarrow \infty$, то вихідний математичний опис M може бути замінено деяким іншим описом M' (в тому числі більш простим) за умови, що $\varepsilon_{y\rho} \rightarrow \infty$. В даному випадку $\varepsilon_{y\rho}$ — міра похибки вихідних (початкових) змінних вихідної моделі, зумовленої неточністю вихідних даних, тобто наявністю ε_ρ . Уявімо, що $\varepsilon_\rho = 0$, тоді заміна вихідного опису будь-яким іншим (в тому числі більш простим) призведе до появи похибки $\varepsilon_{yM} \neq 0$. В цьому випадку питання щодо можливості застосування спрощеної моделі повинно вирішуватися на основі аналізу вимог щодо точності моделювання досліджуваного явища. Інакше кажучи, застосування спрощеної моделі допустимо, якщо $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_3$, де ε_3 — задане значення міри похибки моделювання, і навпаки. Якщо ж має місце досить сильна нерівність $\varepsilon_{yM} < \varepsilon_3$, то це свідчить про можливість подальшого спрощення вихідної (початкової) моделі.

В загальному випадку можливість застосування математичної моделі M або M' визначається умовою

$$\varepsilon_{yM} + \varepsilon_{y\rho} \leq \varepsilon_3. \quad (3.8)$$

Тут ε_{yM} — або міра похибки опису досліджуваного явища моделлю M , або міра похибки, зумовленої заміною заданої моделі M на якусь іншу M' (в тому числі більш просту).

Оскільки в даній роботі розглядається питання щодо спрощення математичних моделей, то у подальшому під ε_{yM} будемо розуміти саме міру похибки, зумовлену заміною початкової моделі більш простою.

В якості характеристики узгодження з похибкою вихідних даних математичної моделі M' , що заміняє модель M , приймемо величину

$$\alpha = \varepsilon_{yM} / \varepsilon_{y\rho}, \quad (3.9)$$

яку будемо називати *коефіцієнтом узгодженості*. При цьому умова застосування (3.8) моделі M' набуває вигляду

$$(\alpha + 1)\varepsilon_{y\rho} \leq \varepsilon_3. \quad (3.10)$$

Визначення. Математична модель M' називається α -узгодженою з похибкою вихідних даних ε_p моделі M , якщо $\varepsilon_{yM} = \alpha \varepsilon_{yp}$ та $\alpha > 0$.

Задача узгодження моделі M з точністю вихідних даних означає отримання моделі M' з певним значенням коефіцієнту узгодженості. При цьому в якості обмеження знизу може бути прийнято значення $\alpha = 0,01$, оскільки подальше зменшення коефіцієнту узгодженості, означає використання моделей, що мало відрізняються від початкової, і не призведе до відчутного виграшу в точності моделювання. З іншого боку, якщо $\alpha > 10$, то загальна похибка моделювання майже цілком буде визначатися ε_{yM} , причому в даному випадку при моделюванні складних об'єктів задовільні значення ε_{yM} майже неможливі. Таким чином, коефіцієнт узгодженості математичних моделей практично слід обмежувати інтервалом $(0,01...10)$.

При розв'язуванні практичних задач максимальне значення коефіцієнту узгодженості визначається умовою застосування (3.10) як

$$\alpha_{\max} = (\varepsilon_s / \varepsilon_{yp}) - 1. \quad (3.11)$$

Нехай тепер N_M — міра обчислювальної складності математичної моделі M (для динамічних об'єктів, наприклад, таких, що описуються звичайними диференційними рівняннями у нормальній формі, в якості N_M може бути прийнято число приведених до одного типу операцій, необхідних для обчислення правої частини), μ_α — множина математичних моделей, коефіцієнт узгодженості яких з похибкою вихідних даних не перевищує α .

Якщо $\alpha < \alpha_{\max}$, то всі моделі з μ_α еквівалентні в смислі можливості застосування, оскільки для будь-якої моделі виконується умова застосування (3.10). В той самий час, моделі з μ_α , можуть бути нееквівалентними в смислі обчислювальної складності. Саме при цій умові і з'являється можливість спрощення заданої моделі M шляхом її заміни на модель $M' \in \mu_\alpha$, для якої $N_{M'} < N_M$.

Визначення. Математична модель M'_0 називається *оптимально спрощеною*, якщо

$$N_{M'_0} = \min_{M' \in \mu_\alpha} N_{M'}. \quad (3.12)$$

Очевидно, що міра обчислювальної складності $N_{M'}$ є спадаючою функцією від коефіцієнту узгодженості. Звідси витікає, що ко-

ефіцієнт узгодженості оптимальної спрощеної моделі M'_0 перевищує α .

Побудова α -узгоджених, а також оптимальних спрощених моделей переслідує двояку мету. З одного боку — це обґрунтування тих або інших припущень, які дозволяють спростити модель, а з іншого — зниження вимог до швидкодії обчислювального блоку, що моделює систему. Практичний же розв'язок задачі, що розглядається, стикається зі значними ускладненнями, зумовленими, в основному, складністю задачі оцінки величин ε_{yM} , $\varepsilon_{y\rho}$ а також складностями формалізації множини μ_α .

Реальним шляхом подолання труднощів є використання *параметричного підходу* до побудови спрощених моделей. Сутність його полягає у заміні значень певних параметрів початкової моделі M на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності. Зазвичай ця заміна заданих значень певних параметрів початкової моделі на нульові (як для адитивних, так і для мультиплікативних параметрів) та/або одиничні (для мультиплікативних параметрів). Такого роду параметричне спрощення доцільно застосовувати в тих випадках, коли математичні моделі досліджуваних процесів або явищ містять достатньо значну кількість параметрів, значення яких визначаються за експериментальними даними. До таких моделей можуть бути віднесені моделі у вигляді систем лінійних та нелінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності, системи диференційних рівнянь (як у звичайних, так і у частинних похідних) з коефіцієнтами, що являють собою складні функції змінних на вході та виході, інтегральних рівнянь з ядрами, вид яких визначається реальними характеристиками досліджуваних об'єктів та інші.

Теоретичне обґрунтування можливості параметричного спрощення математичних моделей щодо побудови α -узгоджених та оптимальних спрощених моделей базується на результатах теорії точності стосовно до аналізу похибки, яка не усувається.

Нехай $M(y, V, \rho)$ — математична модель; y, V, ρ — вектори змінних на вході та на виході об'єкта, а також параметрів, відповідно, які належать нормованим просторам з метриками $\rho_y, \rho_V, \rho_\rho$, що визначаються відповідними нормами; N_ρ — міра обчислювальної складності.

Нехай ρ_0 — невідомий вектор точних значень параметрів моделі, а ρ_3 — вектор заданих значень параметрів. При цьому відомо, що

$$\rho_\rho(\rho_3, \rho_0) \leq \varepsilon_\rho. \quad (3.13)$$

Умова (3.13) визначає множину Ω_ρ таку, що з $\rho \in \Omega_\rho$ витікає $\rho_\rho(\rho_3, \rho) \leq \varepsilon_\rho$. Тим самим визначено множину μ можливих моделей

$$\mu = \left\{ M(y, V, \rho) : \rho \in \Omega_\rho, \rho_\rho(\rho_3, \rho) \leq \varepsilon_\rho \right\},$$

причому модель $M(y, V, \rho)$ являє собою вихідний (початковий) математичний опис.

Нехай $\rho_\rho(\rho_3, \rho)$ — міра похибки в просторах змінних на виході, зумовлена неточністю завдання вектора ρ_3 ; $\rho_y(\rho_3, \rho)$ — міра похибки, зумовлена заміною заданої моделі $M(y, V, \rho)$ на деяку, зокрема, більш просту модель; $M(y, V, \rho_r)$; $\rho_y(\rho_3, \rho)$ — міра похибки, яка характеризує відмінність точної моделі $M(y, V, \rho_0)$ від моделі $M(y, V, \rho_r)$.

Для вказаних похибок може бути визначено оцінки

$$\left[\rho_y(\rho_3, \rho) / \rho \right] \in \Omega_\rho, V \in \Omega_\rho \leq \varepsilon_{y\rho}, \quad (3.14)$$

$$\left[\rho_y(\rho_3, \rho_r) / V \right] \in \Omega_v \leq \varepsilon_{yM}, \quad (3.15)$$

$$\left[\rho_y(\rho_0, \rho_r) / V \right] \in \Omega_v \leq \varepsilon_{y\gamma}. \quad (3.16)$$

(Ω_v — область можливих значень змінних на вході), а нерівність трикутника визначає зв'язок між ними

$$\varepsilon_{yr} \leq \varepsilon_{yM} + \varepsilon_{y\rho} = (\alpha + 1) \varepsilon_{y\rho}, \quad \varepsilon_{yr} \leq \varepsilon_{yM}. \quad (3.17)$$

Якщо $\rho_r \in \Omega_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_{yr}$ і, таким чином, множина μ можливих моделей являє собою множину α -узгоджених моделей (зокрема, при $\alpha = 1$, тобто $\mu = \mu_1$). Однак застосування параметричного підходу для пошуку спрощених моделей в множині μ має обмежені можливості. Дійсно, множина Ω_ρ , як правило, не містить точок, які належать координатним осям, в зв'язку з чим, при такому спрощенні моделей, можна розраховувати лише на скорочення числа значущих цифр в представленні заданих параметрів. Зазначимо, що такого роду спрощення знаходить застосування в техніці наближених обчислень, а також може бити використано при організації обчислювальних процесів в системах моделювання та етапі вибору обчислювальних засобів, зокрема, для обґрунтування використання аналогових підпрограм.

В загальному випадку, якщо $\rho_r \in \Omega_\rho$, то $\varepsilon_{yM} \leq \varepsilon_{yr}$ і, таким чином, коефіцієнт узгодженості відповідної моделі буде більшим за одиницю. Тим не менш існує принципова можливість визначення множини α -узгоджених моделей при $\alpha \leq 1$ і $\rho_r \notin \Omega_\rho$. Наявність такої можливості зумовлено тим, що похибка в просторі параметрів на виході об'єкта, викликана неточністю завдання вектора ρ_3 , оцінюється в метриці ρ_y .

Невизначеність значень вектора параметрів вихідної (початкової) моделі (наявність Ω_ρ) призводить до невизначеності в значеннях змінних на виході, кількісна міра якої слугує похибка

$$\Delta y = y(\rho, V) - y(\rho_3, V) / V \in \Omega_V. \quad (3.18)$$

Область $\Omega_{\Delta y}$ можливих значень похибки Δy має складну конфігурацію в просторі змінних на виході, яка залежить від виду Ω_ρ , властивостей математичного опису $M(y, V, \rho)$ і визначається рівнянням для похибки, що не усувається. Детальна характеристика $\Omega_{\Delta y}$ методами аналізу похибки, що не усувається, які розвинуто в теорії точності, може бути отримано лише для найпростіших задач. Зазвичай область приналежності похибки характеризується певною сферою S (в заданій метриці ρ_y), радіус якої (в даному випадку $\varepsilon_{y\rho}$) визначається на основі оцінки зверху (3.14) для відповідної метрики ρ_y норми. Внаслідок грубості оцінок, що застосовуються, має місце $S \supset \Omega_{\Delta y}$. Сфері S в просторі змінних на виході відповідає певна область Ω'_ρ в просторі змінних така, що $\Omega'_\rho \supset \Omega_\rho$ та $\rho \in \Omega'_\rho$, звідки витікає $\rho_y(\rho_3, \rho) \leq \varepsilon_{y\rho}$.

Через наявність включення Ω'_ρ застосування параметричного підходу до спрощення вихідного (початкового) опису в класі моделей μ' має більше можливостей у порівнянні з класом μ . Пояснюється це тим, що для складних задач з більшим числом параметрів, що задаються з не дуже високою точністю, область Ω'_ρ містить точки, які належать координатним осям простору параметрів. Звідси випливає, що в якості вектора ρ_r може бути обрано вектор з деякими нульовими компонентами, чим і досягається зменшення міри обчислювальної складності $N_{\rho r}$.

В загальному випадку Ω'_ρ може не перетинатися з координатними осями, однак і при цих умовах, як це не складно показати, існує множина $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \leq \alpha \varepsilon_{y\rho}, \alpha > 1\}$, яка містить точки координатних осей та така, що визначає множину моделей μ'_α , які узгоджено з похибкою вихідних (початкових) даних з коефіцієнтом узгодження $\alpha > 1$. Дійсно, нехай $\Omega'_\rho(\beta) = \{\rho : \rho_p(\rho_3, \rho) \leq \beta \varepsilon_\rho\}$. Ясно, що $\Omega_\rho(1) = \Omega_\rho$ і існує таке значення $\beta_0 = 1$, що при $\beta > \beta_0$ сфера $\Omega_\rho(\beta)$ перетинається, що найменше, з однією з координатних осей простору параметрів. Множина $\Omega_\rho(\beta)$ визначає деяку область можливих значень похибок змінних на виході $\Omega_{\Delta y}(\beta)$, яка в метриці ρ_y оцінюється сферою радіусу $\alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}$, тобто

$$\left[\rho_y(\rho_3, \rho) / \rho \right] \in \Omega'_\rho(\beta) \leq \alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}. \quad (3.19)$$

Тут $\alpha(\beta)$ — невід'ємна не спадаюча функція, причому $\alpha(1) = 1$; будемо вважати, що функція $\alpha(\beta)$ — зростаюча та обмежена. Перше припущення означає, що зі зростанням похибки вихідних даних похибка змінних на виході зростає (для практичних задач можна вважати цю умову такою, що виконується). Друга умова означає коректність всіх моделей з параметрами з $\Omega_\rho(\beta)$, що є обмеженням застосування параметричного підходу до спрощення моделей.

Нехай тепер $\Omega'_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \leq \alpha(\beta) \varepsilon_{y\rho}\}$ прообраз в просторі параметрів сфери S_α . Оскільки $\Omega'(\alpha) \supset \Omega(\beta)$ то множина $\Omega'_\rho(\alpha)$ також перетинається щонайменше з однією з координатних осей, що і необхідно було показати. Таким чином, доведено наступну теорему.

Твердження 3.1. Для будь-якого $\Omega_\rho = \{\rho : \rho_p(\rho_3, \rho) \leq \varepsilon_\rho, \varepsilon_\rho > 0\}$ існує $\alpha_0 > 0$ таке, що при $\alpha > \alpha_0$ в множині μ_α α -узгоджених з похибкою вихідних даних коректних моделей $M(y, V, \rho)$, що визначається множиною параметрів $\Omega_\rho(\alpha) = \{\rho : \rho_y(\rho_3, \rho) \leq \alpha \varepsilon_{y\rho}\}$, міститься непуста множина $\bar{\mu}_\alpha$, моделей $M(y, V, \bar{\rho})$ для яких $(N_{\bar{\rho}} < N_\rho / \rho) \in \Omega_\rho$.

Сформульоване твердження є теоретичним обґрунтуванням можливості застосування параметричного підходу до побудови спрощених математичних моделей на основі узгодження виду моделей з точністю вихідних даних. А факт існування α -узгоджених моделей з меншим значенням міри обчислювальної складності ніж вихідна (початкова) модель, що визначається даним твердженням, складає сутність принципу «точнісної» параметричної редукції математичних моделей, який може бути сформульовано наступним чином.

Для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує більш проста α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності.

Природно, що придатність параметрично спрощених моделей, які можна отримати в результаті «точнісної» параметричної редукції, визначається умовою (3.10), так, що практичний інтерес являє отримання більш простих, ніж початкові математичні описи з не дуже великим значенням коефіцієнту узгодженості. Тому бажано вміти достатньо просто апріорі оцінювати коефіцієнт узгодження параметрично спрощених моделей.

Оцінка похибки, яка не усувається, в рамках лінійної теорії точності для широкого класу об'єктів (математичні описи яких являють собою спрощені моделі) призводить до лінійної форми залежності $\varepsilon_{y\rho}$ від ε_ρ , тобто

$$\varepsilon_{y\rho} = C_M \varepsilon_\rho, \quad (3.20)$$

де C_M — константа, що визначається властивостями задачі (для коректних задач — норма зворотного оператора лінійних рівнянь похибки, що не усувається).

В цьому випадку нескладно отримати гарантовану оцінку зверху для значення α_0 коефіцієнту узгодженості моделей, які можуть бути отримані в результаті «точнісної» параметричної редукції.

Твердження 3.2. Для мінімального значення α_0 коефіцієнта узгодження параметрично спрощеної моделі $M(y, V, \bar{\rho})$ справедлива оцінка

$$\alpha_0 \leq \frac{\min_{i=1,m} \rho_\rho(\rho_3, \varphi_i)}{\varepsilon_\rho} = \alpha_b, \quad (3.21)$$

де $\varphi_i, i = \overline{1, m}$ — координатні осі в просторі параметрів.

Доведення. Умова (3.20) означає, що функція $\alpha(\beta)$ має вид $\alpha(\beta) = \beta$. Значення β_0 визначимо з умови, що сфера $\Omega_\rho(\beta)$ радіусу $\beta_0 \varepsilon_\rho$ торкається найближчої з координатних осей простору $\varphi_i, i = 1, m$ параметрів, тобто

$$\beta_0 \leq \frac{\min_{i=1,m} \rho_\rho(\rho_3, \varphi_i)}{\varepsilon \rho}.$$

З включення $\Omega'(\alpha(\beta_0)) \supset \Omega(\beta_0)$ витікає $\alpha_0 \leq \beta_0$. Твердження доведено.

Оцінка (3.21) є, по суті, критерієм застосування «точностної» параметричної редукції математичних моделей. Так великі значення α_b (порядку десятків) свідчать про недоцільність параметричного спрощення моделей і навпаки, малі значення α_b (порядку одиниць) означають припустимість застосування «точнісної» параметричної редукції для побудови прийнятних моделей.

Параметричне спрощення моделей, яке розглядається, охоплює і той випадок, коли здійснюється лінеаризація складних функціональних залежностей. При цьому використання лінійних членів означає «обнуління» коефіцієнтів для всіх інших членів розкладання.

Крім того, використання принципу «точнісної» параметричної редукції можливо також і для оцінки окремих фрагментів моделі, які не можна визначити, шляхом уведення фіктивних мультиплікативних параметрів (що номінально дорівнюють одиниці) при досліджуваних фрагментах з наступною оцінкою незначущості цих параметрів, тобто можливості заміни їх номінальних значень на нульові.

3.3. Основа алгоритмізації «точнісної» параметричної редукції

Використання принципу «точнісної» параметричної редукції математичних моделей має на увазі розробку відповідних алгоритмів, придатних з обчислювальної точки зору. В загальному випадку, в залежності від виду моделей, які спрощуються, можливі різні шляхи конструювання алгоритмів «точнісної» параметричної редукції. Відповідні алгоритми утворюють декілька груп, що відрізняються обчислювальною складністю в залежності від інформації щодо характеристик точності спрощених моделей, яка використовується.

Розглянемо коротко сутність основних підходів до побудови алгоритмів «точнісної» параметричної редукції.

1. *Алгоритми побудови області $\Omega'(\alpha)$* . Вони розробляються на основі безпосереднього визначення прообразу в просторі параметрів сфери S_α , яка оцінює в просторі змінних на виході область можливих значень похибок. Ці алгоритми потребують знання оцінок ε_{yM} і виконання перетворення сфери S_α радіусу $\alpha \varepsilon_{y\rho}$ в область $\Omega'(\alpha)$.

2. *Алгоритми параметричної редукції в просторі параметрів*. Дані алгоритми будуються на основі визначення еквівалентного вектору параметрів $\rho_c \in \Omega(\alpha)$ такого, що реакція моделі, яка зазнала редукції, з вектором параметрів ρ_r , що задається апіорі, відрізняється від реакції вихідної (початкової) моделі з вектором параметрів ρ_c на величину, якою можна знехтувати у порівнянні з ε_{yM} . Алгоритми потребують знання оцінки ε_{yM} та розв'язку задачі мінімізації $[\rho_y(\rho, \rho_r) / V] \in \Omega_V$ по ρ за умови $\rho \in \Omega(\alpha)$.

3. *Алгоритми параметричної редукції в просторі змінних на виході*. Сутність алгоритмів цієї групи полягає в оцінці приналежності редукційної моделі області $\Omega_{\Delta y}$ (або певній її оцінці) можливих значень похибок змінних на виході початкової моделі. Алгоритми потребують побудови оцінки області $\Omega_{\Delta y}$ та визначення похибки (або її оцінки) редукційної моделі.

При розробці будь-якого алгоритму з вказаних груп виникає необхідність розв'язування низки частинних задач, які визначають їх обчислювальну складність та можливість практичного застосування.

Для алгоритмів першої групи найбільш складним в обчислювальному відношенні є перетворення S_α в $\Omega'_\rho(\alpha)$. Можливість практичного застосування обмежується простими задачами, для яких можливо отримання явних аналітичних описів області $\Omega_{\Delta y}$.

Для алгоритмів другої групи найбільш складним етапом є пошук $\min[\rho_y(\rho, \rho_r)/V] \in \Omega_V$. Практичне застосування алгоритмів можливо у випадках, коли можуть бути отримані в явному вигляді рівняння для похибки Δy , що не усувається.

Можливість застосування алгоритмів третьої групи визначається можливістю побудови області $\Omega_{\Delta y}$.

Суттєвий вплив на складність алгоритмів «точнісної» параметричної редукції моделей справляє рішення і таких питань як оцінка ε_{yM} (для алгоритмів першої та третьої груп), призначення або визначення ρ_r (для алгоритмів другої та третьої груп).

При оцінці ε_{yM} подолання обчислювальної складності досягається шляхом аналізу ε_{yM} в одній точці простору змінних на виході, що відповідає обраному режиму моделювання, який, в свою чергу, володіє екстремальними властивостями.

При оцінці реальним шляхом є використання лінійної теорії точності, яка дає можливість практично оцінювати міру похибки координат на виході моделі, зумовленої неточністю завдання вектору параметрів. При цьому може використовуватися або апарат теорії чутливості, або організовуватися визначення частинних внесків в загальну похибку окремих похибок компонент вектору параметрів з наступним їх підсумовуванням.

Значення функції чутливості або частинних внесків похибок компонент вектору параметрів дозволяє розв'язувати задачу призначення або визначення ρ_r шляхом ранжування компонент вектора ρ_z по чутливості або частинному внескові.

Для алгоритмів другої групи необхідно апіорі призначити ρ_r . Практична реалізація цієї процедури ґрунтується як на попередньому досвіді процесів, які моделюються, так і на апіорітному аналізі значущості окремих параметрів.

У зв'язку з обмеженими можливостями алгоритмів першої групи більш детальний аналіз властивостей «точнісної» параметричної редукції проведемо лише для алгоритмів третьої групи.

Структура алгоритмів редукції в просторі параметрів в загальному випадку визначається сукупністю наступних основних блоків:

1. Визначення y_3 — реакції початкової моделі з параметрами ρ_3 на обраному режимі моделювання.
2. Призначення вектора параметрів ρ_e за умови $\|y_e - y_r\| \ll \|y_3 - y_r\|$, де y_e — реакція початкової моделі з параметрами на режимі моделювання.
3. Визначення y_r — реакції редукційної моделі на обраному режимі моделювання.
3. Визначення вектора параметрів ρ_e за умови $\|y_e - y_r\| \ll \|y_3 - y_r\|$, де y_e — реакція початкової моделі з параметрами на режимі моделювання.
5. Оцінка виконання умови $\rho_e \in \Omega(\alpha)$, що еквівалентно оцінці коефіцієнту узгодженості α за умови малості Ω_ρ .
6. Аналіз результатів редукції. У випадку, якщо результати редукції задовільні, то здійснюється завершення алгоритму, інакше — повернення до другого блоку.

Розглянемо представлені основні блоки алгоритму «точнісної» параметричної редукції з точки зору їх практичної реалізації.

Перший блок. Практична реалізація залежить від виду моделі та зводиться до застосування відповідних числових методів аналізу.

Другий блок. Основна складність реалізації полягає у відсутності формалізованих прийомів визначення значень ρ_r .

Використання попереднього дослідницького досвіду дозволяє визначити варіанти структурної редукції вихідних математичних моделей, які зводяться, як правило, до заміни яких-небудь функціональних залежностей їх лінійними членами розкладання в степеневий ряд. Наприклад, щодо рівнянь динаміки польоту літака подібні варіанти структурної редукції часто полягають у заміні окремих тригонометричних функцій лінійними членами за уявної пропозиції щодо малості відповідних величин. В цих випадках розв'язання задачі «точнісної» параметричної редукції дає можливість обґрунтувати припустимість тих або інших структурних спрощень.

Апріорний аналіз значущості параметрів ґрунтується на порівнянні порядку величин адитивних складових, що входять у рівняння динаміки. Виявлені при такому аналізі члени, внесок яких в значення деякої величини достатньо малий у порівнянні з іншими членами, що утворюють ту ж саму величину, ігноруються.

Здійснений будь-яким чином вибір підозрюваних на незначущість параметрів визначає і вибір вектору ρ_r апіорі редукційної моделі. Слід, одначе, зазначити, що вибір конкретного значення ρ_r неоднозначний, оскільки формування ρ_r може здійснюватися за допомогою будь-якої підмножини апіорної множини підозрюваних на незначущість параметрів. З практичної точки зору привабливою є «максималістична» стратегія формування ρ_r , в результаті чого ρ_r призначається з урахуванням всієї апіорної множини підозрюваних на незначущість параметрів.

Третій блок. Реалізується аналогічно першому блоку.

Четвертий блок. Даний блок найбільш складний у обчислювальному відношенні, оскільки являє собою розв'язок задачі відновлення параметрів моделі $M(y, V, \rho)$. В загальному випадку реалізація блоку ґрунтується на використанні алгоритмів мінімізації відхилення реакції y_r редукційної моделі на обраному режимі моделювання від реакції y_r редукційної моделі початкової моделі шляхом варіювання параметрів останньої.

Для динамічних об'єктів в математичному плані задача часто може бути зведеною до розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь

$$f(y, \rho) = 0, \quad (3.23)$$

вид яких визначається типом моделі, відносно невідомих ρ за умови, що $y = y_r$, $V = V_0$ та $\rho \in \Omega(\alpha)$. Остання умова є принциповою, оскільки, в силу самої постановки задачі, розв'язок системи (3.23) існує, він єдиний і визначається умовою $\rho \in \Omega(\alpha)$. Таким чином, видно, що мова йде не просто про відновлення параметрів, а про наближення розв'язку y_r редукційної системи розв'язуванням відповідної системи при допустимих значеннях її параметрів. Інакше кажучи, питання ставиться про еквівалентну заміну впливу на точність моделювання підозрюваних на незначущість параметрів початкової моделі. Саме ця обставина зумовлює обчислювальну складність даного блоку алгоритмів розв'язування задачі параметричної редукції простору параметрів.

За уявної пропозиції щодо малості відхилень $\Delta\rho$ від заданого значення вектору параметрів ρ_3 початкової моделі рівняння відносно похибки Δy має вид

$$f_y(\Delta y) + f_\rho(\Delta\rho) + \varphi = 0, \quad (3.24)$$

де f_y, f_ρ — матриці Якобі вектор-функції $f(y, V, \rho)$ по відповідних аргументах, φ — відома функція.

Якщо $\Delta y_r = y_3 - y_r$ мале, то шуканий вектор прирощень повинен задовольняти системі

$$f_y(\Delta y_r) + f_\rho(\Delta \rho) + \varphi = 0 \quad (3.25)$$

і за умови максимальності рангу матриці f_ρ , що на практиці зазвичай й буває, може бути визначений з (3.25) як

$$\Delta \rho = -(f_\rho^T f_\rho)^{-1} f_\rho^T f_y(\Delta y_r) + \varphi = 0, \quad (3.26)$$

де f_ρ^T означає транспоновану матрицю f_ρ .

Інший підхід до розв'язування задачі базується на перетворенні заданої множини Ω_ρ в еквівалентну, в смислі точності множини $\Omega_{\bar{\rho}}$, де $\bar{\rho}$ — усічений вектор параметрів вихідної (початкової) моделі, компоненти якого обираються з урахуванням апріорної значущості параметрів, лінійності системи (3.23) відносно $\bar{\rho}$, а також мінімальності розмірності. При виборі $\bar{\rho}$ корисною може виявитися концепція *фіктивності параметрів* та низка інших ідей, які використовуються при організації контролю процесів моделювання з використанням методів параметричної ідентифікації. Перетворення Ω_ρ в $\Omega_{\bar{\rho}}$ само по собі являє достатньо складну задачу, розв'язування якої потребує залучення апарату теорії точності. Тим не менш, його застосування може виявитися доцільним, якщо дане перетворення виконано за яких-небудь причин (наприклад, з метою організації контролю, про який згадувалося вище).

П'ятий блок. Оцінка виконання умови $\rho_e \in \Omega(\alpha)$ не являє собою складності і є очевидною, причому у випадку лінійної залежності $\varepsilon_{y\rho}$ от ε_ρ коефіцієнт узгодження визначається як

$$\alpha_r = \left[\rho_\rho(\rho_3, \rho_r) \right] / \varepsilon_\rho.$$

Шостий блок. Результатом виконання попередніх блоків є значення вектору параметрів ρ_r редуційної моделі та її вектору узгодженості α_r з похибкою вихідних даних. Якщо позначити нижню та верхню границі векторів коефіцієнту узгодження як α_n та α_b , то задача вважається розв'язаною при виконанні умови $\alpha_n \leq \alpha_r \leq \alpha_b$. В іншому випадку здійснюється повернення до другого блоку. При

цьому, якщо $\alpha_n < \alpha_r$, то формування нового значення вектору параметрів ρ_r повинно здійснюватися зі збільшенням числа апіорно незначущих параметрів і навпаки, у випадку, якщо $\alpha_r < \alpha_n$.

Оцінюючи в цілому практичну цінність алгоритмів розв'язування задачі параметричної редукції в просторі параметрів, слід відзначити, що вузловим моментом, який визначає можливість його застосування, є необхідність переобчислення відхилень реакції редукційної моделі від реакції, заданої в область початкових даних. Трудомісткість цього процесу в основному і визначає обчислювальну складність алгоритмів.

Структура алгоритмів «точнішої» параметричної редукції моделей в просторі координат на виході визначається сукупністю наступних основних блоків:

1. Визначення реакції початкової моделі на обраному режимі.
2. Оцінка області можливих розв'язків вихідної системи, зумовленої неточністю завдання вектору параметрів ρ_3 , тобто, оцінка $\varepsilon_{y\rho}$.
3. Визначення вектору параметрів ρ_3 такого, що $N_{\rho r} < N_{\rho_3}$ або, іншими словами — вибір редукційної моделі.
4. Визначення реакції редукційної моделі.
5. Оцінка відхилення $y_3 - y_r$ і визначення значення коефіцієнта узгодженості.
6. Аналіз результатів редукції у випадку, якщо результати задовільні, з наступним переходом на сьомий блок, інакше — повернення до третього блоку.
7. Корекція редукційної моделі.

Розглянемо деякі із вказаних блоків алгоритму з точки зору їх практичної реалізації.

Перший блок. Реалізується аналогічно реалізації першого блоку алгоритмів простору параметрів.

Другий блок. Є самим складним у обчислювальному відношенні. Дійсно, задача оцінки області можливих значень координат заданої моделі, зумовленої неточністю завдання параметрів, являє собою класичну задачу теорії точності з оцінювання похибки, яка не усувається. Обчислювальна складність розв'язування даної задачі добре відома. В теорії точності розроблено різні підходи до аналізу похибки, яка не усувається. Використання того або іншого підходу залежить від виду моделі та постановки задачі аналізу точності, яка

здійснюється з урахуванням як мети аналізу, так і вихідної інформації щодо похибки завдання параметрів.

Мета аналізу зазвичай віднаходить відображення у вимогах до числових характеристик множини $\Omega_{\Delta y}$. Початковою інформацією про похибку завдання параметрів зазвичай є сукупність як властивостей векторів $\rho \in \Omega_{\rho}$, так і відповідних числових характеристик. Так, вектор ρ може розглядатися як випадковий або детермінований, змінний або постійний. У випадку статистичного аналізу необхідно задавати розподіл вектору ρ по $\rho \in \Omega_{\rho}$, або моменти цього розподілу. При детермінованому аналізі основною вихідною числовою інформацією є завдання області Ω_{ρ} .

При статистичному завданні вектора $\rho \in \Omega_{\rho}$ виникає задача оцінювання статистичних характеристик множини $\Omega_{\Delta y}$ (зазвичай деякі числові значення, або моментні характеристики розподілу). В загальному випадку розв'язування цієї задачі можливе за допомогою апарату функцій чутливості, *інтерполяційними методами*, а також методом статистичних випробувань. Задля досягнення мети «точнісної» параметричної редукції при статистичному завданні вектора параметрів $\rho \in \Omega_{\rho}$ достатньо знання перших двох моментів розподілу розв'язків редукційної моделі — математичного очікування та дисперсії, наявність яких дозволяє побудувати оцінку $\varepsilon_{y\rho}$ області $\Omega_{\Delta y}$. Необхідно зауважити, що статистичне подання вектору параметрів само по собі являє складну задачу. На практиці визначення параметрів математичних моделей, тобто параметрична ідентифікація. Є складним обчислювальним процесом зі значним числом первісних похибок. Аналіз розподілу цих похибок, який значно перевищує по складності задачу параметричної ідентифікації, як правило не здійснюється. Таким чином, при розробці алгоритмів «точнісної» параметричної редукції необхідно орієнтуватися на наявність мінімальної вихідної інформації відносно похибки завдання параметрів, а саме, на значення будь-якої міри ε_{ρ} області Ω_{ρ} . За цих умов реалізація другого блоку алгоритму параметричної редукції, що розглядається, зводиться до аналізу похибки, яка не усувається, в детермінованій постановці.

За умови достатньої малості ε_{ρ} , тобто при достатньо високій точності завдання параметрів, оцінювання міри $\varepsilon_{y\rho}$ області $\Omega_{\Delta y}$

може бути здійснено методами лінійної теорії точності на основі як отримання і аналізу рівнянь для похибок, так і при використанні апарату функцій чутливості, причому останнє є більш пріоритетним в смислі можливості обчислювання та точності результатів, які отримуються.

Для моделей, рівняння стану яких є такими, що диференціюються по y та ρ в рамках лінійної теорії точності, похибка Δy , зумовлена похибками $\Delta \rho$ вектору параметрів, визначається наступним чином

$$\Delta y = S \Delta \rho, \quad (3.27)$$

де S — $(n \times m)$ — матриця функцій чутливості.

Опис $\Omega_{\Delta y}$ можна отримати з (3.27) при використанні векторних мір $\vec{\varepsilon}_{y\rho}$, які дозволяють покомпонентно описати область можливих значень реакції початкової моделі. Практичний інтерес являє собою використання в якості компонент вектора $\vec{\varepsilon}_{y\rho}$ оцінок зверху для компонент вектора Δy . На основі (3.27) можна записати

$$|\Delta y_i| \leq \sum_{j=1}^m |S_{ij} \Delta \rho_{j \max}|, \quad i = \overline{1, n}, \quad (3.28)$$

де $\Delta \rho_{j \max}$ — максимально можливі приращення параметрів початкової моделі; S_{ij} — функції чутливості i -ої змінної на виході по j -ому параметру.

Практичне визначення елементів матриці S базується на скінченно-різницевої апроксимації. Так, якщо

$$\Delta y^{(j)} = y_3 - y^{(i)}$$

($y^{(j)}$ — реакція моделі, коли j -а компонента вектора ρ_3 отримує приріст $\Delta \rho_j$), то

$$S_{ij} \approx (\Delta y^{(j)} / \Delta \rho_j) \quad (3.29)$$

і, таким чином, наближені значення функції чутливості може бути визначено при відомому y_3 шляхом m -кратного аналізу вихідної (початкової) моделі з параметрами, що послідовно збуджуються.

Як витікає з (3.28) для побудови оцінки області можна обмежитися обчисленням функцій $|S_{ij} \Delta \rho_{j \max}|$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$, які являють собою оцінки внеску похибки j -го параметра в оцінку похибки i -ої координати.

Третій блок. Вибір вектора параметрів редукційної моделі може реалізовуватися на основі застосування наступних способів.

Перший спосіб полягає у апіорному призначенні вектору ρ_r з урахуванням дослідницького досвіду та апіорної значущості оцінки параметрів. Реалізація його аналогічна реалізації другого блоку алгоритму «точнісної» параметричної редукції в просторі параметрів.

В основі другого способу лежить використання інформації, яку можна отримати при виконанні другого блоку даного алгоритму, з метою виділення сукупності підозрюваних на незначущість параметрів.

Праву частину оцінки (3.28) може бути представлено у вигляді двох доданків, які суттєво відрізняються за своєю величиною, тобто:

$$\sum_{j=1}^m |S_{ij} \Delta \rho_{j \max}| = \delta_{1i} + \delta_{2i}, i = \overline{1, n}, \quad (3.30)$$

причому $[\delta_{2i} / (\delta_{1i} + \delta_{2i})] \leq k, k > 0$.

Нехай I_{2i} — множина параметрів, прирощення яких утворює суму δ_{2i} . Тоді перетинання $\bigcap_i I_{2i} = I_k$ визначить множину параметрів, внесок яких в оцінку міри множини не перевищує 100%. Якщо $I_k \neq 0$ і воно досить велике, то малість оцінки внеску відповідних параметрів свідчить про малий їх вплив на значення координат на виході. Звідси витікає. Що такі параметри, в першу чергу може бути віднесено до підозрюваних на незначущість.

При виборі значення k — коефіцієнта внеску апіорі незначущих параметрів — на початковій стадії «точнісної» параметричної редукції доцільно керуватися лінійною теорією точності. Так, якщо уявити, що відхилення Δy_r реакції редукційної моделі від реакції початкової моделі може бути оцінено як

$$|\Delta y_{ri}| \leq \sum_{j: P j \in I_k} |S_{ij} \rho_j| \approx \frac{\|\rho_3\|}{\varepsilon_\rho} \sum_{j: P j \in I_k} |S_{ij} \rho_{j \max}| \leq \frac{\|\rho_3\|}{\varepsilon_\rho} \delta_{2i}, i = \overline{1, n}, \quad (3.31)$$

то умова $y_r \in \Omega_y$ буде виконуватися, якщо

$$|\Delta y_{ri}| \leq (\delta_{2i} / k), i = \overline{1, n},$$

що з урахуванням (3.31) дає $k \approx (\varepsilon_\rho / \|\rho_3\|)$.

Таким чином, початкове значення k_0 коефіцієнту внеску апіорі незначущих параметрів визначається мірою похибки завдання параметрів моделі, яка підлягає редукції, і може бути прийнятим таким, що дорівнює $(\varepsilon_\rho / \|\rho_3\|)$.

Процес «точнісної» параметричної редукції являє собою, в загальному випадку, ітераційну процедуру, причому, на кожній ітерації повинна відбуватися зміна множини підозрюваних на незначущість параметрів. У зв'язку з цим, реалізація третього блоку алгоритму, який розглядається, повинна містити ранжування множин апріорі незначущих параметрів.

Викладений другий спосіб призначення незначущих параметрів достатньо просто алгоритмізується. Тому, на його основі, достатньо просто здійснюється ранжування параметрів.

Реалізація процесу ранжування апріорі незначущих параметрів базується на тому очевидному фактові, що $I_{k_1} \supseteq I_{k_2}$ при $k_1 > k_2$. Таким чином, забезпечивши формування послідовності значень коефіцієнта внеску k_2 апріорі незначущих параметрів і визначення відповідних цим значенням множин I_{k_l} , можна організувати розв'язування задачі «точнісної» параметричної редукції у вигляді процесу послідовних наближень. Значення ж k_0 слід рекомендувати в якості початкового.

Практичний інтерес являє вибір вектору параметрів редукційної моделі шляхом комбінування описаних двох способів. При цьому апріорі незначущі параметри, призначені на основі апріорної оцінки значущості, повинні фіксуватися в наборах I_{k_l} сум δ_{2i} , а інші параметри наборів I_k повинні визначатися виходячи з умови заданого внеску в загальну оцінку похибки. Також як і попередньому випадку, при реалізації комбінованого способу призначення апріорі незначущих параметрів може бути проведено ранжування множин незначущих параметрів та організовано процес послідовних наближень розв'язку задачі «точнісної» параметричної редукції.

Четвертий блок. Для оцінки реакції y_r редукційної моделі за методом параметричної редукції в просторі координат на виході, слід, в першу чергу, з'ясувати принципову можливість зведення процесу розв'язування задачі у вигляді машинного процесу послідовних наближень. Це означає наявність можливості повної автоматизації «точнісної» параметричної редукції складних моделей.

Аналіз наведених структур алгоритмів «точнісної» параметричної редукції в просторах параметрів та координат на виході дозволяє зробити порівняльну оцінку їх властивостей в смислі обчислювальної складності. Основним якісним показником при цьому є те, що для алгоритмів простору параметрів самий складний у обчислювальному відношенні блок — визначення вектору ρ_3 — розташова-

но в ітераційному циклі, в той же час як основний за складністю блок алгоритмів простору координат на виході — оцінка $\varepsilon_{y\rho}$ — в ітераційний цикл не входить. Крім того, слід врахувати, що неможливість формалізації прийомів визначення вектору ρ_r (методу проб та похибок), притаманна алгоритмам простору параметрів, ускладнює організацію машинного процесу і, таким чином, автоматизацію «точнісної» параметричної редукції.

Зазначене дозволяє зробити висновок про пріоритетність алгоритмів «точнісної» параметричної редукції в просторі координат на виході при спрощенні достатньо складних математичних моделей.

3.4. Підхід до програмної реалізації процесів редукції моделей динамічних систем

Викладені принцип та алгоритми «точнісної» параметричної редукції математичних моделей свідчать про складний характер процесу побудови відповідних спрощених моделей у випадках, що становлять практичний інтерес. Ця обставина зумовлює необхідність застосування обчислювальної техніки для проведення редукції моделей, яка розглядається, що передбачає розробку машинної методики шляхом програмної реалізації основних положень та алгоритмів.

Обмежені можливості алгоритмів «точнісної» параметричної редукції першої групи (можливість застосування лише для простих в смислі аналізу похибки моделей, яка не усувається) дозволяють виключити їх з числа алгоритмів, що реалізуються машинним способом. Щодо алгоритмів редукції в просторі параметрів і координат на виході, то, в загальному випадку, їх машинна реалізація необхідна. При цьому основними програмними блоками є наступні: блоки оцінки чутливості та корекції моделі, яка підлягає редукції, а також блок варіації параметрів, що забезпечує їх роботу. Останній використовується для реалізації алгоритмів редукції в просторах координат на виході. Також в число програмних блоків входять: блок визначення еквівалентних значень параметрів редукційної моделі (для реалізації алгоритмів редукції в просторі параметрів); блок визначення незначущих параметрів (для обох типів алгоритмів). Такі блоки алгоритмів редукції як блок визначення реакцій початкових і блок спрощених моделей породжують загальний програмний блок визначення реакції моделі.

Сукупність, таким чином визначених основних програмних блоків разом з управляючою програмою, складає основу комплексу програм «точнісної» параметричної редукції математичних моделей. Структуру комплексу представлено блок-схемою, наведеною на рис. 3.1. В ній відображено чотири рівні основних програмних блоків, що реалізують розв'язок задачі редукції. Перший рівень цієї ієрархії — керуюча програма. Вона ініціює програмні блоки інших рівнів, організовує черговість їх роботи та обмін даними (на рисунку стрілками позначено управління та зв'язки між програмними блоками, причому штриховими стрілками виділено обмін даними). До другого рівня віднесено основні блоки алгоритмів редукції як в просторі параметрів, так і в просторі координат на виході.

Третій рівень представлено блоком визначення реакції моделі, який використовується для обчислення реакції початкової та редукційної моделей як з не збудженими параметрами, так і з параметрами, що зазнали збуджень.

Четвертий рівень в структурній схемі складають допоміжні програмні блоки завдання режиму та варіації параметрів моделей. В блоці оцінки чутливості обчислюються функції чутливості $(\partial y_i / \partial \rho_j)$ координат на виході y_i $i = \overline{1, n}$ моделі по відношенню до параметрів ρ_j , $j = \overline{1, m+n}$, які у подальшому використовуються як для оцінки області невизначеності $\Omega_{\Delta y}$ координат на виході моделі, так і для оцінки внеску параметра, що розглядається, в цю невизначеність та їх ранжування. Характерною рисою блоку є включення до вектору параметрів моделі вектору початкових умов рівнянь динаміки для оцінки функцій чутливості координат за початковими умовами та оцінки внеску збуджень останніх в область невизначеності координат на виході.

При використанні для визначення функцій чутливості розділених різниць першого порядку (числового диференціювання координат на виході по параметрах) оцінка точності обчислень функцій чутливості здійснюється на основі оцінки похибки обчислення розділених різниць координат. Точність обчислення останніх задається величиною Δ_c , яка є оцінкою повної похибки розв'язку рівнянь динаміки та стає відомою після оптимального вибору числового методу інтегрування. Практично достатня точність оцінки функцій чутливості досягається у випадку, коли збуджені значення координат y та ρ відрізняються від не збуджених на величину порядку $10\Delta_c$.

Блок визначення незначущих параметрів моделі дає на виході номери параметрів, що виявляються «кандидатами» в незначущі. Визначення цих претендентів на незначущість може бути здійснено з використанням емпірико-евристичних підходів. Якщо до складу параметрів моделі включено початкові умови, то в блоці, який розглядається, повинно бути вилучено обнуління початкових умов при інтегруванні рівнянь динаміки. Це ж відноситься і до параметрів, обнуління яких не має фізичного смислу. Інші блоки другого рівня являють собою програмну реалізацію описаних в параграфі 3.3. прийомів визначення еквівалентних значень параметрів моделі, яка зазнала редукції, та її корекції.

Призначення та програмна реалізація блоків третього та четвертого рівнів коментарів не потребують.

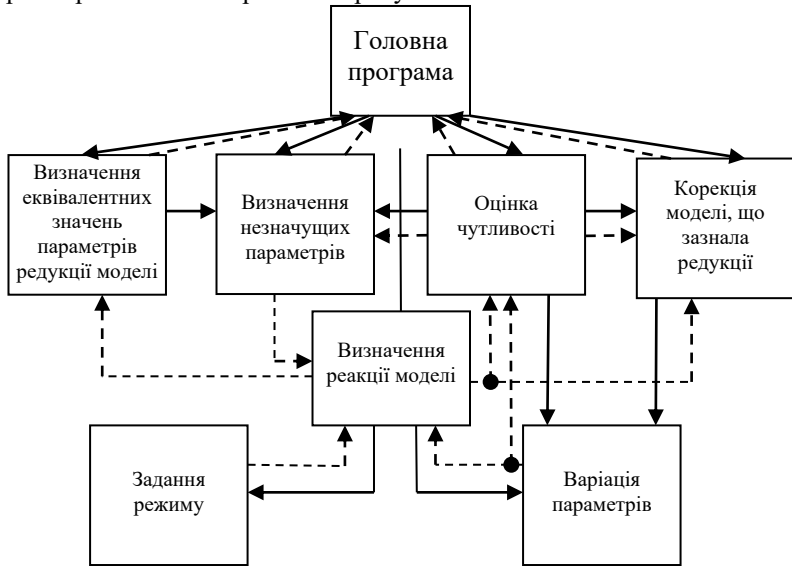


Рис 3.1. Структура програмного комплексу «точнісної» параметричної редукції математичних моделей

Необхідність забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем у реальному часі, а також відповідні вимоги до апаратної частини підсистем керування і контролю, обсягу пам'яті, надійності та безпеки суттєво впливають на рівень складності математичних описів динамічних процесів у системах. Це потребує застосування замість складних математичних описів більш простих моделей, призначених для задач побудови систем і

моделювання. Виходячи з практичних міркувань задачу корегування динамічної моделі пропонується ставити як задачу уточнення або визначення параметрів моделі. Спираючись на ідею узгодження виду моделі з точністю вихідних даних, формулюється задача «точнісної» редукції як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які можна співставити за точністю зі спостереженнями. Конструктивність процедури спрощення моделі за принципом «точнісної» редукції забезпечується запропонованим визначенням коефіцієнта узгодженості α , як «точнісної» характеристики редукційної моделі. Застосування міри складності моделі при цьому дозволяє отримати практичний вираз для визначення оптимально спрощеної моделі. У випадку ускладнень, пов'язаних з оцінкою сигнальних показників точності моделей, доцільне використання параметричного підходу до побудови спрощених моделей, сутність якого полягає у заміні значень певних параметрів вихідної моделі на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності спрощених моделей. Введені поняття дозволяють отримати суттєвий теоретичний результат для методів редукції моделей, а саме: для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує спрощена α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності. Отримані результати забезпечують можливість алгоритмічної та програмної організації процесів математичної редукції.

4. РОЗРОБКА МЕТОДУ СТРУКТУРНОГО СПРОЩЕННЯ БАЗОВИХ МОДЕЛЕЙ ОБ'ЄКТІВ З РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

4.1. Інтерполяційний метод (опорних перерізів) для моделювання об'єктів з розподіленими параметрами

Одним із найбільш відомих методів спрощення моделей об'єктів з розподіленими параметрами (ОРП, рівнянь із частинними похідними) є метод прямих [98], який ґрунтується на дискретизації області розв'язку за просторовою змінною з деяким кроком h і отриманні апроксимуючої системи N (кількість кроків) звичайних диференціальних рівнянь [127, 188]. Як правило, для отримання досить точного шуканого розв'язку за допомогою даної системи значення h має бути невеликим, а кількість N рівнянь системи має бути значною [16, 65].

Для дослідження багатьох типів об'єктів з розподіленими параметрами [88, 99, 10] використання інтерполяційного підходу [7, 173], до якого відноситься метод прямих, дозволяє будувати ефективні моделі з більш простою структурою, тобто системи з невеликою кількістю скалярних диференціальних рівнянь, отриманих для малої кількості опорних перерізів. Відповідний метод побудови спрощених моделей — метод опорних перерізів розглядається в даному розділі. Враховуючи дуже велике розмаїття об'єктів з розподіленими параметрами за фізичним змістом і математичними описами [106], метод розглядається без обмеження загальності стосовно широко розповсюджених об'єктів з розподіленими параметрами теплотехнічного призначення (вимірювальні перетворювачі, джерела і перетворювачі тепла як об'єкти керування і т.п.), які відносяться до об'єктів як гіперболічного, так і параболічного типу [15, 113].

Задачі із розв'язком, який має властивість симетрії за просторовими координатами складають окремий клас задач та зустрічаються при дослідженні пружних коливань, теплопровідності, теорії потенціалу, акустики [12, 20, 194]. Наприклад, нестационарне температурне поле ізотропної пластинки, яка знаходиться в потоці рідини

із внутрішнім джерелом тепла сталої потужності. Запропонований метод розглянемо стосовно задачі моделювання нестационарних теплових процесів у необмеженій пластині з симетричними граничними умовами першого роду у наступній постановці [25, 109].

Температура $T(x, t)$ на краях необмеженої пластини примусово змінюється за законом $F_{zpl}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу (рис. 4.1). Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{пв}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

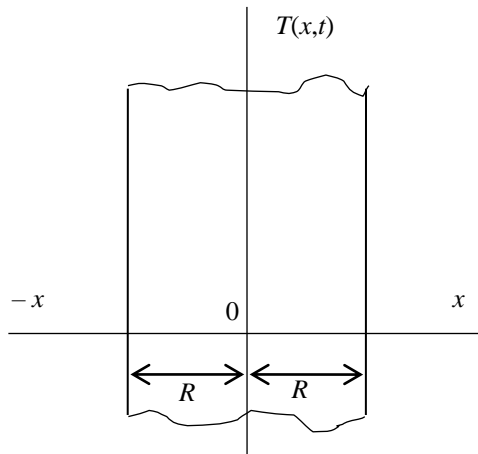


Рис. 4.1. Схематичне зображення об'єкта моделювання.

У цьому випадку нестационарний тепловий процес у даному об'єкті з розподіленими параметрами описується одномірним гіперболічним рівнянням теплопровідності [66, 117, 130, 133]:

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} + \tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right) + f(t), \quad -1 \leq x \leq 1,$$

де $c(x)$ — питома теплоємність; $\rho(x)$ — густина; $k(x)$ — коефіцієнт теплопровідності; $f(t)$ — внутрішнє джерело тепла; x — просторова координата, значення якої $x = -1$ і $x = 1$ відповідають координатам входу і виходу об'єкта; t — час. Оскільки час релаксації τ_r теплового потоку є малою величиною (для газів та металів має порядок відповідно 10^{-9} с і 10^{-11} с), то для багатьох практичних розрахунків (при відсут-

ності високої інтенсивності зміни теплового потоку) додатковим доданком $\tau_r \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial t^2}$, який враховує скінченну швидкість переносу теплоти, можна знехтувати, що дозволяє отримати модель теплоперенесення у вигляді рівняння параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} + q(x) f(t), \quad -1 \leq x \leq 1, \quad (4.1)$$

у якому $b(x) = \frac{k'(x)}{c(x)\rho(x)}$, $q(x) = \frac{1}{c(x)\rho(x)}$, а коефіцієнт температуропровідності $a(x) = \frac{k(x)}{c(x)\rho(x)}$.

Припустимо, що розв'язок $T(x, t)$ рівняння (4.1) може бути апроксимований рядом

$$T(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) Q_n(x), \quad (4.2)$$

в якому функції $V_n(t)$ і $Q_n(x)$ підлягають визначенню, причому $Q_n(x)$ повинні мати похідні другого порядку. Тоді похідні $\frac{\partial T(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}$ можуть бути розвинені в ряд

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial x} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{dQ_n(x)}{dx}; \quad \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(t) \frac{d^2 Q_n(x)}{dx^2}. \quad (4.3)$$

Для апроксимації функції $T(x, t)$ обмежимо ряд (4.3) і побудуємо інтерполяційний поліном Лагранжа за п'ятьма опорними точками $\{x_i\} = \left\{-1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1\right\}$ (інтервал $[-1, 1]$ розбиваємо рівномірно на 4 частини):

$$T(x, t) \approx L_4(x, t) = \sum_{i=0}^4 T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^4 \frac{x - x_k}{x_i - x_k}. \quad (4.4)$$

Спростивши (4.4) та беручи до уваги, що $T(-1, t) \equiv F_{zp1}^-(t)$ та $T(1, t) \equiv F_{zp1}^+(t)$, отримаємо

$$\begin{aligned}
 T(x, t) &\approx \frac{1}{6}x(4x^3 - 4x^2 - x + 1)F_{ep1}^-(t) - \\
 &-\frac{4}{3}x(2x^3 - x^2 - 2x + 1)T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) - \quad (4.5) \\
 &-\frac{4}{3}x(2x^3 + x^2 - 2x - 1)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{6}x(4x^3 + 4x^2 - x - 1)F_{ep1}^+(t)
 \end{aligned}$$

Продиференціювавши (4.5) відповідну кількість разів за координатою x , отримаємо вирази для частинних похідних першого та другого порядку

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} &\approx \left(\frac{8}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{1}{3}x + \frac{1}{6}\right)F_{ep1}^-(t) - \\
 &-\left(\frac{32}{3}x^3 - 4x^2 - \frac{16}{3}x + \frac{4}{3}\right)T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + 2x(8x^2 - 5)T(0, t) - \quad (4.6) \\
 &-\left(\frac{32}{3}x^3 + 4x^2 - \frac{16}{3}x - \frac{4}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(\frac{8}{3}x^3 + 2x^2 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{6}\right)F_{ep1}^+(t),
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} &\approx \left(8x^2 - 4x - \frac{1}{3}\right)F_{ep1}^-(t) - \left(32x^2 - 8x - \frac{16}{3}\right)T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + \\
 &+ 2(24x^2 - 5)T(0, t) - \left(32x^2 + 8x - \frac{16}{3}\right)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \quad (4.7) \\
 &+ \left(8x^2 + 4x - \frac{1}{3}\right)F_{ep1}^+(t).
 \end{aligned}$$

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.6) і (4.7), отримаємо

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} &= W_1(x, a(x), b(x))F_{ep1}^-(t) + W_2(x, a(x), b(x))T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + \\
 &+ W_3(x, a(x), b(x))T(0, t) + W_4(x, a(x), b(x))T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \quad (4.8) \\
 &+ W_5(x, a(x), b(x))F_{ep1}^+(t) + q(x)f(t),
 \end{aligned}$$

де функції $W_1 - W_5$ визначаються шляхом зведення спільних доданків і мають вигляд многочленів третього степеня змінної x .

Вважаючи у (4.8) послідовно $x \in \{x_i\} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $i = \overline{1, 3}$, отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення невідомих $T\left(-\frac{1}{2}, t\right)$, $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\begin{aligned} & \frac{dT(x_i, t)}{dt} = \\ & = W_2(x_i, a(x_i), b(x_i))T\left(-\frac{1}{2}, t\right) + W_3(x_i, a(x_i), b(x_i))T(0, t) + \\ & + W_4(x_i, a(x_i), b(x_i))T\left(\frac{1}{2}, t\right) + W_1(x_i, a(x_i), b(x_i))F_{zpl}^-(t) + \\ & W_5(x_i, a(x_i), b(x_i))F_{zpl}^+(t) + q(x_i)f(t). \end{aligned} \quad (4.9)$$

Система (4.9) диференціальних рівнянь розв'язується з початковими умовами $F_{пв}(x_i)$, які обчислюються із початкової умови

задачі при відповідних значеннях $x \in \{x_i\} = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\}$, $i = \overline{1, 3}$.

Розв'язок системи (4.9) дозволяє обчислити, скориставшись формулою (4.5), наближені значення функції $T(x, t)$ у будь-якій точці.

Для задач, що мають симетричний розв'язок і симетричні граничні умови, виберемо функцію $Q_n(x) = x^{2n}$ і ряд (4.3) обмежений

трьома членами із опорними точками $x_0 = 0, x_1 = \frac{1}{2}, x_2 = 1$. Тоді розв'язок $T(x, t)$ можна наблизити інтерполяційним поліномом Лагранжа $L_2(x, t)$:

$$T(x, t) \approx L_2(x, t) = \sum_{i=0}^2 T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^2 \frac{x^2 - x_k^2}{x_i^2 - x_k^2} \quad (4.10)$$

за трьома заданими точками X_0, X_1, X_2 (вирази частинних похідних отримуються шляхом диференціювання (4.10) за змінною x). Після розкриття (4.10) маємо:

$$\begin{aligned} & T(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) + \\ & + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{zpl}(t). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Продиференціювавши (4.11) за координатою x , отримуємо вираз для частинної похідної першого порядку

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)T(0, t) - \\ & - \frac{32}{3}x(2x^2 - 1)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{zpl}(t), \end{aligned} \quad (4.12)$$

звідки отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2} \approx & (48x^2 - 10)T(0,t) - \\ & - \left(64x^2 - \frac{32}{3}\right)T\left(\frac{1}{2},t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{сп1}(t). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.13) і (4.12), отримуємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = & \left[16x^2(3a(x) + xb(x)) - 10(a(x) + xb(x))\right]T(0,t) + \\ & + \left[-64x^2\left(a(x) + \frac{1}{3}xb(x)\right) + \frac{32}{3}(a(x) + xb(x))\right]T\left(\frac{1}{2},t\right) + \\ & + \left[16x^2\left(a(x) + \frac{1}{3}xb(x)\right) - \frac{2}{3}(a(x) + xb(x))\right]F_{сп1}(t) + q(x)f(t). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Вважаючи послідовно $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$, отримуємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь першого порядку для визначення $T(0,t)$ та $T\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{dT(0,t)}{dt} &= -10a(0)T(0,t) + \frac{32}{3}a(0)T\left(\frac{1}{2},t\right) - \\ &- \frac{2}{3}a(0)F_{сп1}(t) + q(0)f(t); \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} &= \left[2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right)\right]T(0,t) - \frac{8}{3}\left[2a\left(\frac{1}{2}\right) - b\left(\frac{1}{2}\right)\right] \times \\ &\times T\left(\frac{1}{2},t\right) + \frac{1}{3}\left[10a\left(\frac{1}{2}\right) + b\left(\frac{1}{2}\right)\right]F_{сп1}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t). \end{aligned} \right. \quad (4.15)$$

До системи диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови $F_{ПВ}(0)$ та $F_{ПВ}\left(\frac{1}{2}\right)$.

Розв'язавши систему (4.15) та скориставшись формулою (4.11), отримаємо можливість обчислення наближеного значення функції $T(x,t)$ у будь-якій точці.

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі конкретної задачі, для якої:

$$\begin{aligned}
 a(x) &= \frac{b_2(a_0 - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 - a_2x^2 > 0, \quad 0 < a_2 \leq a_0, \\
 b_2 > 0, \quad b(x) &\equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \\
 f(t) &= b_1e^{-bt}, \quad F_{\text{ГР1}}(t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 - a_2)e^{-bt}, \\
 F_{\text{ПВ}}(x) &= a_0 - a_2x^2.
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

Задача (4.1), (4.16) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 - a_2x^2)e^{-bt}. \tag{4.17}$$

Із врахуванням (4.16) система (4.15) має вигляд:

$$\begin{cases}
 \frac{dT(0, t)}{dt} = a(0) \left[-10T(0, t) + \frac{32}{3}T\left(\frac{1}{2}, t\right) - \frac{2}{3}F_{\text{ГР1}}(t) \right] + f(t); \\
 \frac{dT\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2T(0, t) - \frac{16}{3}T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{10}{3}F_{\text{ГР1}}(t) \right] + f(t).
 \end{cases} \tag{4.18}$$

До диференціальних рівнянь задаються відповідні початкові умови, отримані із (4.16):

$$F_{\text{ПВ}}(0) = a_0, \quad F_{\text{ПВ}}\left(\frac{1}{2}\right) = a_0 - \frac{a_2}{4}. \tag{4.19}$$

Можна бачити, що в методі, який розглядається, просторовий інтервал, на якому шукається розв'язок вихідних рівнянь з частинними похідними, може бути розбитий рівномірно або нерівномірно на будь-яку кількість ділянок (інтерполяційних кроків), що також визначає порядок полінома, який апроксимує розв'язок. Для вибору способу розбиття можна скористатись апріорними даними, отриманими в результаті фізичного або обчислювального експерименту. За необхідності процес вибору опорних перерізів може бути оптимізований відповідно виразу (4.12).

Обчислювальний експеримент. Апробація методу проведена шляхом обчислювального експерименту [208] для задачі (4.1), (4.16) за кроку дискретизації $\tau = 10^{-4}$ с за часовою змінною при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 300$; $a_2 = 0,5$; $b_1 = 0,1$; $b_2 = 0,5$.

Тоді $a(0) = 150$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2399}{16}$, $f(0, t) = f\left(\frac{1}{2}, t\right) = 0,1e^{-0,1t}$,

$F_{\text{гп1}}(t) = 1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}$, $t \in [0, 5]$, $x \in [-1, 1]$. Для просторової координати вибрано крок дискретизації 0,05.

Система (4.18) чисельно розв'язувалась у середовищі Matlab за допомогою стандартної функції *ode15s*. Отримані результати використовувались для обчислення розв'язків для будь-яких значень просторової координати і для будь-якого моменту часу за допомогою формули (4.11), яка із врахуванням вибраних коефіцієнтів набуває вигляду

$$T(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)T(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)(1 - e^{-0,1t} + 299,5e^{-0,5t}). \quad (4.20)$$

Результати розв'язування модельної задачі представлені на рис. 4.2. В експерименті досліджувалась відносна похибка розв'язку. Наближений розв'язок задачі (4.1), (4.16) порівнювався із точним (4.17). Значення відносної похибки не перевищувало $\delta \leq 0,01$. Вигляд функції відносної похибки $\delta(x, t)$ представлений на рис. 4.3.

Отримана вище формула (4.11) справедлива для симетричних граничних умов першого роду. Якщо ж задано симетричні граничні умови другого роду

$$\left. \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} \equiv \pm F_{\text{гп2}}(t), \quad (4.21)$$

то апроксимаційний вираз функції $T(x, t)$ має вигляд:

$$T(x, t) \approx \frac{1}{7}T(0, t)(16x^4 - 32x^2) + \frac{1}{7}T\left(\frac{1}{2}, t\right)(-16x^4 + 32x^2) + T(0, t) + \frac{2}{7}x^2\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)F_{\text{гп2}}(t). \quad (4.22)$$

Продиференціювавши (4.22) за змінною x , отримаємо вираз частинної похідної першого порядку:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7}x(x^2 - 1) \times \left(T(0, t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right) + \frac{1}{7}x(8x^2 - 1)F_{\text{гп2}}(t). \quad (4.23)$$

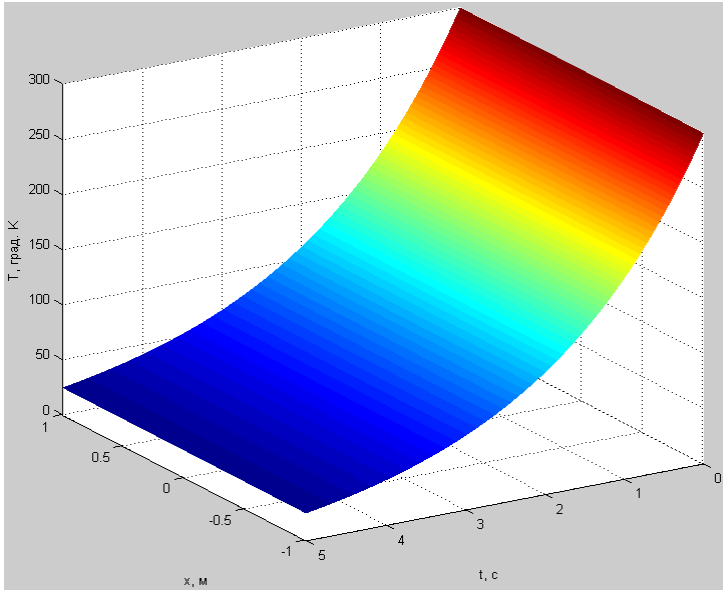


Рис. 4.2. Розподіл температури по товщині пластини із плином часу

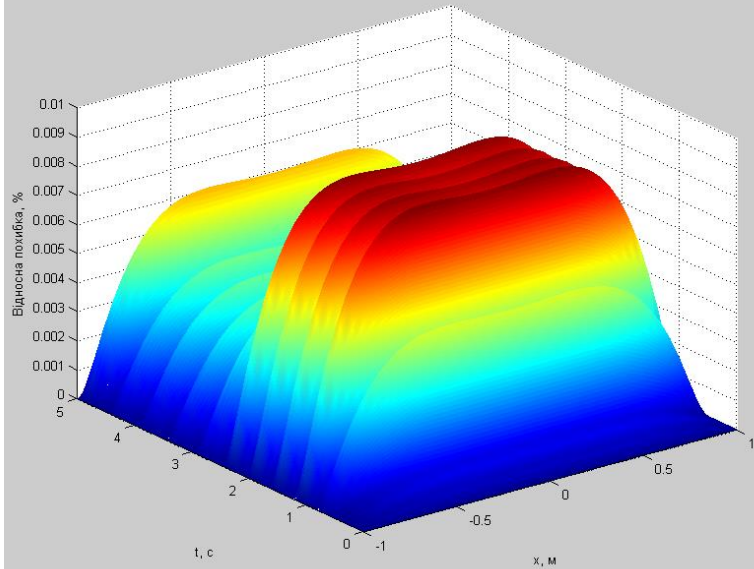


Рис. 4.3. Залежність відносної похибки від просторової та часової координат

Апроксимація частинної похідної другого порядку за змінною x функції $T(x, t)$ має вигляд:

$$\frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7}(3x^2 - 1) \left[T(0, t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \frac{1}{7}(24x^2 - 1) F_{zp2}(t). \quad (4.24)$$

Безпосередньою перевіркою шляхом підстановки переконаємось, що в точках $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$ вираз (4.22) перетворюється в тожність.

Підставивши в (4.1) вирази частинних похідних (4.24) і (4.23), отримаємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = & \\ = \frac{64}{7} \left[x^2 (3a(x) + xb(x)) - a(x) - xb(x) \right] & \left[T(0, t) - T\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \\ + \frac{1}{7} \left[8x^2 (3a(x) + xb(x)) - a(x) - xb(x) \right] & F_{zp2}(t) + q(x) f(t). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Система диференціальних рівнянь для визначення невідомих функцій $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ має вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dT(0, t)}{dt} = \frac{1}{7} a(0) \left[64 \left(T\left(\frac{1}{2}, t\right) - T(0, t) \right) - F_{zp2}(t) \right] + q(0) f(t); \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = \frac{8}{7} \left[2a\left(\frac{1}{2}\right) + 3b\left(\frac{1}{2}\right) \right] \cdot \left[T\left(\frac{1}{2}, t\right) - T(0, t) \right] + \\ + \frac{1}{7} \left[5a\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right) \right] F_{zp2}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right) f(t). \end{cases} \quad (4.26)$$

У випадку задання граничних умов третього роду

$$\left[\pm \alpha T(x, t) + \beta \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \right]_{x=\pm 1} \equiv F_{zp3}(t), \quad (4.27)$$

апроксимаційний вираз для наближеного обчислення значень функції набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 T(x, t) \approx & \left[\frac{4(3\alpha + 8\beta)x^4 - (15\alpha + 64\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0, t) + \\
 & + \left[\frac{16(\alpha + 4\beta)x^2 - 16(\alpha + 2\beta)x^4}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
 & + \frac{x^2(4x^2 - 1)}{3\alpha + 14\beta} F_{zp3}(t) + T(0, t).
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Продиференціювавши (4.28) за змінною x , отримаємо вираз для апроксимації частинної похідної першого порядку:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} \approx & \left[\frac{16(3\alpha + 8\beta)x^3 - 2(15\alpha + 64\beta)x}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0, t) + \\
 & + \left[\frac{32(\alpha + 4\beta)x - 64(\alpha + 2\beta)x^3}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2x(8x^2 - 1)}{3\alpha + 14\beta} F_{zp3}(t).
 \end{aligned} \tag{4.29}$$

Апроксимаційний вираз для частинної похідної другого порядку за змінною x набуде вигляду:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \approx & \left[\frac{48(3\alpha + 8\beta)x^2 - 30\alpha - 128\beta}{3\alpha + 14\beta} \right] T(0, t) + \\
 & + 32 \left[\frac{\alpha + 4\beta - 6(\alpha + 2\beta)x^2}{3\alpha + 14\beta} \right] T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{48x^2 - 2}{3\alpha + 14\beta} F_{zp3}(t).
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Після підстановки відповідних значень переконаємося, що в точках $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$ вираз (4.28) перетворюється в тотожність, приймаючи значення $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ відповідно.

Для визначення невідомих функцій $T(0, t)$ та $T\left(\frac{1}{2}, t\right)$ потрібно:

підставити в (4.1) вирази (4.30) та (4.29), отримати

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = & W_1(x)T(0, t) + W_2(x)T\left(\frac{1}{2}, t\right) + \\
 & + W_3(x)F_{zp3}(t) + q(x)f(t),
 \end{aligned} \tag{4.31}$$

де

$$W_1(x) = \frac{16x^2(3\alpha + 8\beta)(3a(x) + xb(x)) - 2(15\alpha + 64\beta)(a(x) + xb(x))}{3\alpha + 14\beta},$$

$$W_2(x) = \frac{32(\alpha + 4\beta)(a(x) + xb(x)) - 64x^2(\alpha + 2\beta)(3a(x) + xb(x))}{3\alpha + 14\beta},$$

$$W_3(x) = \frac{(16x^2 - 2)(3a(x) + xb(x)) + 4a(x)}{3\alpha + 14\beta};$$

отримати систему двох звичайних диференціальних рівнянь для визначення шуканого розв'язку на лініях $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dT(0,t)}{dt} = W_1(0)T(0,t) + W_2(0)T\left(\frac{1}{2},t\right) + W_3(0)F_{сп3}(t) + q(0)f(t), \\ \frac{dT\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = W_1\left(\frac{1}{2}\right)T(0,t) + W_2\left(\frac{1}{2}\right)T\left(\frac{1}{2},t\right) + W_3\left(\frac{1}{2}\right)F_{сп3}(t) + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t); \end{array} \right.$$

розв'язати систему.

Апроксимаційні формули для частинних похідних, отриманих з використанням граничних умов третього роду, є найбільш універсальними. Поклавши в них $\beta = 0$ або $\alpha = 0$, отримаємо випадки, що відповідають граничним умовам першого або другого роду відповідно і які співпадають із (4.11) та (4.22).

Аналіз запропонованого методу показав, що відносна похибка методу не перевищує 0,01%. Отримана точність узгоджується з точністю реальних вимірювань, а універсальність формул, які можна застосовувати для випадків симетричних граничних умов I, II, III роду і простота алгоритмів, за якими проводяться обчислення, дає змогу застосовувати метод у системах із обмеженими обчислювальними ресурсами (наприклад, для систем із вбудованими мікроконтролерами) або для розв'язування оптимізаційних задач, де є необхідність багаторазового знаходження розв'язків.

4.2. Нестационарні об'єкти з несиметричними граничними умовами

Розглянемо задачу побудови скалярної моделі процесів теплопровідності при несиметричних граничних умовах першого і другого роду у наступній постановці. Розглянемо необмежену пластину з несиметричними граничними умовами першого роду. Температура $T(x, t)$ на границях необмеженої пластини примусово змінюється за різними законами $F_{ep1}^{\pm}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, які задані своїми функціями часу (рис. 4.4). В середині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. В початковий момент часу маємо заданий по товщині розподіл температури $F_{IV}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

В цьому випадку, враховуючи обмеження, прийняті п. 4.1, параметрично спрощена модель теплоперенесення описується рівнянням в частинних похідних параболічного типу (4.1).

Для зведення задачі до випадку симетричних граничних умов представимо шукану функцію у вигляді суми

$$T(x, t) = V(x, t) + U(x, t), \quad (4.32)$$

де $V(x, t)$ задовольняє однорідним граничним умовам, а

$$U(x, t) = \frac{x+1}{2} F_{ep1}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{ep1}^-(t) \quad (4.33)$$

задовольняє умовам $F_{ep1}^{\pm}(t)$.

Введення змінної $U(x, t)$ дозволяє усунути несиметричність граничних умов і перейти до симетричного розв'язування задачі методом опорних перерізів відносно $V(x, t)$.

Продиференціювавши (4.32) один раз за змінною t і двічі за змінною x та підставивши отримані вирази в (4.1), із врахуванням (4.33) отримаємо рівняння

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + z(x, t), \quad (4.34)$$

в якому

$$z(x, t) = \frac{1}{2} b(x) [F_{ep1}^+(t) - F_{ep1}^-(t)] + \\ + \frac{x-1}{2} [F_{ep1}^-(t)]' - \frac{x+1}{2} [F_{ep1}^+(t)]' + q(x) f(t),$$

відносно допоміжної змінної $V(x, t)$ з однорідними граничними умовами

$$F_{\text{гп1}}(t) \equiv V(x, t)|_{x=\pm 1} = 0. \quad (4.35)$$

Замінивши в (4.34), згідно методу перерізів для випадку симетричних граничних умов, першу похідну виразом

$$\begin{aligned} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} \approx 2x(8x^2 - 5)u(0, t) + \\ + \frac{32}{3}x(1 - 2x^2)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{2}{3}x(8x^2 - 1)F_{\text{гп1}}(t) \end{aligned}, \quad (4.36)$$

другу похідну виразом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} \approx (48x^2 - 10)u(0, t) + \\ + \left(\frac{32}{3} - 64x^2\right)u\left(\frac{1}{2}, t\right) + \left(16x^2 - \frac{2}{3}\right)F_{\text{гп1}}(t), \end{aligned} \quad (4.37)$$

із врахуванням (4.35), маємо

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = \left[a(x)(48x^2 - 10) + b(x)(16x^3 - 10x) \right] V(0, t) + \\ + \left[a(x)\left(\frac{32}{3} - 64x^2\right) + b(x)\left(\frac{32}{3}x - \frac{64}{3}x^3\right) \right] V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z(x, t). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Вважаючи $x = 0$ та $x = \frac{1}{2}$, отримуємо систему двох звичайних

диференціальних рівнянь, які визначають величини $V(0, t)$ і $V\left(\frac{1}{2}, t\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = -10a(0)V(0, t) + \frac{32}{3}a(0)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z(0, t), \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = \left(2a\left(\frac{1}{2}\right) - 3b\left(\frac{1}{2}\right)\right)V(0, t) + \\ + \frac{1}{3}\left(8b\left(\frac{1}{2}\right) - 16a\left(\frac{1}{2}\right)\right)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + z\left(\frac{1}{2}, t\right), \end{cases} \quad (4.39)$$

в якій

$$z(0, t) = \frac{1}{2}b(0) \left[F_{z_{p1}}^+(t) - F_{z_{p1}}^-(t) \right] - \frac{1}{2} \left[\left(F_{z_{p1}}^-(t) \right)' + \left(F_{z_{p1}}^+(t) \right)' \right] + q(0)f(t),$$

$$z\left(\frac{1}{2}, t\right) = \frac{1}{2}b\left(\frac{1}{2}\right) \left[F_{z_{p1}}^+(t) - F_{z_{p1}}^-(t) \right] - \frac{1}{4} \left(F_{z_{p1}}^-(t) \right)' - \frac{3}{4} \left(F_{z_{p1}}^+(t) \right)' + q\left(\frac{1}{2}\right)f(t).$$

Початкові умови для системи (4.39) мають вигляд

$$V(0, t) \Big|_{t=0} = F_{IV}(0) - \frac{1}{2} \left(F_{z_{p1}}^+(0) + F_{z_{p1}}^-(0) \right),$$

$$V\left(\frac{1}{2}, t\right) \Big|_{t=0} = F_{IV}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{4} F_{z_{p1}}^+(0) - \frac{1}{4} F_{z_{p1}}^-(0). \quad (4.40)$$

Для наближеного обчислення $V(x, t)$ скористаємось відповідною формулою методу опорних перерізів:

$$V(x, t) \approx (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right) + \frac{1}{3}x^2(4x^2 - 1)F_{z_{p1}}(t).$$

Наближений розв'язок задачі в довільній точці отримуємо підстановкою в (4.32) отриманого виразу для $V(x, t)$ із врахуванням (4.35) та для $U(x, t)$ у відповідності з (4.33):

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x+1}{2} F_{z_{p1}}^+(t) - \frac{x-1}{2} F_{z_{p1}}^-(t) + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0, t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)V\left(\frac{1}{2}, t\right). \quad (4.41)$$

Процес реалізації отриманої моделі розглянемо на модельному прикладі задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (4.42)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-bt}, \quad (4.43)$$

$$F_{z_{p1}}^\pm(t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 \pm a_1 - a_2) e^{-bt}, \quad (4.44)$$

$$F_{HV}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (4.45)$$

Задача (4.1), (4.42)-(4.45) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 + a_1x - a_2x^2) e^{-bt}. \quad (4.46)$$

З врахуванням (4.43)-(4.44) система (4.39) приймає вигляд:

$$\begin{cases} \frac{dV(0,t)}{dt} = a(0) \left[-10V(0,t) + \frac{32}{3} V\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + b_2(a_0 - a_2)e^{-b_2t}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = a\left(\frac{1}{2}\right) \left[2V(0,t) - \frac{16}{3} V\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + b_2\left(a_0 + \frac{a_1}{2} - a_2\right)e^{-b_2t}. \end{cases} \quad (4.47)$$

Початкові умови (4.40) для системи (4.47) будуть

$$V(0,t)|_{t=0} = a_2, \quad V\left(\frac{1}{2},t\right)|_{t=0} = \frac{3}{4}a_2. \quad (4.48)$$

Наближений розв'язок (4.41) задачі в довільній точці приймає вигляд:

$$\begin{aligned} T(x,t) \approx & 1 - e^{-b_1t} + (a_0 + a_1x - a_2)e^{-b_2t} + \\ & + (4x^4 - 5x^2 + 1)V(0,t) + \frac{16}{3}x^2(1 - x^2)V\left(\frac{1}{2},t\right). \end{aligned} \quad (4.49)$$

Обчислювальні експерименти. Апробація методу проведена шляхом обчислювальних експериментів для ряду значень кроку дискретизації $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ по часовій змінній t при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0.5$, $b_1 = 0.1$, $b_2 = 0.5$. При цьому $a(0) = 1$, $a\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0, 10]$, $x \in [-1, 1]$. Для просторової координати обрано крок дискретизації 0,01.

Система (4.47) чисельно розв'язувалась за допомогою стандартної функції в середовищі Matlab. Отримані результати використовувались для обчислення результатів для довільних значень просторової координати та для довільного моменту часу згідно виразу (4.49).

Результат розв'язування модельної задачі для кроку $\tau = 0,2945$ с представлений на рис. 4.4.

В експериментах досліджувалась залежність відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації. Наближений розв'язок задачі (4.1), (4.42)-(4.45) порівнювався з точним розв'язком (4.46). Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку $\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$ від кроку дискретизації τ наведена на рис. 4.5. Для кроку дискретизації $\tau = 0,2945$ с отримано найменше значення відносної похибки $\delta = 0,0086$. Вигляд функції відносної похибки $\delta(t, x)$ для даного кроку наведено на рис. 4.6.

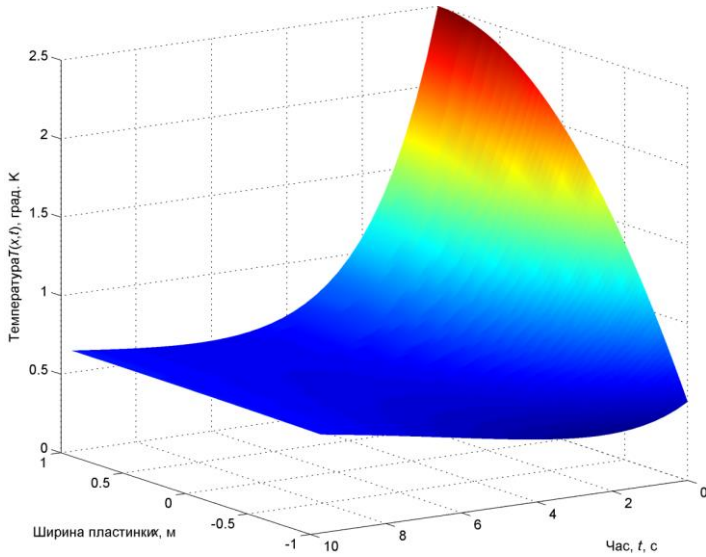


Рис. 4.4. Залежність температури від просторової координати і часу

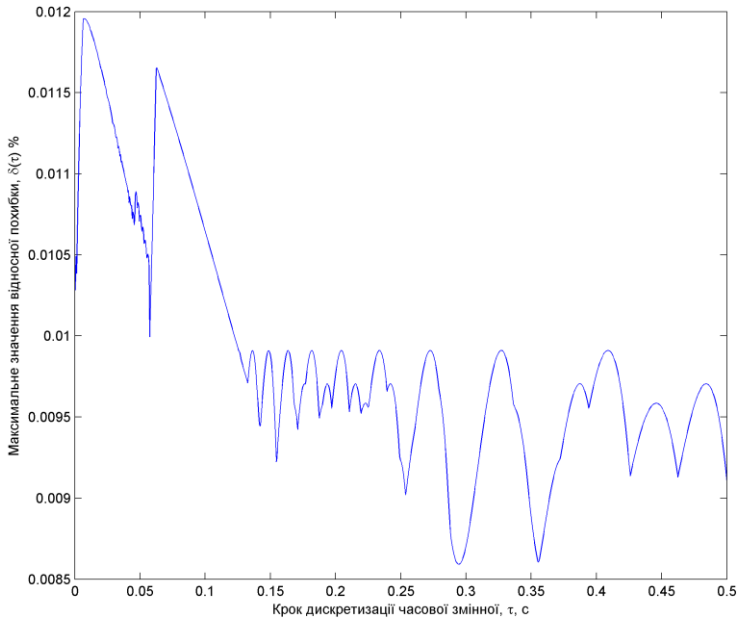


Рис. 4.5. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації

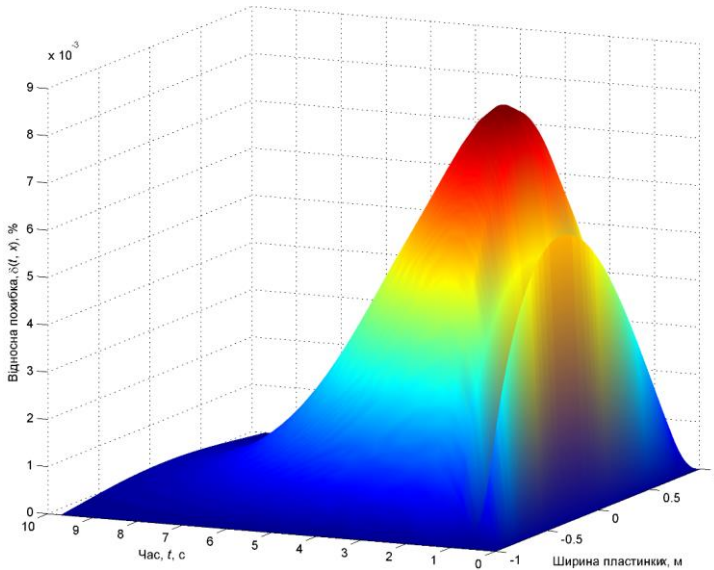


Рис. 4.6. Залежність відносної похибки розв'язку від просторової та часової координат

Необмежена пластинка з несиметричними граничними умовами другого роду. Розглянемо наступний варіант задачі моделювання об'єктів з розподіленими параметрами. Необмежена пластинка з коефіцієнтом температуропровідності $a(x)$ нагрівається з обох сторін різними джерелами зі змінними у часі тепловими потоками, які задані своїми функціями часу

$$F_{\text{сп}2}^{\pm}(t) \equiv \left. \frac{\partial T(x,t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}.$$

Всередині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. В початковий момент часу задано розподіл температури по товщині $F_{\text{ПВ}}(x) \equiv T(x,t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури $T(x,t)$ в пластині. Таким чином, досліджується нестационарний тепловий процес, який, враховуючи зауваження, зроблені у п. 4.1, описується одномірним рівнянням теплопровідності (4.1) з несиметричними граничними умовами другого роду.

Перейдемо до задачі з однорідними граничними умовами аналогічно випадку, розглянутому в п. 4.1. Подамо розв'язок $T(x, t)$ у вигляді суми

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t), \quad (4.50)$$

де $V(x, t)$ задовольняє однорідним граничним умовам, а

$$U(x, t) = m_1(t)x^2 + m_2(t)x. \quad (4.51)$$

Величини $m_1(t)$ та $m_2(t)$ вибираємо такими, щоб задовольнялися граничні умови $F_{gp2}^{\pm}(t)$. Продиференціювавши (4.51) за координатою x , отримуємо

$$m_1(t) = \frac{1}{4}(F_{gp2}^+(t) - F_{gp2}^-(t)), \quad m_2(t) = \frac{1}{2}(F_{gp2}^+(t) + F_{gp2}^-(t)). \quad (4.52)$$

Звідси

$$U(x, t) = \frac{x}{4}[(x+2)F_{gp2}^+(t) + (2-x)F_{gp2}^-(t)], \quad (4.53)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{x}{4}[(x+2)[F_{gp2}^+(t)]' + (2-x)[F_{gp2}^-(t)]'], \quad (4.54)$$

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = \frac{x+1}{2}F_{gp2}^+(t) + \frac{1-x}{2}F_{gp2}^-(t), \quad (4.55)$$

$$\frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} = \frac{1}{2}(F_{gp2}^+(t) - F_{gp2}^-(t)). \quad (4.56)$$

Підставивши (4.50) в (4.1) із врахуванням(4.54)-(4.56), маємо:

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a(x)\frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} + b(x)\frac{\partial V(x, t)}{\partial x} + z(x, t), \quad (4.57)$$

де

$$z(x, t) = \frac{1}{2}[a(x) + (x+1)b(x)]F_{gp2}^+(t) + \frac{1}{2}[(1-x)b(x) - a(x)]F_{gp2}^-(t) - \frac{x}{4}[(x+2)[F_{gp2}^+(t)]' + (2-x)[F_{gp2}^-(t)]'] + q(x)f(t).$$

Оскільки функція $U(x, t)$ вибрана таким чином, щоб задовольняти граничним умовам, то рівняння (4.57) має розв'язуватись з однорідними граничними умовами

$$F_{gp2}(t) \equiv \left. \frac{\partial V(x, t)}{\partial x} \right|_{x=\pm 1} = 0. \quad (4.58)$$

Замінивши в (4.57), відповідно до методу опорних перерізів для симетричних граничних умов другого роду, частинні похідні першого і другого порядку на апроксимуючі їх вирази

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \approx \frac{64}{7} x(x^2 - 1) \left[u(0,t) - u\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + \frac{1}{7} x(8x^2 - 1) F_{\text{гп}2}(t),$$

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \approx \frac{64}{7} (3x^2 - 1) \left[u(0,t) - u\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + \frac{1}{7} (24x^2 - 1) F_{\text{гп}2}(t),$$

і, вважаючи $x = 0$ і $x = \frac{1}{2}$, отримаємо систему двох звичайних диференціальних рівнянь, що визначають величини $V(0,t)$ і $V\left(\frac{1}{2},t\right)$:

$$\begin{cases} \frac{dV(0,t)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0,t) - V\left(\frac{1}{2},t\right) \right) a(0) + z(0,t) \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2},t\right)}{dt} = \frac{64}{7} \left(V(0,t) - V\left(\frac{1}{2},t\right) \right) \left(-\frac{1}{4} a\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{3}{8} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) + z\left(\frac{1}{2},t\right), \end{cases} \quad (4.59)$$

де

$$\begin{aligned} z(0,t) &= \frac{1}{2} (a(0) + b(0)) F_{\text{зп}2}^+(t) + \frac{1}{2} (b(0) - a(0)) F_{\text{зп}2}^-(t) + q(0) f(t), \\ z\left(\frac{1}{2},t\right) &= \frac{1}{2} \left(a\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\text{зп}2}^+(t) + \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} b\left(\frac{1}{2}\right) - a\left(\frac{1}{2}\right) \right) F_{\text{зп}2}^-(t) - \\ &\quad - \frac{1}{16} \left(5 [F_{\text{зп}2}^+(t)]' + 3 [F_{\text{зп}2}^-(t)]' \right) + q\left(\frac{1}{2}\right) f(t). \end{aligned}$$

Для системи (4.59) задані початкові умови:

$$\begin{aligned} V(0,t) \Big|_{t=0} &= F_{\text{ПВ}}(0), \\ V\left(\frac{1}{2},t\right) \Big|_{t=0} &= F_{\text{ПВ}}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{16} (5F_{\text{зп}2}^+(0) + 3F_{\text{зп}2}^-(0)). \end{aligned} \quad (4.60)$$

Скориставшись формулою для обчислення $V(x,t)$ відповідно до методу опорних перерізів для випадку симетричних граничних умов другого роду

$$u(x,t) \approx \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[u(0,t) - u\left(\frac{1}{2},t\right) \right] + \frac{1}{7} x^2 \left(2x^2 - \frac{1}{2} \right) F_{\text{зп}2}(t) + u(0,t)$$

з урахуванням (4.58) і (4.53), отримаємо можливість обчислення довільних значень шуканого розв'язку:

$$T(x, t) = U(x, t) + V(x, t) \approx \frac{x}{4} \left[(x+2) F_{xp2}^+(t) + (2-x) F_{xp2}^-(t) \right] + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + V(0, t). \quad (4.61)$$

Розглянемо спрощену конкретну задачу, в якій коефіцієнт температурипровідності, внутрішнє джерело тепла і початковий розподіл температури рівні відповідно

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 + a_1x - a_2x^2)}{2a_2}, \quad a_0 + a_1x - a_2x^2 > 0, \quad b_2 > 0, \quad a_2 > 0, \quad (4.62)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-bt}, \quad (4.63)$$

$$F_{IIY}(x) = a_0 + a_1x - a_2x^2. \quad (4.64)$$

а несиметричні граничні умови мають вигляд

$$F_{I\Gamma 2}^{\pm}(t) = (a_1 \pm 2a_2) e^{-bt}. \quad (4.65)$$

Задача (4.1), (4.62)-(4.65) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 + a_1x - a_2x^2) e^{-bt}. \quad (4.66)$$

Система (4.59) набуває вигляду:

$$\begin{cases} \frac{dV(0, t)}{dt} = -\frac{64}{7} a^2(0) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] - 2a_2 a^2(0) e^{-bt} + b_1 e^{-bt}; \\ \frac{dV\left(\frac{1}{2}, t\right)}{dt} = -\frac{16}{7} a^2\left(\frac{1}{2}\right) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + \\ + \left[b_2 \left(\frac{a_1}{2} - \frac{a_2}{4} \right) - 2a_2 a^2\left(\frac{1}{2}\right) \right] e^{-bt} + b_1 e^{-bt}. \end{cases} \quad (4.67)$$

Для системи (4.67) задано початкові умови:

$$V(0, t)|_{t=0} = V\left(\frac{1}{2}, t\right)|_{t=0} = a_0. \quad (4.68)$$

Скориставшись формулою (4.61), отримаємо можливість обчислення довільних значень шуканого розв'язку:

$$T(x, t) \approx (a_1x - a_2x^2) e^{-bt} + \frac{16}{7} x^2 (x^2 - 2) \left[V(0, t) - V\left(\frac{1}{2}, t\right) \right] + V(0, t). \quad (4.69)$$

Обчислювальні експерименти. Для різних значень кроку дискретизації $\tau_0 = 10^{-4}$ с, $\tau_i = i \cdot 5 \cdot 10^{-4}$ с, $i = 1..1000$ часової змінної t

задаємо наступні значення коефіцієнтів: $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0,5$,
 $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$. Тоді $a^2(0) = 1$, $a^2\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{19}{16}$, $t \in [0,10]$, $x \in [-1,1]$.

За просторовою координатою крок дискретизації дорівнює 0,01. Система (4.67) з початковими умовами (4.69) чисельно розв'язувалась за допомогою стандартного розв'язувача в середовищі Matlab. Отримані результати використовуються для обчислення значень розв'язку згідно (4.69) при довільних значеннях аргументів. Результат розв'язання задачі для кроку $\tau = 0,01$ с представлений на рис. 4.7. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку $\delta(\tau) = \max_x \left(\max_t [T(x,t)] \right)$ від кроку дискретизації τ наведена на рис. 4.8.

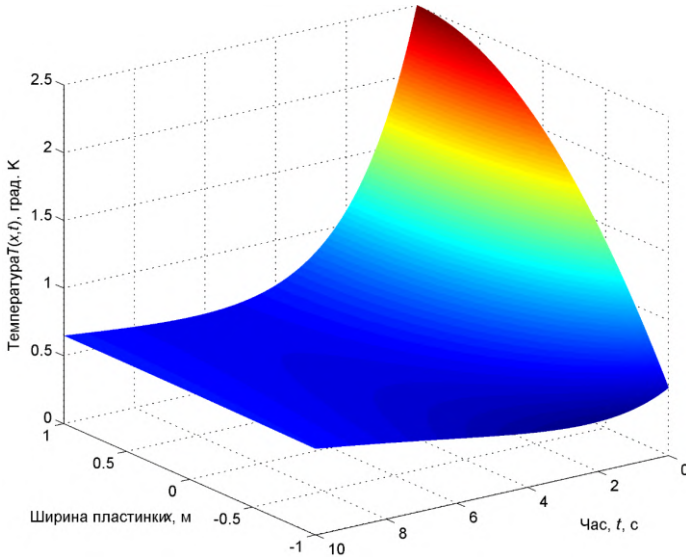


Рис. 4.7. Розподіл температури по товщині пластини із плином часу

Результати числових експериментів засвідчили, що при кроці дискретизації $\tau = 0,01$ с отримано найменше значення відносної похибки $\delta = 0,0000117$.

Залежність $\delta(t, x)$ для даного кроку наведено на рис. 4.9.

Запропонований метод моделювання нестационарних теплових процесів при наявності несиметричних граничних умов I-II роду володіє достатньою для інженерних розрахунків точністю (відносна

похибка в проведеному експерименті не перевищує 0,0086%). Метод дозволяє значно спростити обчислення в порівнянні з традиційними методами розрахунків.

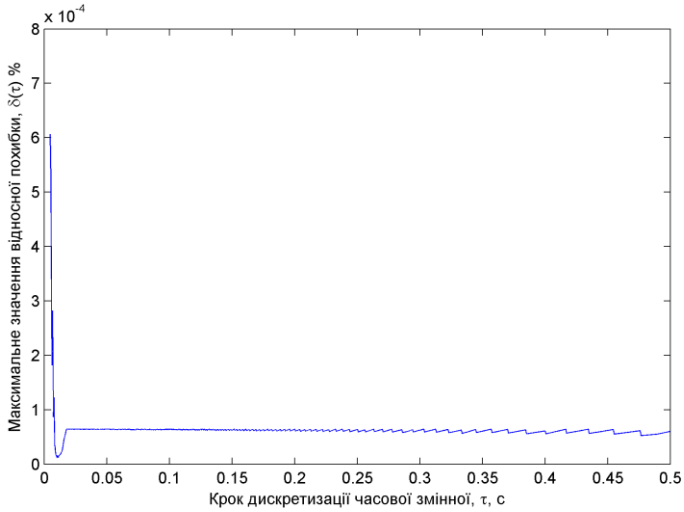


Рис. 4.8. Залежність максимального значення відносної похибки розв'язку від кроку дискретизації за часовою змінною

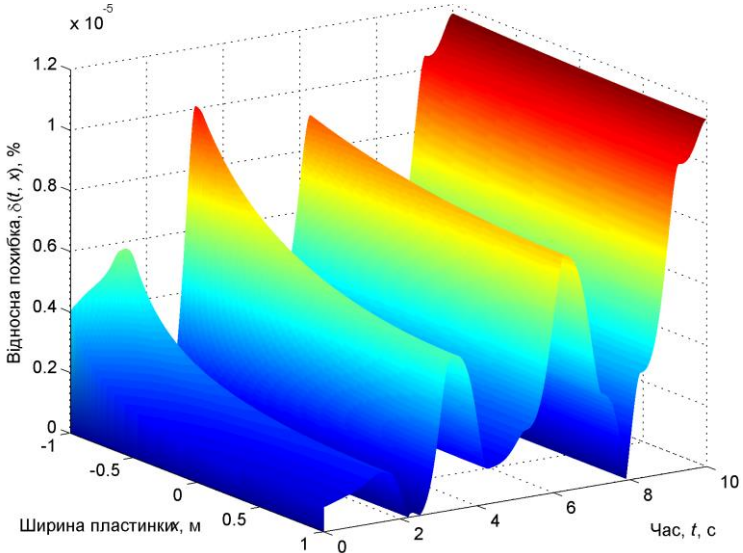


Рис. 4.9. Залежність відносної похибки розв'язку

4.3. Дослідження ефективності методу. Обчислювальні експерименти

З метою дослідження ефективності числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широкоживаним методом скінчених різниць було проведено ряд обчислювальних експериментів. Для цього розв'язувалась задача моделювання нестационарного теплового процесу у необмеженій пластинці з відомим аналітичним розв'язком. Температура $T(x, t)$ на краях необмеженої пластини примусово змінюється за законом $F_{сп1}(t) \equiv T(x, t)|_{x=\pm 1}$, який задається функцією часу. В середині пластини діє джерело тепла, потужність якого пропорційна $f(t)$. У початковий момент задано розподіл температури по товщині $F_{ПВ}(x) \equiv T(x, t)|_{t=0}$. Необхідно знайти розподіл температури в пластині.

У цьому випадку нестационарний тепловий процес описується рівнянням з частинними похідними параболічного типу:

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a(x) \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + b(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x} + q(x) f(t), \quad -1 \leq x \leq 1 \quad (4.70)$$

Процес розв'язування розглянемо на модельному прикладі розв'язування конкретної задачі, для якої:

$$a(x) = \frac{b_2(a_0 - a_2 x^2)}{2a_2}, \quad a_0 - a_2 x^2 > 0, \quad 0 < a_2 \leq a_0, \quad b_2 > 0, \quad (4.71)$$

$$b(x) \equiv 0, \quad q(x) \equiv 1, \quad f(t) = b_1 e^{-bt}, \quad (4.72)$$

$$F_{сп1}(t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 - a_2) e^{-b_2 t}, \quad (4.73)$$

$$F_{ПВ}(x) = a_0 - a_2 x^2. \quad (4.74)$$

Задача(4.70), (4.71)-(4.74) має точний аналітичний розв'язок

$$T(x, t) = 1 - e^{-bt} + (a_0 - a_2 x^2) e^{-b_2 t}. \quad (4.75)$$

Задача розв'язувалась різницевиими методами (явна умовно стійка чотирихточкова схема та неявна абсолютно стійка шеститочкова схема Кранка-Ніколсона) та методом опорних перерізів при наступних значеннях коефіцієнтів: $a_0 = 500$, $a_2 = 0,5$, $b_1 = 0,1$, $b_2 = 0,5$.

Вибрані різницеві схеми мають певні особливості. Явна чотирихточкова схема у порівнянні з неявною є більш простою і вимагає меншої кількості операцій для підрахунку значень наближеного розв'язку на одному часовому шарі. Проте умова стійкості $\tau \leq \frac{h^2}{2a}$

(де τ і h — крок сітки за часовою і просторовою координатами відповідно, a — коефіцієнт температуропровідності) накладає суттєве обмеження на вибір кроку за часом. Наприклад, якщо взяти $h = 0,01$, то для забезпечення стійкості при $a = 250$ потрібно, щоб

крок τ не перевищував значення $\frac{10^{-2}}{500} = 2 \cdot 10^{-7}$. А кількість вузлів

сітки, в яких обчислюється розв'язок задачі для проміжку часу 1 с із вказаним кроком, дорівнює 10^9 . Таку ж саму кількість операцій потрібно виконати для розв'язування задачі. Об'єм пам'яті, необхідний для зберігання значень цих змінних, становить $\approx 7,5$ Гб. Із збільшенням величини часового проміжку кількість операцій та об'єм необхідної пам'яті зростають пропорційно.

Неявна шеститочкова різницєва схема Кранка-Ніколсона, хоч і вимагає більшої кількості операцій для підрахунку значень наближеного розв'язку на одному часовому шарі (СЛАР порядку $\frac{2}{h} - 1$), проте є абсолютно стійкою. Це дає можливість використовувати її з довільними кроками h і τ . Крім того, вона має підвищену точність $O(h^2 + \tau^2)$.

Особливістю методу опорних перерізів є низька чутливість до збільшення числа точок за просторовою змінною, оскільки значення у цих точках обчислюються за допомогою інтерполяційного полінома. Основне обчислювальне навантаження лягає на розв'язання системи двох звичайних диференціальних рівнянь за часовою змінною, розв'язки якої виступають в якості коефіцієнтів інтерполяційного полінома. Результати проведених експериментів представлені в таблиці 4.1.

У першій частині дослідження (експерименти 1–6) проводились обчислення при фіксованому кроці дискретизації просторової змінної $h = 0,1$, $x \in [-1; 1]$ та змінному кроці дискретизації часової змінної $\tau = \{10^{-2}, 10^{-3}, 10^{-4}, 2 \cdot 10^{-5}, 10^{-5}, 10^{-6}\}$, $t \in [0, 1]$. Фіксувався затрачений процесорний час для кожного з методів. Оскільки стійкість явної різницєвої схеми не забезпечувалась за деяких значень кроків дискретизації, то затрачений час для цього методу у цих випадках не фіксувався. Результати першої частини експерименту показані на рис. 4.10.

Як видно із діаграми, обчислення за явною різницєвою схемою хоч і показали кращу швидкодію, проте у половині випадків вони взагалі не могли бути проведені, оскільки порушувалась умова стійкості. З цієї причини даний метод для диференціальних рівнянь із частинними похідними параболічного типу застосовується рідко.

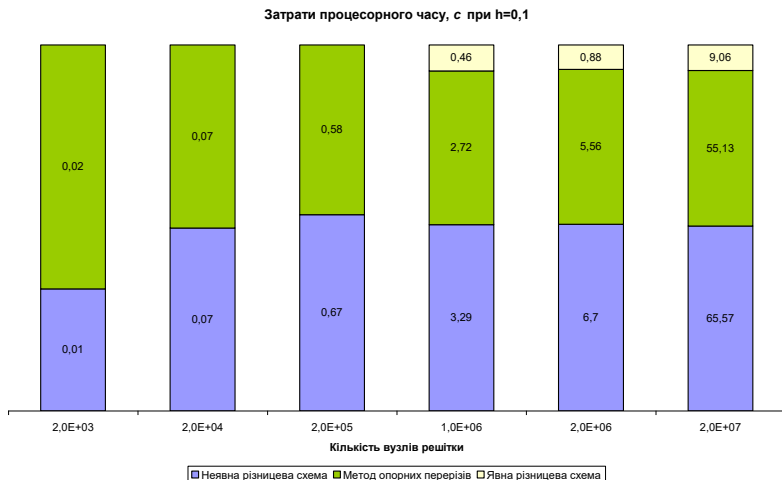


Рис. 4.10. Затрати процесорного часу при зміні кроку дискретизації
 Таблиця 4.1

Затрати процесорного часу при використанні різних методів

№ експерименту	Крок h дискретизації просторової змінної $x \in [-1; 1]$	Крок τ дискретизації часової змінної t	Кількість вузлів	Час розрахунку, с			Економія часу, %
				Різницєві схеми		Метод опорних перерізів	
				Явна	Неявна		
1	$h = 0,1$	$\tau = 10^{-2}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^3$	—	0,01	0,02	-50%
2		$\tau = 10^{-3}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,07	0,07	0%
3		$\tau = 10^{-4}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^5$	—	0,67	0,58	13%
4		$\tau = 2 \cdot 10^{-5}, t \in [0; 1]$	10^6	0,46	3,29	2,72	-83% (17%)
5		$\tau = 10^{-5}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^6$	0,88	6,7	5,56	-84% (17%)
6		$\tau = 10^{-6}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^7$	9,06	65,57	55,13	-84% (16%)
7	$h = 0,01$	$\tau = 10^{-2}, t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^4$	—	0,12	0,03	75%
8	$h = 0,005$		$4 \cdot 10^4$	—	0,51	0,03	94%
9	$h = 0,002$		$1 \cdot 10^5$	—	5,30	0,05	99%
10	$h = 0,001$		$2 \cdot 10^5$	—	37,39	0,07	99,8%

Продовження таблиці 4.1

11	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3},$ $t \in [0; 1]$	$2 \cdot 10^6$	—	381,40	0,52	99,9%
12	$h = 0,01$	$\tau = 10^{-2},$ $t \in [0; 10]$	$2 \cdot 10^5$	—	1,02	0,13	87%
13	$h = 0,001$	$\tau = 10^{-3},$ $t \in [0; 10]$	$2 \cdot 10^7$	—	—	5,45	99,9%

Якщо порівнювати затрачений процесорний час для розв'язування задачі за неявною різницевою схемою і апроксимаційним методом опорних перерізів, то, як видно із діаграми, за мінімального кроку дискретизації просторової змінної $h = 0,1$ апроксимаційний метод лише в одному випадку показав меншу швидкодію і ще в одному випадку було отримано однаковий результат. Проте в решті випадках було отримано незначну ($\approx 17\%$) перевагу на користь методу опорних перерізів.

У другій частині експериментів (7-10) навпаки крок τ за часовою змінною $t \in [0,1]$ фіксувався і становив $\tau = 10^{-2}$. Піддавався зміні крок h за просторовою змінною $x \in [-1;1]$: $h = \{10^{-2}, 5 \cdot 10^{-3}, 2 \cdot 10^{-3}, 10^{-3}\}$. При цьому також фіксувався затрачений процесорний час, необхідний для розв'язання задачі на вказаних сітках. Результати другої частини експерименту показані на рис. 4.11.

З діаграми видно, що у всіх випадках апроксимаційний метод показав значну перевагу за часом числової реалізації математичної моделі перед різницевою схемою. Це пояснюється особливістю методу опорних перерізів, яка полягає в тому, що обчислення за просторовими змінними здійснюється за інтерполяційним поліномом.

Окремо проводився обчислювальний експеримент (рядок 11, табл. 4.1) із параметрами $\tau = 10^{-3}$ і $h = 10^{-3}$. У цьому випадку отримали результат 381,40 с і 0,52 с для різницевої схеми і методу опорних перерізів відповідно, який показує значну перевагу по затратам процесорного часу апроксимаційного методу для великої кількості точок за просторовою змінною.

У третій частині експерименту (12-13) досліджувались затрати процесорного часу для збільшеного часового проміжку $t \in [0,10]$ с. Крок дискретизації для просторової та часової змінної обирався однаковим: $\tau = 10^{-2}$ і $h = 10^{-2}$ (експеримент 12), $\tau = 10^{-3}$ та $h = 10^{-3}$ (експеримент 13). Результати третьої частини експерименту представлені на рис. 4.12.

Результати експериментів показали, що застосування апроксимаційного методу опорних перерізів при числовій реалізації математичних моделей об'єктів із розподіленими параметрами, які описуються рівняннями із частинними похідними параболічного типу, дає змогу в декілька (для різних випадків від 1,16 до 733) разів зменшити машинний час для знаходження розв'язків. Запропонований метод має найвищу ефективність у випадках, коли число вузлів за просторовою змінною (у яких шукається розв'язок задачі) рівне або більше за число вузлів за часовою змінною.

Оцінка похибки методу і принцип вибору опорних перерізів. Оцінимо похибку методу, взявши в якості ряду інтерполяційний поліном Лагранжа

$$L_n(x, t) = \sum_{i=0}^n T(x_i, t) \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq i}}^n \frac{x - x_k}{x_i - x_k},$$

$$-1 \leq x \leq 1.$$

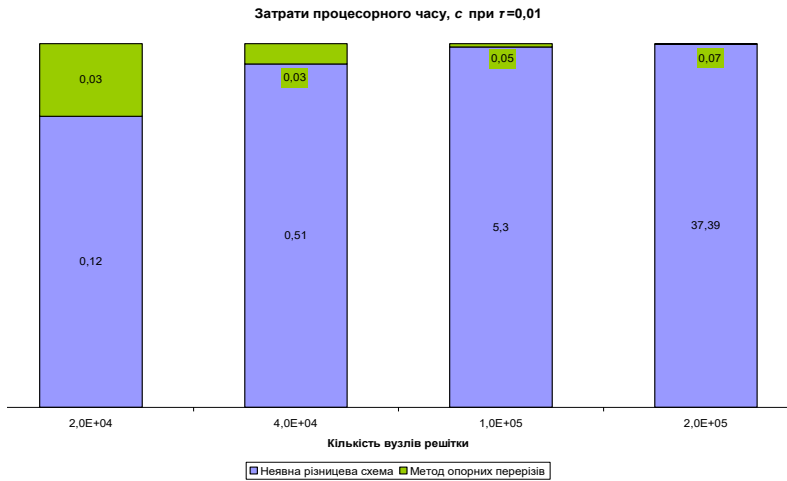


Рис. 4.11. Затрати процесорного часу при зміні кроку дискретизації h

Для цього накладемо наступні умови на функцію $T(x, t)$: будемо вважати, що вона має неперервні похідні за змінною x до порядку n , а похідна $n + 1$ порядку $\frac{\partial^{n+1}T(x, t)}{\partial x^{n+1}}$ існує. Тоді відхилення ε функції $T(x, t)$ від $L_n(x, t)$ можна оцінити нерівністю

$$\varepsilon = \left| T(x, t) - L_n(x, t) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \omega(x),$$

$$\text{де } M_{n+1} = \sup_{x \in [-1, 1]} \left| \frac{\partial^{n+1} T(x, t)}{\partial x^{n+1}} \right|, \text{ а } \omega(x) = |(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)|.$$

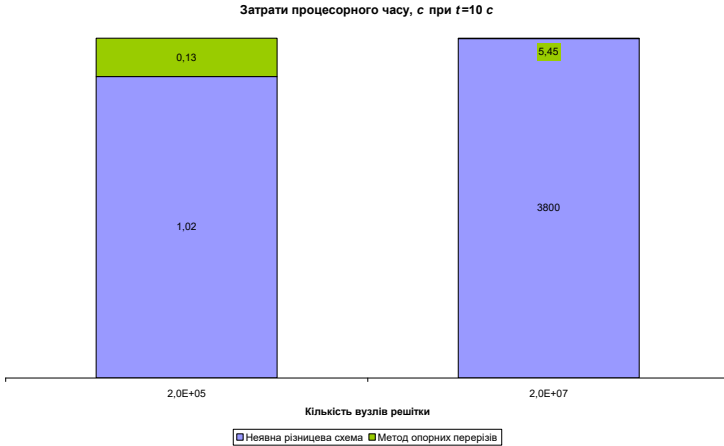


Рис. 4.12. Затрати процесорного часу при зміні часового проміжку

Визначимо умови, за яких це відхилення буде мінімальним. Оскільки величина M_{n+1} залежить лише від властивостей шуканої функції, то змінюючи опорні точки x_i , ми можемо змінювати величину $\omega(x)$, тим самим впливаючи на відхилення ε . Взявши в якос-

ті опорних перерізів корені многочлена Чебишева $x_i = \cos \frac{(2i+1)}{2n+2} \pi$, $i = \overline{0, n}$, та беручи до уваги, що многочлен Чебишева має найменше відхилення від нуля, отримаємо

$$\varepsilon = \left| T(x, t) - L_n(x, t) \right| \leq \frac{M_{n+1}}{2^n (n+1)!}.$$

Тому будь-який інший вибір опорних точок може дати більше значення верхньої границі похибки методу.

Отже, можна зробити висновок, що викладений аналіз є основою методу оцінки точності і методики вибору опорних перерізів.

Для апробації методу вибору опорних перерізів було проведено ряд обчислювальних експериментів. Моделювався процес теплопро-

відності для необмеженої однорідної ізотропної пластинки, що описується в безрозмірних змінних рівнянням із частинними похідними

$$\frac{\partial T(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 T(x,t)}{\partial x^2}, \quad -1 \leq x \leq 1, \quad 0 < t \leq 1; \text{ з граничними і початковими}$$

умовами: $T(x,t)|_{x=\pm 1} = 1$, $T(x,t)|_{t=0} = 0$. Розв'язок $T_{II}(x,t)$, отриманий методом опорних перерізів порівнювався із розв'язком $T_P(x,t)$,

отриманим методом скінченних різниць для кроків дискретизації просторової та часової змінної 0,005 і 10^{-5} відповідно. Для отриманих розв'язків знаходилося інтегральне відхилення

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 |T_{II}(x,t) - T_P(x,t)| dx dt \text{ при різній кількості та способах вибору}$$

опорних точок x_i , $i = \overline{0, n}$, які обиралися трьома способами: як корені

многочлена Чебишева $x_i = \cos \frac{(2i+1)}{2n+2} \pi$; з використанням рівномірного

розподілу $x_i = -1 + \frac{2}{n} i$; як точки максимуму многочлена Чебишева

$x_i = \cos \frac{i}{n} \pi$. Використовувалось від 5 до 15 опорних перерізів. Результати обчислювальних експериментів наведені в табл. 4.3.

Таблиця 4.2

Абсолютне інтегральне відхилення розв'язків, отриманих методом опорних перерізів та методом скінченних різниць

Кількість опорних точок	Корені многочлена Чебишева	Точки максимуму многочлена Чебишева	Рівномірний розподіл
5	$9,1 \cdot 10^{-03}$	$7,1 \cdot 10^{-03}$	$1,27 \cdot 10^{-02}$
7	$1,7 \cdot 10^{-03}$	$1,7 \cdot 10^{-03}$	$3,5 \cdot 10^{-03}$
9	$6,34 \cdot 10^{-04}$	$6,03 \cdot 10^{-04}$	$1,6 \cdot 10^{-03}$
11	$3,31 \cdot 10^{-04}$	$3,04 \cdot 10^{-04}$	$9,13 \cdot 10^{-04}$
13	$1,49 \cdot 10^{-04}$	$1,98 \cdot 10^{-04}$	$5,79 \cdot 10^{-04}$
15	Порушення стійкості обчислювального процесу	$1,36 \cdot 10^{-04}$	$4,24 \cdot 10^{-04}$

Аналізуючи результати проведених обчислювальних експериментів, можна помітити, що спеціальний вибір опорних точок (корені, або в деяких випадках точки максимуму многочлена Чебише-

ва), у порівнянні із рівномірним розподілом по області визначення просторової змінної, дозволяє підвищити адекватність математичної моделі. Наприклад, у випадку інтерполяції за 9 опорними точками інтегральне відхилення розв'язків для випадку рівномірного розподілу опорних точок становить $1,6 \cdot 10^{-03}$, а у випадку вибору в якості опорних точок коренів многочлена Чебишева — $6,34 \cdot 10^{-04}$. Схожа перевага спеціального вибору опорних точок зберігається і для інших випадків.

Результати проведених обчислювальних експериментів показали, що із ростом кількості опорних точок інтегральне відхилення зменшується (рис. 4.13).

Інтегральне відхилення розв'язків

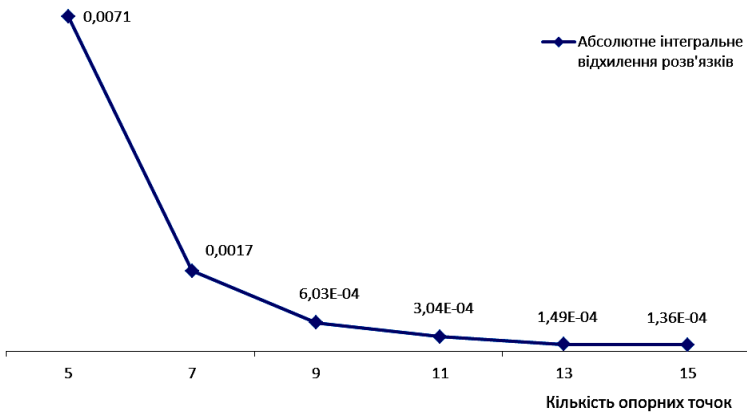


Рис. 4.13. Інтегральне відхилення розв'язків в залежності від різної кількості опорних точок

Отже, можна зробити висновок, що завдяки вдалому вибору опорних точок можна підвищити точність числової реалізації або в деяких випадках знизити порядок інтерполяційного полінома при збереженні необхідної точності моделювання.

Моделювання динаміки нестационарного перехідного теплового процесу обмежених дво- і тривимірних тіл. Нехай маємо ізотропний необмежено довгий стержень прямокутного перерізу $2L \times 2l$ із початковою температурою $T(x, y, t)|_{t=0} = T_0$ та сталими теплофізичними характеристиками. В певний момент часу t_0 на поверхні стержня задаються деякі граничні умови $T(x, y, t)|_{x=\pm L, y=\pm l} = T_{сп1}(t)$ (першо-

го, другого, або третього роду). Покажемо, що можна виразити динаміку нестационарного теплового процесу даного двовимірного тіла як добуток розв'язків двох одновимірних нестационарних теплових задач.

Математичним описом параметрично спрощеної моделі нестационарного теплового процесу є рівняння із частинними похідними параболічного типу:

$$c\rho \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (4.76)$$

в якому c — питома теплоємність, ρ — густина, k — коефіцієнт теплопровідності, t — час, а $-L \leq x \leq L$, $-l \leq y \leq l$ — просторові координати. Або після спрощення:

$$\frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = a \left(\frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T(x, y, t)}{\partial y^2} \right), \quad (4.77)$$

де $a = \frac{k}{c\rho}$ — коефіцієнт температуропровідності. Оскільки на лініях симетрії тіла тепловий потік відсутній, то можна записати, що

$$\left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial x} \right|_{x=0} = 0 \quad \text{та} \quad \left. \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial y} \right|_{y=0} = 0.$$

Для розв'язання даної задачі можна застосувати метод Фур'є:

$$T(x, y, t) = X(x, t)Y(y, t) \quad (4.78)$$

і отримати, підставивши у (4.96):

$$\begin{aligned} & \frac{1}{X(x, t)} \left(\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2} \right) = \\ & = - \frac{1}{Y(y, t)} \left(\frac{\partial Y(y, t)}{\partial t} - a \frac{\partial^2 Y(y, t)}{\partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (4.79)$$

Оскільки змінні x та y змінюються незалежно одна від одної, то кожна з двох частини (4.79) дорівнює якомусь параметру, який залежить від спільної змінної t , наприклад, $\pm \lambda^2(t)$. Однак, оскільки присутня термальна і геометрична симетрія, то задачі на власні значення за координатами x та y мають бути аналогічними. Це можливо лише за умови $\lambda^2(t) = 0$. Враховуючи це, та підставивши (4.77) в початкові та граничні умови, отримаємо наступні співвідношення.

Таблиця 4.3

Одновимірні задачі нестационарної теплопровідності

Для функції $X(x, t)$	Для функції $Y(x, t)$
$\frac{\partial X(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 X(x, t)}{\partial x^2},$	$\frac{\partial Y(y, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 Y(y, t)}{\partial y^2},$
$X(x, t) _{t=0} = T_0,$	$Y(y, t) _{t=0} = T_0,$
$\left. \frac{\partial X(x, t)}{\partial x} \right _{x=0} = 0,$	$\frac{\partial Y(0, t)}{\partial y} = 0,$
$X(x, t) _{x=\pm L} = F_{ep1}(t),$	$Y(y, t) _{y=\pm l} = F_{ep1}(t).$

Отримані рівняння утворюють дві одновимірні задачі нестационарної теплопровідності необмежених ізотропних пластинок різної товщини ($2L$ і $2l$) та однаковими початковими і граничними умовами. Тобто розв'язок $T(x, y, t)$ вихідної двовимірної задачі (4.77) виражається через добуток (4.78) розв'язків відповідних одновимірних задач.

Отже, запропоновано метод структурного спрощення математичних моделей ОРП з використанням інтерполяційного підходу. Метод орієнтований на простоту практичного використання та ефективну числову реалізацію. Технічна частина силових енергетичних установок, як правило, представляє собою складний фізичний об'єкт з розподіленими параметрами, базовим математичним описом яких є диференціальні рівняння з частинними похідними. У зв'язку з принциповою складністю чисельних методів і програмної реалізації цих моделей суттєво актуальною стає задача розвитку методів математичного і комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами шляхом розробки, дослідження і застосування методів побудови і числової реалізації структурно-спрощених динамічних моделей вказаного класу об'єктів, які мають необхідний рівень адекватності, найменшу складність серед альтернативних варіантів та орієнтованих на ефективну числову і комп'ютерну реалізацію. Ефективна числова реалізація числової реалізації структурно-спрощених математичних моделей динамічних об'єктів вказаного класу забезпечує створення вбудованих програмних засобів для розв'язання задач функціонування технічних систем при наявності часових і ресурсних обмежень. Аналізі результатів досліджень за тематикою, що досліджувалась, визначає

основні підходи і особливості задач побудови спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами, основними серед яких є принцип розділення змінних, операційні методи і метод інтегральних перетворень; перспективним є інтерполяційний підхід, для прикладної реалізації якого необхідне здійснення відповідних досліджень і розробок; реалізація інтерполяційного підходу до спрощення математичних моделей передбачає формування відповідних математичних моделей і оціночних виразів, що дозволяють обґрунтувати можливість і доцільність спрощення математичних описів, а також оцінки якості математичних моделей і можливі процедури виконання операцій спрощення. В роботі запропонований та досліджений інтерполяційний метод (метод опорних перерізів) отримання спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді скалярних диференціальних рівнянь на основі вихідних (базових) описів у формі диференціальних рівнянь з частинними похідними; отримані звичайні диференціальні рівняння визначаються залежностями для невеликої кількості перерізів об'єкта, що моделюється, а їх розв'язок дозволяє представити розв'язок вихідної задачі у вигляді простого полінома; метод практично інваріантний відносно форми базової моделі та ефективно алгоритмізується і забезпечує побудову економічних швидкодіючих програмних засобів, що підтверджуються обчислювальними експериментами. За допомогою методу опорних перерізів отримані спрощені моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь для об'єктів з розподіленими параметрами параболічного типу з симетричними і несиметричними граничними умовами, а також для аналогічних задач в циліндричній системі координат; апробація спрощених моделей шляхом тестових обчислювальних експериментів при розв'язуванні модельних задач підтверджує працездатність методу і ефективність програм, що його реалізують; порівняння отриманих результатів спрощеного моделювання з результатами реалізації базових (повних) моделей за допомогою типових різницевих алгоритмів свідчить про значну перевагу запропонованого методу як по простоті обчислювальних процедур, так і по часу, витраченому на розв'язування.

Таким чином, розроблено метод опорних перерізів, який володіє універсальністю по відношенню до різного роду симетричних та несиметричних граничних умов базової моделі, дозволяє отримати спрощені обчислювальні вирази (поліном та допоміжна система звичайних диференціальних рівнянь, розв'язки якої виступають в якості коефіцієнтів цього полінома) для числової реалізації моделі ОРП.

Застосування методу опорних перерізів для моделювання ОРП та числової реалізації отриманих моделей дозволяє на проміжних

етапах скористатися засобами реалізації типових чисельних методів та готових програм комп'ютерного моделювання. Метод, як показали результати обчислювальних експериментів, володіє достатньою для інженерних розрахунків точністю.

Завдяки особливості методу опорних перерізів, яка полягає в тому, що обчислення за просторовими змінними здійснюється за інтерполяційним поліномом, ефективність числової реалізації підвищується при зростанні кількості вузлів змінної за просторовою координатою, в яких шукається розв'язок.

Розроблені способи застосування методу опорних перерізів для обмежених та напівобмежених просторових ОРП. Виведені готові для практичних розрахунків обчислювальні вирази для числової реалізації математичних моделей об'єктів даного класу, поданих у декартовій та циліндричній системах координат.

5. ОРГАНІЗАЦІЯ ПРОЦЕСІВ ФУНКЦІОНУВАННЯ АДАПТИВНИХ СИСТЕМ КЕРУВАННЯ З ЕТАЛОННОЮ МОДЕЛЛЮ

5.1. Математичний опис адаптивної системи з еталонною моделлю

Адаптивна система з еталонною моделлю (ЕМ) складається з основної системи і контуру настроювання [13]. Основна частина системи являє собою сукупність об'єкта керування (ОК) і виконавчого пристрою. У контур настроювання входять комп'ютерна модель об'єкта (КМ) і керуючий пристрій (КП), тобто регулятор [2, 142, 87].

Під задачею побудови адаптивної системи розуміється визначення алгоритму функціонування КП, тобто його структури й параметрів, при відомих рівняннях руху основної системи, КМ і характеристик вхідних сигналів [6, 79, 90, 111, 189, 190].

Щодо керованої координати об'єкта керування частіше всього можуть описуватися рівнянням виду

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = \sum_{j=0}^m d_j(t) x^{(j)}, \quad (5.1)$$

де x — керуючий вплив; y — вихідна координата; $a_i(t)$, $d_j(t)$ — змінні в часі коефіцієнти, або в операторній формі

$$A(p, t) \cdot Y(p) = D(p, t) \cdot X(p), \quad (5.2)$$

де $A(p, t)$, $D(p, t)$ — лінійні диференціальні оператори.

Лінійна математична модель (ММ) вигляду (5.1) або (5.2) руху ОК щодо розрахункової траєкторії коректна лише при певних обмеженнях, що накладаються на сигнали й координати об'єкта, діапазони й швидкості зміни його коефіцієнтів [112]. Зазначені обмеження можна записати у вигляді нерівностей

$$B_k [p, g, y, x, a_i(t), d_j(t), t] \leq 0, \quad (5.3)$$

де B_k — деякі оператори; g — вхідний сигнал.

З урахуванням законів керування, слухних для замкненої системи, рівняння ОК приймає вигляд:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) + c_i(t)]y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_j(t) + c_{xj}(t)]x^{(j)}. \quad (5.4)$$

Представимо, коефіцієнти $c_i(t)$ й $c_{xj}(t)$, що змінюються, у вигляді суми двох складових

$$\left. \begin{aligned} c_i(t) &= \bar{c}_i + \Delta c_i(t); \\ c_{xj}(t) &= \bar{c}_{xj} + \Delta c_{xj}(t), \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

де \bar{c}_i, \bar{c}_{xj} — постійні величини; $\Delta c_x(t), \Delta c_{xj}(t)$ — складові, що перебудовуються.

Вводячи позначення

$$\left. \begin{aligned} a_i &= a_i(t) + \bar{c}_i; \\ d_j &= d_j(t) + \bar{c}_{xj}, \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

і, в силу (5.4), (5.5), можна записати

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [a_i + \Delta c_i(t)]y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_j + \Delta c_{xj}(t)]x^{(j)}. \quad (5.7)$$

Зміни коефіцієнтів a_i і d_j системи рівнянь (5.7), викликані зміною параметрів ОК, будуть компенсуватися відповідними змінами складових $\Delta c_i(t)$ і $\Delta c_{xj}(t)$ до значень, обумовлених ЕМ.

Рівняння ЕМ представимо в наступному виді:

$$y_M^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y_M^{(i)} = \sum_{j=0}^m d_{jM} x^{(j)}, \quad (5.8)$$

де b_i, d_{jM} — незалежні від часу коефіцієнти рівняння ЕМ.

Якщо виділити бажані значення коефіцієнтів, рівні коефіцієнтам ЕМ, і їхні додаткові складові, то вираз (5.4) перетвориться до виду

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} [b_i + \Delta a_i(t) + \Delta c_i(t)]y^{(i)} = \sum_{j=0}^m [d_{jM} + \Delta d_j(t) + \Delta c_{xj}(t)]x^{(j)} \quad (5.9)$$

Відхилення виходу основної системи й моделі

$$\varepsilon = y - y_M \quad (5.10)$$

знаходяться із рівнянь (5.8) і (5.9)

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{j=0}^m [\Delta d_j(t) + \Delta c_{xj}(t)]x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} [\Delta a_i(t) + \Delta c_i(t)]y^{(i)} \quad (5.11)$$

Групуючи члени в (5.11), одержуємо:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(m)} + \sum_{u=0}^{m-1} b_u \varepsilon^{(i)} = & \left[\sum_{j=0}^m \Delta d_j x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta a_i y^{(i)} \right] + \\ & + \left[\sum_{j=0}^m \Delta c_{xj}(t) x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta c_i(t) y^{(i)} \right] \end{aligned} \quad (5.12)$$

або

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = F + u, \quad (5.13)$$

де $F = \left[\sum_{j=0}^m \Delta d_j x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta a_i y^{(i)} \right]$ — еквівалентне збурювання, що діє

на систему й, відповідно, що викликає похибку ε ;

$u = \left[\sum_{j=0}^m \Delta c_{xj}(t) x^{(j)} - \sum_{i=0}^{n-1} \Delta c_i(t) y^{(i)} \right]$ — еквівалентний вхідний вплив КП.

З метою спрощення математичних описів, доцільно, увівши позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n), \quad (5.14)$$

представити рівняння похибки (13) у матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}, \quad (5.15)$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}; \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Задача синтезу системи може бути зведена в цьому випадку до вибору такого керування, при якому відбувається компенсація еквівалентного збурювання $F(t)$.

Розв'язок цієї задачі ускладнюється неавтономністю системи, оскільки права частина її рівняння (5.12) явно залежить від часу. Другий метод Ляпунова, що встановлює достатні умови стійкості, дозволяє успішно подолати зазначені труднощі. Однак важливою є й задача забезпечення необхідного якості керування [51].

З метою спрощення розв'язання питань оптимізації можна припускати, що виконуються умови автономності системи. При цьому мається на увазі, що в системах із ЕМ допущення про автономність розглянутих систем є можливим при досить широкому діапазоні зміни умов їх роботи.

5.2. Метод параметричного настроювання системи

Сутність методики синтезу адаптивних систем (АС) із ЕМ і параметричним настроюванням за допомогою функцій Ляпунова доцільно спочатку розглянути на прикладі побудови системи другого порядку.

Нехай основна система й еталонна модель описуються рівняннями другого порядку, відповідно

$$\ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 y = k k_c g; \quad (5.17)$$

$$\ddot{y}_M + b_1 \dot{y}_M + b_0 y_M = k_M g, \quad (5.18)$$

де k — змінний у часі коефіцієнт об'єкта; k_c — коефіцієнт посилення системи, що перебудовується, k_M — коефіцієнт підсилення моделі; g — вхідний сигнал; $a_i = b_i$ (прийнято для простоти розгляду).

Необхідно знайти алгоритм настроювання коефіцієнта підсилення k_c з умови стійкості процесів у системі.

Віднімаючи з рівняння (5.17) рівняння (5.18) і вводячи позначення

$$\varepsilon^{(i)} = y_M^{(i)} - y^{(i)}, \quad (i = 0, 1, 2), \quad (5.19)$$

отримуємо рівняння похибки адаптивної системи

$$\ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} + b_0 \varepsilon = (k_M - k_c k) g \quad (5.20)$$

або

$$\ddot{\varepsilon} + b_1 \dot{\varepsilon} + b_0 \varepsilon = \gamma g, \quad (5.21)$$

де

$$\gamma = k_M - k_c k. \quad (5.22)$$

Для подальших міркувань вибирається функція Ляпунова у вигляді квадратичної позитивно визначеної форми фазових координат і різниці коефіцієнтів підсилення

$$V = \dot{\varepsilon}^2 + b_0 \varepsilon^2 + \lambda \gamma^2, \quad (5.23)$$

де γ — деяка довільна позитивна постійна.

Повна похідна за часом функції (5.23) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = 2\dot{\varepsilon}\ddot{\varepsilon} + 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma. \quad (5.24)$$

З (5.21) можна виразити другу похідну похибки

$$\ddot{\varepsilon} = g\gamma - b_1\dot{\varepsilon} - b_0\varepsilon, \quad (5.25)$$

яка підставляється в (5.24)

$$\frac{dV}{dt} = 2\dot{\varepsilon}g\gamma - 2b_1\dot{\varepsilon}\varepsilon - 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2b_0\dot{\varepsilon}\varepsilon + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma = 2\dot{\varepsilon}g\gamma - 2b_1\dot{\varepsilon}^2 + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma \quad (5.26)$$

Як видно з отриманого виразу, для забезпечення неперитивності похідної функції Ляпунова, тобто досягнення стійкості процесу настройки, досить виконати умову

$$2\dot{\varepsilon}g\gamma + 2\lambda\dot{\gamma}\gamma \leq 0.$$

З останньої нерівності випливає:

$$\dot{\gamma} \leq -\frac{\dot{\varepsilon}g}{\lambda}. \quad (5.27)$$

З іншого боку, з (5.22), у припущенні квазістаціонарної зміни коефіцієнта k , можна одержати:

$$\dot{\gamma} = -\dot{k}_c k. \quad (5.28)$$

Вирази (5.27) і (5.28) дозволяють визначити алгоритм настроювання

$$\dot{k}_c \geq \frac{1}{k\lambda} \dot{\varepsilon}g. \quad (5.29)$$

Структурна схема синтезованої АС наведена на рис. 5.1.

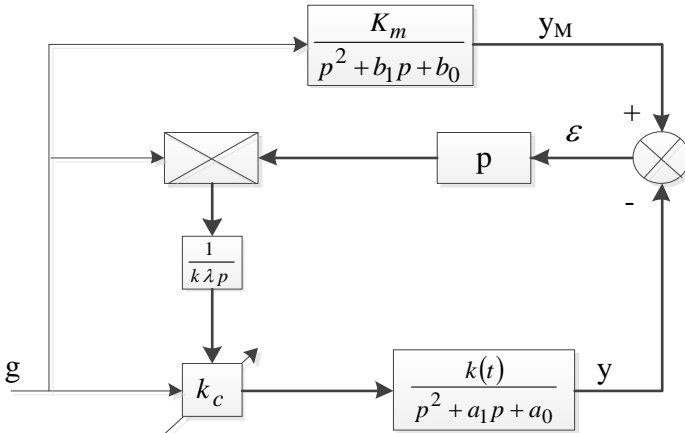


Рис. 5.1. Структурна схема АС із коефіцієнтом підсилення, що перебудовується

Поширюючи вищенаведену методику на більш загальний випадок — опису основної системи і ЕМ диференціальними рівняннями високих порядків зі змінними коефіцієнтами — можна розробити процедуру синтезу алгоритмів і законів формування параметрів, що перебудовуються.

При цьому рівняння основної системи і ЕМ приймуть вигляд

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = k(t) g ; \quad (5.30)$$

$$y_M^{(m)} + \sum_{i=0}^{m-1} b_i y_M^{(i)} = k_M g , \quad (5.31)$$

де $k(t)$, $a_i(t)$ — змінні в часі коефіцієнти; $n_i + \ell_i + \text{ранг } \Phi_{j,i}^{(v_i)} + \text{ранг } \Psi_{j,i}^{(v_i)}$, — постійні коефіцієнти моделі.

Рівнянням вигляду (5.30) описується досить широкий клас об'єктів і, враховуючи виконаний аналіз, модель (5.30) можна поширити на клас розглянутих ММ. Вважаючи порядки рівнянь (5.30) і (5.31) однаковими і, вводячи позначення

$$\varepsilon^{(i)} = y_M^{(i)} - y^{(i)} , \quad (5.32)$$

можна записати рівняння похибки

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + g [k_M - k(t)] . \quad (5.33)$$

Методика складання рівняння похибки суттєво не змінюється при різних порядках рівнянь (5.30) і (5.31), які можна зрівняти диференціюванням виразу (5.31). При цьому передбачається, що сигнал g є функцією, що диференціюється

Властивість адаптації в системі з моделлю може досягатися за допомогою коефіцієнтів, що перебудовуються (у виразах, наведених нижче, це, відповідно k_c , c_i ($i = 0, 1, \dots, n-1$)). У такому випадку вирази (5.30) і (5.31), відповідно, приймуть вигляд:

$$y^{(n)} + [a_{n-1}(t) + c_{n-1}] y^{(n-1)} + \dots + [a_0(t) + c_0] y = k_c k g ; \quad (5.34)$$

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = [k_M - k_c k(t)] g - \{b_{n-1} - [a_{n-1}(t) + k(t) c_{n-1}]\} y^{(n-1)} -$$

$$\begin{aligned}
 & -\left\{b_{n-2} - \left[a_{n-2}(t) + k(t)c_{n-2}\right]\right\} y^{(n-2)} - \\
 & \quad \dots - \left\{b_0 - \left[a_0(t) + k(t)c_0\right]\right\} y = \\
 & = \gamma_{n+1}g - \gamma_n y^{(n-1)} - \gamma_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \gamma_1 y, \quad (5.35)
 \end{aligned}$$

де

$$\left. \begin{aligned}
 \gamma_{n+1} &= k_M - k_c k(t); \\
 \gamma_n &= b_{n-1} - \left[a_{n-1}(t) + k(t)c_{n-1}\right]; \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 \gamma_1 &= b_0 - \left[a_0(t) + k(t)c_0\right].
 \end{aligned} \right\} \quad (5.36)$$

Вводячи позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1} \quad (i = 0, 1, 2, \dots, n-1), \quad (5.37)$$

можна представити (5.35) у вигляді системи рівнянь

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= x_2 \\
 \dot{x}_2 &= x_3 \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 &\quad \dots \\
 \dot{x}_{n-1} &= x_n \\
 \dot{x}_n &= -b_0 x_1 - b_1 x_2 - \dots - b_{n-1} x_n + \gamma_{n+1} g - \gamma_n y^{(n-1)} - \dots - \gamma_1 y
 \end{aligned} \right\} \quad (5.38)$$

Отриману систему рівнянь зручно записати в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}, \quad (5.39)$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}; \quad \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ u_0 \end{pmatrix}; \quad (5.40)$$

тут

$$u_0 = \gamma_{n+1}g - \gamma_n y^{(n-1)} - \gamma_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - \gamma_1 y. \quad (5.41)$$

Функція Ляпунова вибирається квадратичної виразно позитивної форми

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} + \sum_{i=0}^{n+1} \lambda_i \gamma_i^2, \quad (5.42)$$

де λ_i — позитивні постійні; \mathbf{X}^T — транспонована матриця \mathbf{X} ;

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{21} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{pmatrix} - \quad (5.43)$$

симетрична матриця.

Відповідно до (5.40) повна похідна функції Ляпунова (5.43) має вигляд:

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} = & \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X} + \\ & + 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2\lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i \end{aligned}, \quad (5.44)$$

де \mathbf{A}^T — транспонована матриця \mathbf{A} .

За умови, що \mathbf{A} є неособливою матрицею, вираз (5.44) можна представити у вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2\lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i, \quad (5.45)$$

де

$$-\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X}.$$

Матрицю \mathbf{Q} доцільно вибрати діагонального виду

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & q_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & q_{nn} \end{pmatrix}. \quad (5.46)$$

Для забезпечення стійкості процесів настроювання коефіцієнтів адаптивної системи необхідно виконати умову

$$2\mathbf{X}^T \mathbf{P}\mathbf{U} + \sum_{i=1}^{n+1} 2\lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i \leq 0. \quad (5.47)$$

З отриманого виразу, з врахуванням (5.41) і (5.42), випливає:

$$2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \times \\ \times \left[\gamma_{n+1}g - \gamma_n y^{(n-1)} - \dots - \gamma_1 y \right] + \sum_{i=1}^{n+1} 2\lambda_i \dot{\gamma}_i \gamma_i \leq 0. \quad (5.48)$$

Остання нерівність задовольняється, якщо вибрати:

$$\left. \begin{aligned} \dot{\gamma}_1 &= \frac{1}{\lambda_1} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y; \\ \dot{\gamma}_2 &= \frac{1}{\lambda_2} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(1)}; \\ &\dots \\ &\dots \\ \dot{\gamma}_n &= \frac{1}{\lambda_n} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(n-1)}; \\ \dot{\gamma}_{n+1} &= \frac{1}{\lambda_{n+1}} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) g. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

З рівнянь (5.36) і (5.49) випливають алгоритми настроювання

$$\left. \begin{aligned} \dot{k}_c &= \frac{1}{k\lambda_{n+1}} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) g; \\ \dot{c}_{n-1} &= -\frac{1}{k\lambda_n} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y^{(n-1)}; \\ &\dots \\ &\dots \\ \dot{c}_0 &= -\frac{1}{k\lambda_0} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) y. \end{aligned} \right\} \quad (5.50)$$

Значення коефіцієнтів p_{ni} ($i=1, 2, \dots, n$) в (5.50) повинні вибиратися з умови забезпечення позитивності матриць \mathbf{P} в (5.42) і \mathbf{Q} в (5.46).

Отримані рівняння дозволяють синтезувати АС із еталонною моделлю й параметричним настроюванням (рис. 5.2).

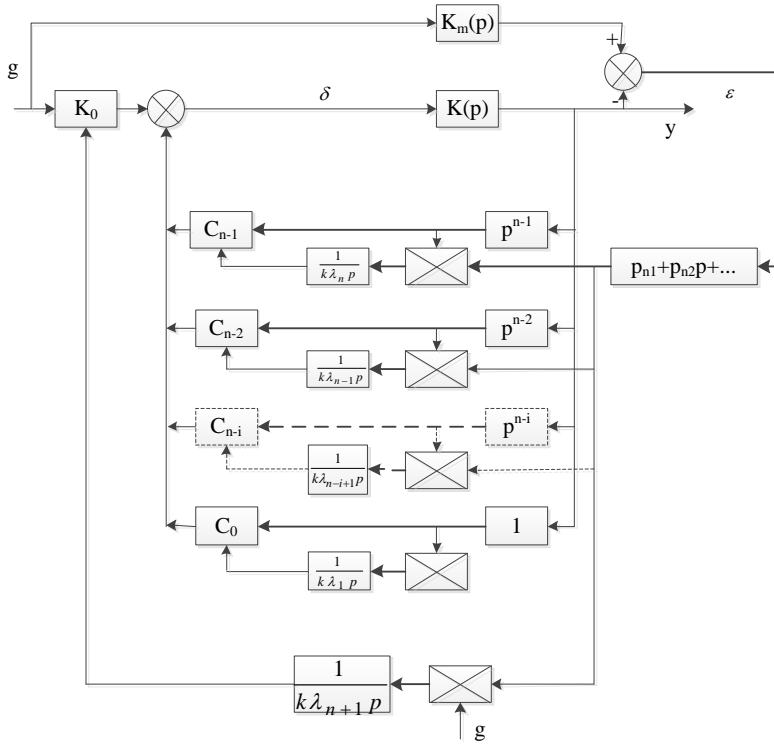


Рис. 5.2. Структурна схема АС із еталонною моделлю і параметричним настроюванням

5.3. Метод сигнального настроювання системи

Залежно від призначення і умов роботи сигнальні ланцюги настроювання в розглянутих системах можуть використовуватися як самостійно, так і в комбінації з іншими контурами настроювання.

Нижче розглядається процедура побудови системи із сигнальним настроюванням на основі другого методу Ляпунова, який дозволяє врахувати нестационарність основної системи й деякі нелінійності, наприклад, обмеження на керуючий вплив.

Нехай ОК, що включає всі інерційності основної системи, описується рівнянням:

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = k(t) \Phi(x), \quad (5.51)$$

де $\Phi(x)$ — нелінійна функція з насиченням, що задовольняє умовам

$$\Phi(x) = 0 \text{ при } x = 0;$$

$$x\Phi(x) > 0 \text{ при } x \neq 0;$$

$$\Phi(x) = M \text{ при } x \geq c;$$

$$M = const; \quad c = const.$$

Межі зміни змінних коефіцієнтів вважаються відомими

$$\left. \begin{aligned} k_{\min} &\leq k(t) \leq k_{\max}; \\ a_{0\min} &\leq a_0(t) \leq a_{0\max}; \\ &\dots \\ a_{(n-1)\min} &\leq a_{n-1}(t) \leq a_{(n-1)\max}. \end{aligned} \right\} \quad (5.52)$$

Рівняння моделі зручно представити у формі (5.31)

$$y_M^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i y_M^{(i)} = k_M g, \quad (5.53)$$

де g — вхідний сигнал.

Віднімаючи від (5.53) рівність (5.51), і використовуючи позначення (5.32), знаходиться рівняння похибки системи

$$\varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i(t)] y^{(i)} + k_M g - k(t) \Phi(x), \quad (5.54)$$

яке, згідно (5.15) і (5.16), можна представити в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U}. \quad (5.55)$$

Функція Ляпунова вибирається у вигляді квадратичної форми фазових координат

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X},$$

де \mathbf{P} — симетрична матриця (5.43).

Повна похідна функції Ляпунова, відповідно до (5.55), має вигляд:

$$\dot{V} = \mathbf{X}^T (\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}) \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U}. \quad (5.56)$$

Якщо \mathbf{A} — неособлива матриця, то справедлива рівність

$$\mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} = -\mathbf{Q}. \quad (5.57)$$

Матрицю \mathbf{Q} при синтезі АС доцільно вибирати діагональною

$$\mathbf{Q} = \left\| \|q_{ij}\| \right\|, \quad q_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j \quad (5.58)$$

Другий доданок у правій частині рівняння (5.56), з врахуванням (5.55), приймає вигляд:

$$2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} = 2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n)u_0. \quad (5.59)$$

Якщо вибрати

$$u_0 = -h \operatorname{sign} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \quad (5.60)$$

де

$$0 \leq h \leq \infty; \\ \operatorname{sign} x = \begin{cases} 1, & x > 0; \\ 0, & x = 0; \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

то досягається непозитивність розглянутого виразу

$$2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} \leq 0. \quad (5.61)$$

У такому випадку похідна функції Ляпунова (5.56) непозитивна й забезпечується стійкість руху основної системи щодо руху ЕМ. З врахуванням (5.55) вираз (5.60) перетвориться до вигляду:

$$\sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M \delta + k_M y - k(t) \Phi(\delta + z) =, \quad (5.62) \\ = -h \operatorname{sign} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n)$$

де

$$g = \delta + y, \quad x = \delta + z.$$

Знак отриманого виразу буде визначатися знаком функції $\Phi(\delta + z)$, якщо

$$|\Phi(\delta + z)| \geq \left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)}}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M y}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M \delta}{k(t)} \right|_{\max}. \quad (5.63)$$

Підставляючи нелінійну функцію як добуток двох співмножників

$$\Phi(\delta + z) = \eta(\delta + z) \times (\delta + z) \quad (5.64)$$

і, враховуючи (5.63) при обмежених сигналах δ і z , умову (5.60) можна записати в наступному виді

$$|z| \geq \left| \frac{\sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)}}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M y}{k(t)} \right|_{\max} + \left| \frac{k_M \delta}{k(t)} \right|_{\max} + |\delta|_{\max}. \quad (5.65)$$

$$\text{sign } z = \text{sign} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n). \quad (5.66)$$

Вирази (5.65) і (5.66) дозволяють знайти алгоритм настроювання

$$z \geq \{B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_{n-1} |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta|\} \text{sign} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \quad (5.67)$$

де

$$B_0 = \left| \frac{a_0(t) - b_0}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad B_1 = \left| \frac{a_1(t) - b_1}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad \dots, \\ B_{n-1} = \left| \frac{a_{n-1}(t) - b_{n-1}}{k(t)\eta} \right|_{\max}; \quad C_0 = \left| \frac{k_M}{k(t)\eta} + 1 \right|_{\max}.$$

Для забезпечення безперервності розв'язку функцію знака $\text{sign}(\cdot)$ в (5.67) слід замінити функцією насичення

$$\text{sat}(\chi k_1) = \begin{cases} 1, & \chi k_1 > 0; \\ \chi k_1, & |\chi k_1| \leq 1; \\ -1, & \chi k_1 < 0, \end{cases} \quad (5.68)$$

де k_1 — постійний коефіцієнт, який бажано вибирати більшим, з метою наближення до релейного керування. В силу (5.68) вираз (5.67) перетвориться до вигляду:

$$z \geq \{B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_{n-1} |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta|\} \text{sat} [k_1 (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n)] \quad (5.69)$$

Враховуючи раніше введене позначення $x_{i+1} = \varepsilon^{(1)}$, на основі (5.69) можна одержати:

$$z \geq \left\{ B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_{n-1} |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta| \right\} \text{ sat } \left[k_1 \left(p_{n1} \varepsilon + p_{n2} \varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn} \varepsilon^{(n-1)} \right) \right]. \quad (5.70)$$

На рис. 5.3 представлена структурна схема АС, складена відповідно до отриманого алгоритму (5.70).

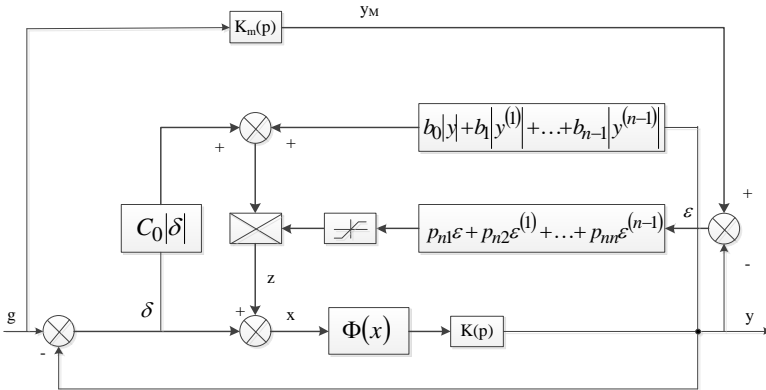


Рис. 5.3. Структурна схема АС з сигнальним настроюванням

Слід зазначити, що технічна реалізація синтезованої АС відповідно до (5.70), через наявність у її складі модульних і множних елементів, є важко реалізованою задачею. Однак у ряді випадків, наприклад, при обмежених сигналах, вдається спростити алгоритм настроювання без порушення умов стійкості. Тоді співвідношення (5.70) прийме вигляд

$$z \geq k_y \text{ sat } \left[k_1 \left(p_{n1} \varepsilon + p_{n2} \varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn} \varepsilon^{(n-1)} \right) \right], \quad (5.71)$$

де

$$k_y = \left\{ B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_{n-1} |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta| \right\}_{\max}.$$

Використання (5.71) приводить до значного спрощення структури АС (рис. 5.4) і її технічної реалізації.

Як вказувалося вище, в АС із сигнальним настроюванням при широкому діапазоні зміни параметрів об'єкта не вдається забезпечити необхідний ступінь інваріантності до параметричних порушень.

Крім того, виникають ускладнення в забезпеченні умови стійкості руху (5.65) при інтенсивних входніх сигналах. Для подолання зазначених труднощів доцільно в розглянуту систему ввести додаткові контури параметричного настроювання для стабілізації її деяких істотних параметрів, наприклад, коефіцієнта підсилення.

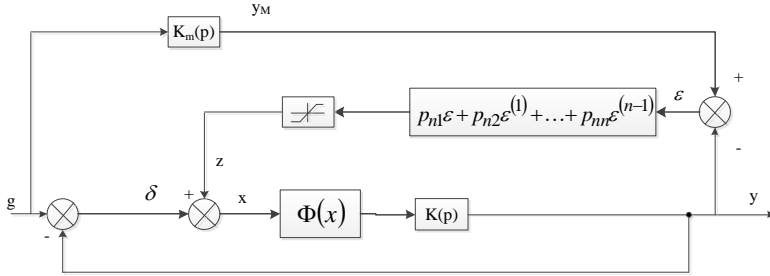


Рис. 5.4. Структурна схема АС зі спрощеним контуром настроювання

5.4. Метод комбінованого настроювання системи

Другий метод Ляпунова дозволяє розробити процедуру синтезу АС із комбінованим настроюванням. У зв'язку із цим рівняння, що описує динамічні властивості основної системи, представляється в наступному виді:

$$y^{(n)} + a_{n-1}(t)y^{(n-1)} + \dots + a_0(t)y = k(t)k_c x, \quad (5.72)$$

де k_c — коефіцієнт посилення, що перебудовується.

Відповідно до (5.53) і (5.72) можна скласти рівняння похибки

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} + b_{n-1}\varepsilon^{(n-1)} + \dots + b_0\varepsilon = & [a_{n-1}(t) - b_{n-1}]y^{(n-1)} + \\ & + [a_{n-2}(t) - b_{n-2}]y^{(n-2)} + \dots + [a_0(t) - b_0]y + k_M g - k(t)k_c x. \end{aligned} \quad (5.73)$$

Отриманий вираз легко приводиться до вигляду:

$$\begin{aligned} \varepsilon^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} b_i \varepsilon^{(i)} = & \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + \\ & + \delta [k_M - \mu k(t)k_c] + \mu k(t)k_c \delta - k(t)k_c x + k_M y, \end{aligned} \quad (5.74)$$

де μ — деяка позитивна постійна; $\delta = g - y$ — сигнал похибки.

З урахуванням позначення

$$\varepsilon^{(i)} = x_{i+1}, \quad (5.75)$$

(5.74) переписється в матричній формі

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{U},$$

де

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}; \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -b_0 & -b_1 & -b_2 & \dots & -b_{n-1} \end{pmatrix}; \mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ \dots \\ u_0 \end{pmatrix}; \quad (5.76)$$

тут

$$u_0 \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M y + \delta [k_M - \mu k(t) k_c] + k(t) k_c [\mu \delta - x].$$

Вибирається функція Ляпунова у вигляді квадратичної форми фазових координат

$$V = \mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{X} + \lambda \gamma^2, \quad (5.77)$$

де

$$\gamma = k_M - \mu k(t) k_c; \quad (5.78)$$

λ — позитивна постійна; \mathbf{P} — симетрична матриця (5.40).

Повна похідна за часом функції (5.77) має вигляд:

$$\frac{dV}{dt} = -\mathbf{X}^T \mathbf{Q} \mathbf{X} + 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + 2\lambda \dot{\gamma} \gamma, \quad (5.79)$$

де $-\mathbf{Q} = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ — діагональна матриця (5.46).

Два останні доданки у правій частині рівності (5.79) з врахуванням (5.76) можна записати в такий спосіб

$$\begin{aligned} 2\mathbf{X}^T \mathbf{P} \mathbf{U} + 2\lambda \dot{\gamma} \gamma &= 2(p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \dots \\ &\dots + p_{nn} x_n) \left\{ \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M + k(t) k_c (\mu \delta - x) \right\} + \\ &+ 2(p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \dots + p_{nn} x_n) \delta \dot{\gamma} + 2\lambda \dot{\gamma} \gamma. \end{aligned} \quad (5.80)$$

Як впливає з останнього рівняння, похідна функції Ляпунова (5.79) буде неозитивною, якщо виконуються дві умови

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n-1} [a_i(t) - b_i] y^{(i)} + k_M y + k(t) k_c (\mu \delta - x) &= \\ = -h \operatorname{sign} (p_{n1} x_1 + p_{n2} x_2 + \dots + p_{nn} x_n) \delta \dot{\gamma} + 2\lambda \dot{\gamma} \gamma, 0 \leq h \leq \infty, \end{aligned} \quad (5.81)$$

$$2(p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n) \delta \dot{\gamma} + 2\dot{\gamma} \dot{\gamma} \leq 0. \quad (5.82)$$

З рівняння (5.81), відповідно до процедури, викладеної в розділі 5.3, можна представити алгоритм сигнального настроювання

$$z \geq \left\{ B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_n |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta| \right\} \text{sign} (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n), \quad (5.83)$$

де

$$B_0 = \left| \frac{a_0(t) - b_0 + k_M}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad B_1 = \left| \frac{a_1(t) - b_1}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad \dots;$$

$$B_{n-1} = \left| \frac{a_{n-1}(t) - b_{n-1}}{k(t)k_c} \right|_{\max}; \quad C_0 = |\mu + 1|_{\max}.$$

Для забезпечення безперервного розв'язку у виразі (5.83) слід замінити функцію знака функцією насичення

$$z \geq \left\{ B_0 |y| + B_1 |y^{(1)}| + \dots + B_n |y^{(n-1)}| + C_0 |\delta| \right\} \text{sat} \left[k_1 (p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)}) \right]. \quad (5.84)$$

Рівняння (5.82) визначає алгоритм настроювання коефіцієнта підсилення системи

$$\dot{\gamma} \leq -\frac{1}{\lambda} \delta (p_{n1}x_1 + p_{n2}x_2 + \dots + p_{nn}x_n). \quad (5.85)$$

З іншого боку, в силу (5.78), при квазістаціонарній зміні коефіцієнта підсилення $k(t)$, впливає:

$$\dot{\gamma} = -\mu k \dot{k}_c. \quad (5.86)$$

Прирівнюючи (5.85) і (5.86), можна одержати:

$$k_c \geq k_H \delta \left[p_{n1}\varepsilon + p_{n2}\varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn}\varepsilon^{(n-1)} \right], \quad (5.87)$$

де $k_H = \frac{1}{\lambda \mu k}$ — коефіцієнт настроювання системи.

При синтезі АС із ЕМ і комбінованим настроюванням (рис. 5.5) можна врахувати обмеження керуючого впливу, якщо в праву частину рівняння (5.72) включити нелінійну функцію з насиченням

$$y^{(n)} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i(t) y^{(i)} = k(t) k_c \Phi(x). \quad (5.88)$$

$$k_c(e) \geq k_H \delta \left[p_{n1} \varepsilon + p_{n2} \varepsilon^{(1)} + \dots + p_{nn} \varepsilon^{(n-1)} \right]. \quad (5.91)$$

Вирази (5.90) і (5.91) дозволяють синтезувати АС (Рис. 5.5), яку можна спростити (рис. 5.6), відповідно до виразу (5.71).

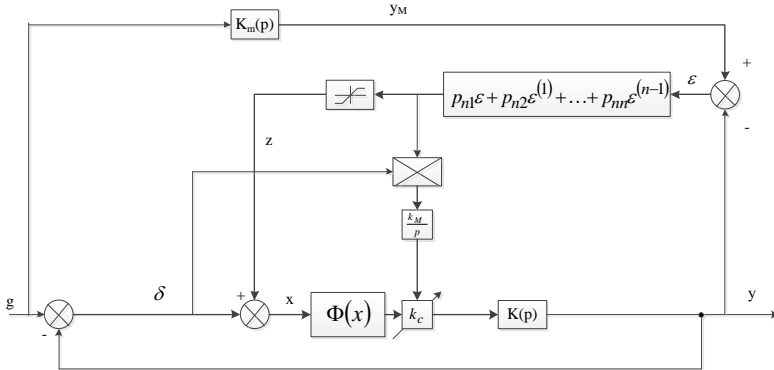


Рис. 5.6. Структурна схема АС зі спрощеним контуром комбінованого настроювання

Отже, вирішено науково-технічну задачу, яка полягає у синтезі математичних моделей визначеного класу мобільних об'єктів та засобів керування цими об'єктами на основі застосування і удосконалення безпошукових самоналагоджуваних систем з еталонною моделлю, що забезпечує оптимізацію зазначених систем у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі для ефективного розв'язання прикладних задач. Проведено аналіз математичних моделей типових систем керування та виконано узагальнення їх математичного опису, внаслідок чого запропоновано узагальнену модель, яка, зокрема, визначає вид диференціальних рівнянь, їх коефіцієнти, їх розмірність тощо. Узагальнення математичного опису здійснено з метою уніфікації методів щодо синтезу стратегій адаптивного керування визначеним класом об'єктів. Виконано якісне дослідження узагальненої моделі, що показало можливість переходу до еквівалентних математичних формулювань у випадках апаратної або програмної реалізації законів керування. Сформульовано мету та задачі керування об'єктів та обґрунтовано необхідність адаптації при керуванні ними. Виконано аналіз та порівняльну характеристику існуючих принципів побудови автоматичних систем керування з урахуванням особливостей об'єктів керування. В результаті проведеного аналізу виділено клас адаптивних систем з еталонною моделлю як такий, що забезпечує високу адекватність синтезованого управління

(з точністю до відтворення моделлю динаміки реального об'єкта), високу швидкість (управління формується в реальному масштабі часу) та просту апаратну реалізацію. Досліджено також можливість застосування програмних засобів (програмної платформи Matlab) для розв'язання задачі синтезу адаптивного управління об'єкту, зокрема, при математичній формалізації системи керування у просторі станів. Набув подальшого розвитку метод синтезу законів адаптивного керування визначеним класом об'єктів, а також структур систем керування з еталонною моделлю, що реалізують ці закони. В основу синтезу законів керування та вказаних структур покладено властивість виконання сталості процесу самоналагоджування (яка визначається за другим методом Ляпунова). Це дозволило врахувати обмеження на управляючий вплив. Задачу синтезу розв'язано для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект самонастроювання досягається за рахунок зміни параметрів пристрою управління), з сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, коли ефект самонастроювання забезпечується за рахунок компенсуючих сигналів), а також з комбінованим настроюванням, що забезпечує достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації. Виконано оптимізацію синтезованих систем керування з еталонною моделлю у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі, що забезпечує мінімізацію часу узгодження вихідних координат об'єкту та еталонної моделі (системи, оптимальні за швидкістю).

Таким чином, одержав подальший розвиток метод синтезу стратегій і структур адаптивного керування ММ на основі вдосконалення безпошукових АС із еталонною моделлю. В основу синтезу законів керування і структур АС покладена властивість задоволення їх стійкості, обумовлене за другим методом Ляпунова.

Використання в ході синтезу стратегій і структур АС функцій Ляпунова дозволяє врахувати нестационарність основного контуру АС (тобто такого, що включає реальний модельований об'єкт), а також деякі нелінійності, наприклад, обмеження на керуючий вплив.

Задача синтезу вирішена для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект адаптації досягається за рахунок зміни параметрів керуючого пристрою), із сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, у яких ефект самонастроювання досягається за рахунок сигналів, що компенсують), а також з комбінованим настроюванням. Особливість останніх полягає в тому, що вони забезпечують достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації.

6. МОДЕЛЬНО-ОРІЄНТОВАНІ МЕТОДИ І СИСТЕМИ ДІАГНОСТУВАННЯ

6.1 Задачі ідентифікації і діагностики комп'ютерно-інтегрованих систем (на прикладі силових енергетичних установок)

Силові енергетичні установки являють собою високонапружені інженерні ансамблі високої складності, в яких використовуються передові наукові досягнення і реалізуються нові можливості сучасної техніки. Повний математичний опис таких технічних об'єктів досягається складними системами диференціальних рівнянь із частинними похідними з досить непротими граничними умовами. Розв'язання подібних систем рівнянь досить трудомістке і вимагає таких витрат машинного часу, що практично використовується лише для початкового вивчення динамічних властивостей і для остаточної перевірки отриманих законів і алгоритмів моделювання і керування (і це в тому випадку, якщо взагалі вдається знайти стійкі методи чисельного розв'язання таких систем, що, як показує практика, не завжди досягається) [23, 45, 165].

Переважаюча частина досліджень динаміки об'єктів і пошук законів управління, а також попередня діагностика проводяться за допомогою більш простих систем диференціальних рівнянь, як правило, звичайних, одержуваних більш-менш глибоким спрощенням вихідної повної системи [50, 69, 203]. Такі спрощені моделі, втрачаючи другорядні властивості вихідної повної системи (хоча, може бути, і важливі для розуміння тонкощів динаміки і глибоких рівнів діагностики), проте повинні зберегти її істотні властивості і властиві їй головні динамічні ефекти. Очевидно, що одержання таких спрощених математичних описів є складною проблемою, яка не має стандартної методики і потребує щораз індивідуального підходу, успіх якого багато в чому визначається інтуїцією дослідників [54, 160, 193]. Тим більшу цінність представляють наявні і розроблені методи спрощення конкретних складних систем диференціальних рівнянь. Методиці спрощення математичного опису присвячується все більше публікацій [8, 26, 57, 70].

Коло задач, покладене на системи автоматичного управління, надзвичайно розширилося із появою спеціалізованих процесорів. Це дозволяє проводити не тільки реєстрацію порушень і запобігання аварійним ситуаціям, але також і досить глибокий діагноз стану енергетичних установок. Подібна можливість, природно, потребує розробки як алгоритмів діагностики технічного стану різних елементів, діагностики процесів і режимів систем, так і принципів побудови самої системи діагностики, яка повинна ввійти складовою частиною в загальну інформаційно-керуючу систему таких об'єктів [19, 28, 29, 61, 64, 75].

Модельний підхід до розв'язання задач ідентифікації і діагностики. Як відомо [90, 91], в задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизначеною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мері вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі [152]. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід пояснити, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і дають підстави для постановки діагнозу [153]. Методично обидві задачі вирішуються практично однаково, і задачу діагностики можна розглядати як задачу ідентифікації якогось нового об'єкта, який відрізняється від відомого новими властивостями параметричного або інженерно-фізичного характеру, породженими або нерозрахованою зміною характеристик, або виникненням нерозрахованих конструктивних або фізичних ефектів.

Математична постановка задачі може бути сформульована в такий спосіб. Нехай є математична модель об'єкта енергетичної установки для розробки яких залучається вся апріорна інформація про об'єкт керування: конструкторська і технічна документація, дані по теплофізичним, міцносним і електричним властивостям конструкційних матеріалів, вагові зведення, дані по потокам речовини і енергії, гідродинамічні характеристики гідравлічних трактів, моменти інерції обертових частин тощо [31, 175].

При цьому намагаються врахувати всі істотні фізичні процеси в об'єкті і всі його істотні конструктивні особливості, завдяки чому визначається вид і число рівнянь моделі, а також граничні і початкові умови. Однак коефіцієнти рівнянь, принаймні деякі, залишаються все-таки недовизначеними. Для їх довизначення виявляється необхідним залучати експериментальні дані. Іноді буває досить да-

них по стаціонарних режимах, але, як правило, доводиться використовувати дані по динамічних режимах: досліджувати відгуки об'єкта на ті або інші збурювання [37, 50, 52, 198].

Таким чином, задачу ідентифікації можна сформулювати наступним чином. Нехай є модель установки, що задається оператором $B = \{B_1, B_2\}$:

$$B_1 = \begin{cases} F_i \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \frac{\partial u_i}{\partial z_i}, \frac{\partial u_i}{\partial t}, \dots, \frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} \right) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, \alpha, u_i = u_i(q_i); \\ q_i = \{x_i, y_i, z_i, t\} \in R_i^{K_i}, \\ \psi_j \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^{r_j} u_i}{\partial t^{r_j}} \right) \Big|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i) \Big|_{q_i \in S_p}, \\ p = 1, 2, \dots, l, j = 1, 2, \dots, \gamma, K_i \leq 4, \end{cases} \quad (6.1)$$

де S_p — граничні замкнені багатовиди в просторах, розмірність яких менше K_i ; $\varphi_i(q_i)$ — задані функції, певні на багатовидах S_p ; t і r визначають порядок вищих похідних за часом.

Оператор B_1 , що є частиною математичної моделі установки, визначає загальний вид граничної задачі: систему рівнянь із частинними похідними і з відповідними граничними і початковими умовами.

Аналогічно задача Коші, обумовлена спрощеною моделлю, тобто системою звичайних диференціальних рівнянь, задається оператором B_2 :

$$B_2 = \begin{cases} \Phi_i(t, u_i, u_i', u_i'', \dots, u_i^{(n_i)}) = 0, \\ i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ u_i|_{t=0} = u_{i0}, u_i'|_{t=0} = u_{i0}', u_i^{(n_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i-1)}. \end{cases} \quad (6.2)$$

Сукупність просторів утворює простір S^N , $\{R_i^{K_i}\} = S^N$, тобто

$$\sum_{i=1}^{\beta} K_i = N.$$

Розв'язком системи рівнянь $B(i) = 0$ є деякі вектор-функції u^* , що відповідають певним сукупностям початкових і граничних умов. Ці вектор-функції перетворюють систему рівнянь (6.1), (6.2) у тотожність: $B(u^*) \equiv 0$. Очевидно, що $u^* = \{u_i^*\}$, $i = 1, 2, \dots, \beta$.

Задача ідентифікації. Нехай є експериментальні динамічні процеси, отримані при випробуваннях установки $q_{Ei} \in Q_E$ (Q_E — виділений клас динамічних процесів, $i = 1, 2, \dots, h$), які характеризуються вектор-функцією вимірюваних координат $q_{Ei} \rightarrow \mu_i(t)$, $\mu_i(t) = \{\mu_{ij}(t)\}$, $\mu_i(t) \in M$ де $j = 1, 2, \dots, \rho$; M — виділений клас вимірюваних функцій, що відповідають Q_E . При цьому нехтуємо похибками вимірів і будемо вважати μ_i точними значеннями.

Щоб порівняти результати вимірів з результатами розрахунків, що виходять із розв'язку рівнянь моделі (6.1), (6.2), необхідно визначити сукупність граничних і початкових умов, щоб вони відповідали експериментальним умовам, що породжують процеси q_{Ei} . Показані в такий спосіб граничні задачі породять розв'язки системи $B(U) = 0 \rightarrow U_i^*$, які будуть відповідати q_{Ei} . Позначимо процеси, відповідні до розв'язків t^* , а їх множину — $Q = \{q_i\}$.

Далі виникає задача порівняння елементів множин Q і Q_E . Процеси q_{Ei} характеризуються вимірюваними координатами $\mu_i(t) \in M$, $\mu_i(t)$ визначені на просторі вимірюваних координат S_z . Цей простір, природно, уже входить у простір координат, що розраховуються, $S^N : S^z \in S^N$ системи. Введемо оператор P_y , що переводить розв'язки U_i^* у вектор-функції вимірюваних або обчислюваних координат y_i :

$$P_y(U_i^*) = Y_i(t), Y_i(t) \in M.$$

Природно, що вектор-функції Y_i мають ту ж розмірність, що і вектор-функції вимірюваних координат об'єкта μ_i : $Y_i(t) = \{y_{ij}(t)\}$, $j = 1, 2, \dots, \rho$. Утворюємо величину $\max_{t,j} |y_{ij}(t) - \mu_{ij}(t)| = \omega_i \in \Omega$, яка буде мірою неточності моделі В у процесі q_{Ei} . Задача ідентифікації полягає в такій зміні моделі В, щоб міра неточності моделі по всіх експериментальних процесах $q_{Ei} \in Q_E$ була б менше заданої величини: $\omega < \varepsilon$.

Нехай є деяка конкретна модель об'єкта, що задається оператором В, яка характеризується певними коефіцієнтами $a_{ki}, \bar{a}_{ij}, \bar{\bar{a}}_{ki}$:

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \left\{ \begin{aligned} &F_i \left(a_{1i} u_i, a_{2i} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, a_{3i} \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \dots, a_{ki} \frac{\partial^{m_i} u_i}{\partial t^{m_i}} \right) = 0, \\ &\psi_j \left(\bar{a}_{1j} u_i, \bar{a}_{2j} \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \bar{a}_{lj} \frac{\partial^{r_j} u_i}{\partial t^{r_j}} \right) \Bigg|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i), \\ &i = 1, 2, \dots, \alpha, \quad j = 1, 2, \dots, \gamma. \end{aligned} \right. \quad (6.3) \\
 B_2 &= \left\{ \begin{aligned} &\Phi_i \left(t, a_{1i} u_i, a_{2i} u_i', \dots, a_{n_i+1, i} u_i^{(n_i)} \right) = 0, \\ &i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ &u_i|_{t=0} = u_{i0}, u_i'|_{t=0} = u_{i0}', u_i^{(n_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i-1)}. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

Множина $A = \{a\}$ представляє коефіцієнти при невідомих і їх похідних у рівняннях (6.3), обчислені з врахуванням всіх відомих конструктивних особливостей установки і всіх фізичних процесів, що діють у ній.

Першою задачею ідентифікації буде задача «підгонки» коефіцієнтів математичної моделі B . Це задача може бути сформульована в такий спосіб. Виділимо серед коефіцієнтів $A = \{a\}$ моделі B ту підмножину «сумнівних» коефіцієнтів $A_\lambda = \{a_\lambda\}$, $\lambda = \alpha, \beta, \dots, \rho$, значення яких не можуть бути обчислені без залучення експериментальних даних. Такими можуть бути, наприклад, коефіцієнти, обумовлені гідравлічними опорами трактів теплоносія, температурні залежності реактивності реактора і т.п. Уточнення значень цих коефіцієнтів з врахуванням даних експериментів q_i і повинне звести до припустимої величини розбіжності ω_i теоретичних і експериментальних залежностей. Таким чином, ми будемо шукати нові значення «сумнівних» коефіцієнтів $A'_\lambda = \{a'_\lambda\}$, $\lambda = \alpha, \beta, \dots, \rho$.

Природно, що зміни коефіцієнтів моделі B приведе до зміни величин ω_i , які приймуть значення ω'_i :

$$\omega'_i = \omega'_i(A'_\lambda).$$

Нехай область можливої зміни значень коефіцієнтів $A'_\lambda \in \Omega$. Тоді виникають наступні задачі ідентифікації.

1. Відшукання області $\bar{\Omega} \in \Omega$, у якій ω'_i лежить у заданих межах, тобто потрібно знайти область Ω , таку, що якщо $\bar{A}'_\lambda \in \bar{\Omega}$, те

$$\max_i \left[\omega'_i(A'_\lambda) \right] < \varepsilon. \quad (6.4)$$

2. Відшукання ω_{\min} , тобто таких $\tilde{A}'_\lambda \in \Omega$, на яких досягається
$$\omega_{\min} = \min_{\Omega} \left[\max_i \left(\omega_i(A'_\lambda) \right) \right].$$

Будь-який набір коефіцієнтів A'_λ вирішує задачу ідентифікації. Набір коефіцієнтів A'_λ дає «найкращу» ідентифікацію, досягну в моделі B .

Якщо ж нерівність (6.4) не може бути досягнута, тобто якщо
$$\omega_{\min} = \min_{\Omega} \left[\max_i \left(\omega_i(A'_\lambda) \right) \right] > \varepsilon,$$
 то задача ідентифікації не вирішується підбором коефіцієнтів в операторі B . Це значить, що при розробці моделі не врахований який-небудь істотний фізичний процес, що протікає в установці, або ж яка-небудь її істотна конструктивна особливість. Їх врахування приведе до модифікації оператора B . В результаті одержимо новий оператор B' , який буде відрізнятися від оператора B або наявністю нових членів у рівняннях, або наявністю нових рівнянь:

$$B'_1 = \begin{cases} F_i \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \frac{\partial u_i}{\partial y_i}, \dots, \frac{\partial^{p_i} u_i}{\partial t^{p_i}}, \frac{\partial^{p_i+1} u_i}{\partial x_i^{p_i+1}}, \dots, \frac{\partial^{m_i+v_i} u_i}{\partial t^{m_i+v_i}} \right) = 0, \\ i = 1, 2, \dots, \Theta, \Theta + 1, \dots, \alpha + \beta, \\ q_i = \{x_i, y_i, z_i, t\} \in R_i^{K_i}. \\ \left. \psi_j \left(u_i, \frac{\partial u_i}{\partial x_i}, \dots, \frac{\partial^{r_j+\eta_j} u_i}{\partial t^{r_j+\eta_j}} \right) \right|_{q_i \in S_p} = \varphi_i(q_i). \end{cases}$$

$$B'_2 = \begin{cases} \Phi_i \left(t, u_i, u'_i, \dots, u_i^{(\alpha_i)}, \dots, u_i^{(n_i+\pi_i)} \right) = 0, \\ i = \alpha + 1, \alpha + 2, \dots, \beta, \\ u_i|_{t=0} = u_{i0}, u_i^{(n_i+\pi_i-1)}|_{t=0} = u_{i0}^{(n_i+\pi_i-1)}, \\ i = \alpha + \delta + 1, \alpha + \delta + 2, \dots, k + 1, \dots, \beta + \chi. \end{cases}$$

Для цього нового оператора B' при граничних і початкових умовах, відповідних до обраних процесів $q_i \in Q$, виходять нові зв'язки $U_i^{*'} :$

$$B'(U_i^{*'}) \equiv 0,$$

які породять нові вектор-функції вимірюваних координат $Y_i'(t)$ і відповідно нові значення $\omega'' = \max_{i,j} |y_{ij}'(t) - \mu_{ij}(t)|$, після чого застосування методу підгонки коефіцієнтів, як правило, вирішує задачу ідентифікації. Шукаємо $\bar{A}'_\lambda = \{\bar{a}'_\lambda\}$, $\lambda = \alpha, \dots, \rho$, де $\bar{A}'_\lambda \in \Omega$, такі, що $\max_i \left[\omega_i''(\bar{A}'_\lambda) \right] < \varepsilon$, або «найкращий» набір коефіцієнтів $\tilde{A}'_\lambda \in \Omega$, при якому

$$\omega_{\min}(\tilde{A}'_\lambda) = \min_{\Omega} \left[\max_i \left(\omega_i''(\bar{A}'_\lambda) \right) \right].$$

Іноді задача ідентифікації виникає при спрощенні моделі об'єкта. У цьому випадку структура спрощеної моделі, тобто число і характер рівнянь, буває відома і потрібно визначити коефіцієнти рівнянь, порівнюючи відгуки спрощеної системи з відгуками повної системи рівнянь на однакові вхідні впливи. Задача ця вирішується в такий же спосіб, що як і попередня, тільки порівнюються динамічні процеси в ідентифікованій (спрощеній) і вихідній (повній) системах рівнянь.

Задача діагностики. Задача діагностики [96] ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури.

У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Методика досліджень, як і математична постановка задачі, у цих випадках не відрізняється від таких для задачі ідентифікації. Відмінність полягає лише в тому, що до появи нерозрахованих ситуацій модель об'єкта була ідентифікована і, отже, необхідність внесення в неї змін викликана якими-небудь змінами в об'єкті.

Трохи по-іншому може бути поставлена задача діагностики перехідних режимів досліджуваних об'єктів: процесів пуску, зупинки і зміни режимів роботи. Такі динамічні режими мають, як правило, характерні «динамічні ефекти», під якими ми розуміємо характерні риси перехідних процесів, до яких можна віднести, наприклад, загальний час пускового процесу, наявність або відсутність перерегулювання координат системи, просторові і тимчасові градієнти, пос-

лідовність протікання фізичних процесів і динамічних явищ і їх залежність від неточності задання початкового стану установки і т.п. Природно, що розрахункова система характерних динамічних ефектів e залежить від початкового стану $U_0 \in U$ в прийнятій математичній моделі $B = \{B_1, B_2\}$ і від обраного керування $w_i(t) \in W$:

$$e_i = e_i(B, U_0, W), i = 1, 2, \dots, n.$$

Таким чином, виникає попередня задача визначення системи характерних динамічних ефектів: для оператора B , класу початкових умов U_0 і обраного класу керувань W визначити систему характерних динамічних ефектів $E = \{e_i(B, U_0, W)\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Очевидно, що різні класи початкових умов і різні класи керувань породять різні системи динамічних ефектів.

Після визначення системи характерних динамічних ефектів задача діагностики динамічних режимів може бути сформульована в такий спосіб.

Нехай маємо оператор $B = \{B_1, B_2\}$, і нехай U^* є розв'язок рівняння $B(U)$ для граничних і початкових умов і керувань, які належать до виділених класів $u_{0i} \in U_0$, $w_i \in W$.

Нехай функція U^* містить систему ефектів $E = \{e_i\}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Нехай далі з експерименту впливає наявність у досліджуваних динамічних режимах динамічних ефектів $\{e_\alpha\} \in E$, $\alpha = 1, 2, \dots, t$. Потрібно змінити модель B до $B' = \{B'_1, B'_2\}$ таким чином, щоб розв'язок системи рівнянь $B'(U) = 0$ для класу початкових умов U_0 і класу керувань W містив ефекти $\{e_\alpha\}$, тобто система ефектів E , відповідна до оператора B' , містила ці ефекти:

$$E' = \{e_i\}, i = 1, 2, \dots, \alpha, \dots, n.$$

Відшукування такого оператора B , а разом з тим і технічна його інтерпретація і вирішують поставлену задачу діагностики перехідних режимів.

6.2. Аналіз і вибір методів ідентифікації

Створення формалізованих моделей складних динамічних об'єктів пов'язане зі стисканням описової і фактичної інформації. Першим етапом у розв'язанні проблеми є ідентифікація об'єкта досліджень — побудова його математичної моделі за результатами спостережень. Задача ідентифікації формулюється в такий спосіб: за результатами спостережень над вхідними і вихідними змінними об'єкта побудувати оптимальну в деякому змісті модель. Практичне розв'язання задачі ідентифікації являє собою обчислювальну процедуру оцінювання невідомих параметрів математичної моделі, в результаті якої встановлюються закономірності функціонування вихідного об'єкта [17, 74].

До теперішнього часу в різноманітних областях досліджень накопичений достатній досвід розв'язання задач ідентифікації об'єктів різної природи. Підвищений інтерес дослідників і інженерів до методів ідентифікації обумовлений природним бажанням ефективної організації функціонування об'єкта в сучасних умовах розвитку комп'ютерно-інтегрованих систем. З метою оцінки конкретних обчислювальних алгоритмів ідентифікації проаналізуємо найбільш часто застосовувані методи розв'язання задач ідентифікації з порівнянням ряду критеріїв.

У якості об'єкта ідентифікації розглянемо лінійну дискретну систему з одним входом $u(t)$ і одним виходом $y(t)$:

$$\begin{aligned}x(t_{k+1}) &= Fx(t_k) + bu(t_k) + dw(t_k), \\z(t_k) &= h^T x(t_k) + v(t_k),\end{aligned}\tag{6.5}$$

де F — матриця системи розмірності $(n \times n)$; b , h , d — вектор-стовпці розмірності $(n \times 1)$; $x(t_k)$ — n -мірний вектор стану (фазовий вектор); $u(t_k)$, $z(t_k)$ — вхідні, вихідні змінні об'єкта; $w(t_k)$, $v(t_k)$ — випадкові завади і похибки.

Матриця $F(n \times n)$ визначається через вектор-стовпець $f = (f_1, \dots, f_n)$:

$$F = \begin{bmatrix} \Theta & E \\ f^T & \end{bmatrix},$$

де Θ — нульовий вектор розмірності $(n - 1)$; E — одинична матриця розмірності $(n_1 \times n_1)$; $n_1 = n - 1$.

Невідомими параметрами, моделі є вектора f і b , при цьому вибір $z(t_k)$ в системі формується за допомогою вектор-рядка h : $h^T = [1, 0, \dots, 0]$.

Якщо об'єкт ідентифікації є повністю керованим і спостережуваним, то його модель можна записати різницеvim рівнянням n -го порядку:

$$z(t_{k+n}) = \sum_{i=1}^n f_i z(t_{k+i-1}) + \sum_{i=1}^n b_i u(t_{k+i-1}) + \sum_{i=1}^{n+1} c_i \xi(t_{k+i-1}),$$

де

$$c_i \xi(t_{k+i-1}) = d_i w(t_{k+i-1}) - f_i v(t_{k+i-1}); c_{n+1} = 1; d_{n+1} = 0; f_{n+1} = -1.$$

Розв'язком цього рівняння є наступний вираз:

$$z(t_k) = h^T F^k x(t_0) + \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j b u(t_{k-j+1}) + \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j d w(t_{k-j+1}),$$

який для нульових початкових умов і для $b = d$ приймає вигляд

$$z(t_k) = \sum_{j=0}^{k-1} h^T F^j b [u(t_{k-j-1}) + w(t_{k-j-1})] = \sum_{j=0}^{k-1} g(j) [u(t_{k-j-1}) + w(t_{k-j-1})],$$

де $g(j) = h^T F^j b$ — імпульсна перехідна функція моделі.

Взаємо-кореляційний метод. Ідентифікована модель об'єкта — імпульсна перехідна функція $g(j)$ для $j = 0, 1, 2, \dots$ при $x(t_0) = 0$. У якості вхідного сигналу $g(t_j)$ використовується випадковий (бінарний) шум з дискретним інтервалом квантування $t_j = t_0 + j\Delta t_0$.

Відповідно до визначення кореляційної функції

$$\begin{aligned} R_{zu}(m) &= M \{ z(t_N) u(t_{N-m}) \} = \\ &= M \left\{ \sum_{j=0}^{N-1} g(j) [u(t_{N-j-1}) + w(t_{N-j-1})] u(t_{N-m}) \right\} = \quad (6.6) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} g(j) M \{ u(t_{N-j-1}) u(t_{N-m}) \} = \sum_{j=0}^{N-1} g(j) R_{uu}(m-j-1), \end{aligned}$$

де $R_{zu}(m)$, $R_{uu}(m-j-1)$ — кореляційні функції; N — число інтервалів спостережень.

Очевидно, що для послідовності $m = 1, 2, \dots, N$ вираз (6.6) можна записати

$$Q_{zu}(N) = \begin{bmatrix} R_{zu}(1) \\ R_{zu}(N) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{uu}(0), \dots, R_{uu}(-N+1) \\ R_{uu}(N-1), \dots, R_{uu}(0) \end{bmatrix},$$

або у векторному вигляді

$$Q_{zu}(N) = Q_{uu}(N) G(N-1). \quad (6.7)$$

Для випадкового бінарного шуму з N дискретними інтервалами і інтенсивністю q^2 маємо

$$Q_{uu}(N) = \begin{bmatrix} q^2, \frac{q^2}{N}, \dots, \frac{q^2}{N} \\ \dots \\ \frac{q^2}{N}, \frac{q^2}{N}, \dots, q^2 \end{bmatrix}; \quad Q_{uu}^{-1}(N) = \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix}.$$

Розв'язуючи (6.7) відносно $G(N-1)$, одержуємо

$$G(N-1) = \frac{N}{q^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix}.$$

Однак взаємні кореляційні функції $R_{zu}(m)$ ($m = 1, 2, \dots, N$) не можуть бути обчислені точно, тому вони визначаються приблизно:

$$\hat{R}_{zu}^M(m) = \frac{1}{M+1} \sum_{k=0}^M z(t_k) u(t_{k-m}).$$

де M — число вимірювань на вході і виході.

Наближена оцінка імпульсної перехідної функції $G(N-1)$ для N інтервалів і M вимірювань ($M > m$) може бути отримана на основі наступного виразу:

$$\hat{G}^M(N-1) = \hat{G}^{M-1}(N-1) + \frac{1}{M+1} \left\{ \frac{N}{q^2(N+1)} \begin{bmatrix} 2, 1, \dots, 1 \\ \dots \\ 1, 1, \dots, 2 \end{bmatrix} z(t_M) \begin{bmatrix} u(t_{M-1}) \\ \vdots \\ u(t_{M-N}) \end{bmatrix} - \hat{G}^{M-1}(N-1) \right\}.$$

Оскільки кінцевою метою ідентифікації є оцінка векторів f, b системи (6.5), то їх можна знайти для $N = 2n$ (де n — порядок системи) у такий спосіб:

$$\hat{b}(M) = \begin{bmatrix} \hat{g}^M(0) \\ \vdots \\ \hat{g}^M(n-1) \end{bmatrix},$$

$$\hat{f}(M) = \begin{bmatrix} \hat{g}^M(0), \dots, \hat{g}^M(n-1) \\ \dots \\ \hat{g}^M(n-1), \dots, \hat{g}^M(2n-1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \hat{g}^M(n) \\ \vdots \\ \hat{g}^M(2n-1) \end{bmatrix}.$$

Основним недоліком цього методу є необхідність введення в систему допоміжного випадкового шуму і заповнення інформацією $2n$ значень для однієї ітерації обчислень.

Метод стохастичної апроксимації. Алгоритм методу побудований на обчисленнях за наступним виразом:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k+n}) \\ \hat{b}(t_{k+n}) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \rho \left(\frac{k-1}{n+1} \right) S_{(k+n-1)} \left\{ z(t_{k+n}) - \right. \\ &\left. - S_{(k+n-1)}^T \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \sigma^E + q^2 DD^T & \theta \\ \theta & \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{f}(t_{k-1}) \\ \hat{b}(t_{k-1}) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} q^2 d^0 \\ \theta \end{bmatrix} \right\} \end{aligned} \quad (6.8)$$

при $k = 1, n + 2, 2n + 3$, де $\rho \left(\frac{k-1}{n+1} \right)$ — коефіцієнти стохастичної апроксимації; $S_{(k+n-1)}^T = [z(t_k), \dots, z(t_{k+n-1}), u(t_k), \dots, u(t_{k+n-1})]$; q^2, σ^2 — інтенсивності випадкових функцій $w(t), v(t)$ (з невідомими функціями розподілу) відповідно; E — одинична матриця ($n \times n$); θ — нульова матриця.

Якщо $d(n \times 1)$ — відомий вектор (див. (6.5)), то

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ d_1 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{n-1} & d_{n-2} & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad d^0 = D \begin{bmatrix} d_n \\ d_{n-1} \\ \vdots \\ d_1 \end{bmatrix}. \quad (6.9)$$

При виконанні умови $\|\hat{f}(t_0)\|^2 + \|\hat{b}(t_0)\|^2 < \infty, \sum_{j=1}^{\infty} \rho(t_j) = \infty$ і

$\sum_{j=1}^{\infty} \rho^2(t_j) < \infty$ обчислювальний алгоритм сходиться з імовірністю 1,

але швидкість його збіжності невелика, тобто він вимагає багато машинного часу.

Алгоритм простий і зручний у реалізації, але необхідні апріорні значення дисперсій (q^2, σ^2) і вектора d . Крім того, щоб уникнути зсуву оцінок $\hat{f}(t_i), \hat{b}(t_i)$, на кожній ітерації потрібно $(2n + 1)$ вимірювань вихідного сигналу.

Метод максимальної правдоподібності. Алгоритм методу заснований на використанні перетвореної форми вихідного рівняння:

$$z(t_k) = \sum_{i=0}^{n-1} f_i z(t_{k-n+1}) + \sum_{i=1}^{n-1} b_i z(t_{k-n+1}) + \zeta(t_k), \quad (6.10)$$

де $\zeta(t_k) = \sum_{i=0}^n [d_i w(t_{k-n+1}) - f_i v(t_{k-n+1})]$; $f_0 = -1$; $d_0 = 0$.

Якщо випадкові функції $w(t_k) \in N(0, q_w^2)$ і $v(t_k) \in N(0, q_v^2)$, то $\zeta(t_j)$ також є нормальним (гаусовим) шумом $\zeta(t_j) \in N(0, q_\zeta^2)$; величина q_ζ обчислюється в такий спосіб:

$$q_\zeta^2 = M \left\{ \zeta(t_i) \zeta(t_{i-j}) \right\} = \sum_{i=0}^n \left[(f_{i+j} f_i) q_w^2 + (d_i d_{i+j}) q_v^2 \right].$$

Представимо невідомі параметри моделі, що підлягають ідентифікації, в вигляді вектора $\theta(3n \times 1)$:

$$\theta^T = [f_1, f_2, \dots, f_n, b_1, b_2, \dots, b_n, c_1, c_2, \dots, c_n],$$

де

$$c_i \zeta(t_{k+i-1}) = d_i w(t_{k+i-1}) - f_i v(t_{k+i-1}); c_{n+1} = 1; d_{n+1} = 0.$$

Найкращою оцінкою вектора $z(t_k)$ (для заданого вектора θ) будемо вважати оцінку

$$\hat{z}(t_i/\theta) = M \left\{ z(t_i) / z(t_j), u(t_j), \theta \right\}; \sigma_e^2(t_i) = M \left\{ [z(t_i) - \hat{z}(t_i/\theta)]^2 \right\}. \quad (6.11)$$

Тоді щільність розподілу оцінок сигналу $z(t_i)$ задовольняє співвідношенню

$$p(z(t_i)/z(t_j), u(t_j), \theta) \in N(\hat{z}(t_i/\theta), \sigma_e^2(t_i)),$$

де $\lim_{t_i \rightarrow \infty} \sigma_e^2(t_i) = \sigma_e^2 < \infty$.

Визначимо похибку апроксимації через вираз $e(t_k/\theta) = z(t_k) - \hat{z}(t_i/\theta)$, при цьому $\sigma_e^2 = M[\sigma_e^2(t_k/\theta)]0$, яка задовольняє виразу

$$e(t_k/\theta) = z(t_k) - \left(\sum_{j=0}^{n-1} c_j e(t_{k-n+j}/\theta) + \sum_{j=0}^{n-1} [f_j z(t_{k-n+j}) + b_j u(t_{k-n+j})] \right).$$

Тоді максимізація апостеріорної імовірності

$$p(z(t_k), \dots, z(t_1) / u(t_{k-1}), \dots, u(t_0), \theta) = \prod_{j=1}^k p(z(t_j) / z(t_{j-1}), \theta) p(z(t_0) / \theta)$$

для перетвореного рівняння для $z(t_k)$ буде еквівалентна максимізації функції правдоподібності

$$L_k(\theta, \sigma_e) = \ln \left[p(z(t_k)/u(t_{k-1}), \theta) \right] = c - \frac{k}{2} \ln [\sigma_e^2] - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^k \frac{e^2(t_j/\theta)}{\sigma_e^2}$$

(c — постійна величина). Максимізація функції $L_k(\theta, \sigma_e)$ означає, що повинні виконуватися умови $-\frac{\partial L_k(\theta, \sigma_e)}{\partial \sigma_e^2} = 0$.

При деяких допущеннях на властивості вхідної послідовності $u(t_j)$, $j = 0, 1, \dots$, задача ідентифікації зводиться до двохточкової крайової задачі і може бути вирішена в реальному часі. Алгоритм розв'язання задачі ідентифікації в цьому випадку має вигляд:

- 1) задаємо початкові умови $e(t_i/\theta)$, $\frac{\partial e(t_i/\theta)}{\partial \theta}$ для $i = 1, 2, \dots, n$, оцінку $\theta(t_0) = \hat{\theta}_0$ і приймаємо $N = 0$;
- 2) за формулою для $e(t_k/\theta)$ обчислимо похибку для M послідовних вимірювань $\partial o = N + 1, N + 2, \dots, N + M$;
- 3) визначимо функції чутливості $e(t_i/\theta)$ за векторами f, b, c :

$$\begin{aligned} \frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial f_j} &= -z(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial f_j}, \\ \frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial b_j} &= -u(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial b_j}, \\ \frac{\partial e(t_k/\theta)}{\partial c_j} &= -e(t_{k-n+j}) - \sum_{i=0}^{n-1} c_i \frac{\partial e(t_{k-n+i}/\theta)}{\partial c_j} \end{aligned} \quad (6.12)$$

для $k = N + 1, N + 2, N + M$;

- 4) обчислимо градієнт функції $J[\theta] = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k e^2(t_j/\theta)$, яка отримана з умови $\max_{\theta} L_i(\theta, \hat{\sigma}_e)$:

$$\frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} = -2 \sum_{j=N+1}^{N+M} e(t_j/\theta) \frac{\partial e(t_j/\theta)}{\partial \theta}; \quad (6.13)$$

- 5) обчислимо матрицю других похідних $\frac{\partial^2 J(\theta)}{\partial \theta^2}$:

$$\frac{\partial^2 J}{\partial \theta^2} \cong S = \sum_{j=N+1}^{N+M} \left[\frac{\partial e(t_j/\theta)}{\partial \theta} \frac{\partial e^T(t_j/\theta)}{\partial \theta} \right]; \quad (6.14)$$

б) уточнимо оцінку $\theta(N+M)$ після M вимірів за рекурентною формулою:

$$\theta(N+M) = \hat{\theta}(N) - \frac{1}{N/M+1} S^{-1} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta}; \quad (6.15)$$

7) проведемо M вимірювань вхідних і вихідних змінних $i(t_i)$, $z(t_i)$ і покладемо нове значення $N = N + M$. Останні n значень функцій

$e(t_i/\theta)$ і $\frac{\partial e(t_i/\theta)}{\partial \theta}$ прийемо за початкові оцінки для наступної

ітерації і перейдемо до кроку 2).

Ітераційний процес закінчується тоді, коли поліпшення оцінки $\hat{\theta}(N+M)$ стає незначним.

Недоліком обчислювального алгоритму є необхідність визначення початкової оцінки $\hat{\theta}_0$, яка повинна бути досить близькою до дійсного значення θ^{opt} (умова збіжності процедури), крім того, всі випадкові функції $w(t_i)$, $v(t_i)$ повинні бути гауссовими.

Метод найменших квадратів. Цей метод ідентифікації суттєво відрізняється від викладених. Тут не потрібне знання імовірнісних характеристик випадкових величин $w(t_i)$, $v(t_i)$ і алгоритм у цьому сенсі є крайнім випадком у порівнянні з байєсовським (максимізації апостеріорної імовірності), при якому необхідно мати повний імовірнісний опис випадкових процесів. Алгоритм ідентифікації по методу максимальної правдоподібності можна розглядати як проміжний, оскільки для його застосування вже немає необхідності знати апріорну щільність імовірності оцінюваних параметрів. Алгоритм методу найменших квадратів дозволяє знайти оцінку шуканих параметрів при ще меншій апріорній інформації.

Вихідна система описується рівнянням

$$x(t_{k+1}) = Fx(t_k) + bu(t_k) + w(t_k), \quad (6.16)$$

де $F(n \times n)$, $b(n \times 1)$ — невідомі матричні параметри; $w(t_k)$ — вектор випадкових збурень.

Необхідно припустити, що вектор стану $x(t)$ і керуючий вплив $i(t)$ вимірюються для будь-якого моменту часу t_k з інтервалу спостережень $[t_0, t_n]$. Розглянемо j -й рядок вихідного рівняння, який запишеться у вигляді

$$x_j(t_{k+1}) = f_j x(t_k) + b_j u(t_k) + w_j(t_k),$$

де f_j ($1 \times n$) — вектор-рядок матриці F ($n \times n$); b_j — величина j -ого рядка вектора b ($n \times 1$).

Потрібно підібрати такий вектор параметрів $C_j^T = [f_j, b_j]$ розмірності $((n + 1) \times 1)$, щоб мінімізувати критерій якості наближення по процесу $x_j(t_k)$:

$$J_{xj} = \sum_{k=0}^{N-1} \left[x_j(t_{k+1}) - (f_j x(t_k) + b_j u(t_k)) \right]^2 q(t_k),$$

де $q(t_k)$ — матриця ваги, пов'язана з імовірнісними характеристиками випадкових збурювань $w(t)$.

Оптимальна оцінка $(f_j, b_j)^{opt}$, яка мінімізує критерій J_{xj} , називається оцінкою по методу найменших квадратів. Обчислювальний алгоритм ідентифікації пов'язаний з моделлю спостережень, записаною в матричному вигляді:

$$V_{xj}^{k+1} = \begin{bmatrix} V_x^k & \vdots & V_x^k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_j^T \\ b_j^T \end{bmatrix} + V_{wj} = V^k c_j + V_w,$$

де

$$V_{xj}^{k+1} = [x_j(t_1), x_j(t_1), \dots, x_j(t_N)]^T; V_u^k = [u(t_0), u(t_1), \dots, u(t_{N-1})]^T;$$

$V_x^k = [V_{x1}^k, V_{x2}^k, \dots, V_{x1}^k n]$ — масиви спостережень довжиною N .

Критерій якості наближення процесу $x_j(t)$ записується у вигляді матричної форми

$$J_{xj} = \frac{1}{2} (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j) Q (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j) = \frac{1}{2} \left\| (V_{xj}^{k+1} - V^k c_j) \right\|_Q^2.$$

Оскільки мінімізація квадратичної форми J_{xj} являє собою звичайну задачу пошуку екстремуму, то оптимальна по методу найменших квадратів оцінка $(f_j, b_j)^{opt} = c_j^{opt T}$ є коренем рівняння

$$\left. \frac{\partial J_{xj}}{\partial c_j} \right|_{c_j = c_j^{opt}} = \Theta,$$

де Θ — нульовий вектор розмірності $[(n + 1) \times 1]$.

Звідси шукана оцінка найменших квадратів дорівнює

$$c_j^{opt} = \begin{bmatrix} f_j^T \\ b_j^T \end{bmatrix}^{opt} = \left[(V^k)^T Q V^k \right]^{-1} (V^k)^T Q V_{xj}^{k+1}. \quad (6.17)$$

Останній вираз являє собою основу обчислювальної процедури розв'язання задачі ідентифікації по методу найменших квадратів.

Алгоритм має ряд недоліків, серед яких потрібно відзначити зміщення оцінки c_j^{opt} , якщо середнє значення $w(t)$ ненульове ($M[w(t)] \neq 0$), а також необхідність мати повну інформацію по $x(t)$, $u(t)$ на всьому інтервалі спостережень. Однак наочність і простота обчислень роблять цей метод найбільш привабливим і широко застосовуваним.

Для порівняння всіх описаних алгоритмів ідентифікації була обрана лінійна система 3-го порядку, досить чутлива до шумів:

$$x(t_{k+1}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{bmatrix} x(t_k) + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} [u(t_k) + w(t_k)],$$

$$z(t_k) = (1, 0, 0)x(t_k) + v(t_k).$$

Коефіцієнти вихідної системи відповідно рівні (0,56; 0,68; -0,18), при цьому вхідна послідовність $u(t_k)$ для взаємо-кореляційного алгоритму була обрана у вигляді бінарного шуму з дискретним періодом квантування $\Delta t = 0,01$ с, а для інших алгоритмів — $u(t_k) = 0$. Усі випадкові процеси і шуми будемо вважати гауссовими:

$$w(t_k) \in N[0, 1, 0], \quad v(t_k) \in N[0, 0, 25], \quad v(t_k) \in N[2, 10, 0].$$

Початкову оцінку для алгоритму стохастичної апроксимації приймемо $p(t_0) = 20E$, де E — одинична матриця. Для алгоритму максимальної правдоподібності обчислювальний процес починається із точки, близької до точного значення вектора f . Число вимірів M було рівним 100... 150.

Сукупність результатів, що характеризують можливості обчислювальних алгоритмів ідентифікації, наведено в таблиці 6.1.

Таблиця 6.1

Порівняння методів ідентифікації

№	Метод	Характеристики алгоритму				
		Початкова оцінка	Час обчислень, с	Нормована похибка		Складність алгоритму ідентифікації
				2500 ітерацій	6000 ітерацій	
1	Взаємо-кореляційний	Довільна	2	0,050	0,015	Мала
2	Стохастичної апроксимації	Довільна	5	0,650	0,42	Мала

Продовження таблиці 6.1

3	Максимальної правдоподібності	Близька	40	0,030	-	Значна
4	Найменших квадратів	Довільна	1	0,080	-	Мала

Результати вказують на перевагу методу найменших квадратів.

Алгоритми ідентифікації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування — наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами.

Структура системи діагностики. Як відомо, діагноз складних технічних комплексів можна проводити з різним ступенем деталізації. Представляється доцільним, що в умовах створення вбудованої інформаційно-керуючої системи може бути організована трьохрівнева діагностика стану і несправностей об'єкта:

- а) аварійна діагностика, або діагностика малої глибини;
- б) діагностика середньої глибини;
- в) діагностика великої глибини.

Аварійна діагностика здійснюється по таблиці несправностей або ще простіше — при виході важливих параметрів об'єкту за межі, які заздалегідь визначаються як аварійні. Якщо ж порівняння стану об'єкту з таблицею несправностей не дозволяє поставити діагноз або діагноз оцінюється як недостатньо достовірний, система звертається до алгоритмів діагнозу середньої глибини. Діагностика середньої глибини проводиться за допомогою спрощеної моделі об'єкту. Така модель складається зі звичайних диференціальних і алгебраїчних рівнянь, вона описує елементи «укрупнено».

Щоб визначити несправність або причину виходу об'єкту за межі розрахункових станів, у модель повинні бути введені зміни, що відбивають передбачувану причину несправного або нерозрахованого стану, після чого проводиться розрахунки досліджуваного режиму відповідно до початкових і граничних умов, зафіксованих системою вимірювань. Перелік таких змін повинен зберігатися в таблиці можливих несправностей (таблиці альтернативних станів). Якщо розраховані процеси в достатній мірі добре збігаються із процесами, зафіксованими системою вимірювань, то внесені в модель зміни визначають характер несправності. Якщо ж збіг не досягається, проводиться нове звертання до таблиці можливих несправностей, здійснюється нова зміна моделі і потім нові розрахунки режимів. Процедура повторюється до одержання діагнозу або до вичерпання таблиці можливих несправностей. Останнє означає, що діаг-

ноз не може бути отриманий на даному рівні і необхідне звертання до алгоритмів діагностики великої глибини.

Порівняння розрахункових процесів з процесами, що протікають в установці, простіше і зручніше робити по системі характерних динамічних ефектів, властивих даному класу процесів, ніж порівнюючи в часі амплітуди вимірюваних координат, що розраховуються. Для цього в пам'яті системи діагностики повинні зберігатися системи характерних динамічних ефектів, властивих всім класам динамічних процесів: пусковим процесам, процесам зміни режимів і т. п.

Діагностика великої глибини проводиться по максимально докладній моделі. У цій моделі повинні бути враховані всі істотні особливості об'єкту, у тому числі розподіленість її параметрів і фізичних процесів, що протікають в ній. Процедура проведення діагностики така ж, як і у випадку діагностики середньої глибини. Також на підставі таблиці можливих несправностей проводиться зміна моделі і порівнюються характерні ефекти розрахункових і реальних процесів. Відмінність полягає у більшому переліку характерних ефектів і великій точності порівняння.

Слід зазначити, що діагностика середньої і великої глибини може проводитися і періодично у профілактичних цілях для постановки прогнозу подальшого функціонування об'єкту. Під час тривалої експлуатації, коли відбуваються ресурсні зміни параметрів установки, необхідно періодично при роботі на стаціонарних режимах подавати на установку малі збурювання по входних параметрах з метою виявлення ресурсних змін в об'єкті і коректування математичних моделей.

Результати діагностики у всіх випадках передаються на верхній рівень комп'ютерної частини системи, що відповідає за ухвалення рішення про необхідні заходи керування. Після проведення діагнозу на кожному рівні глибини і перед тем, як звертатися до більш глибокого рівня, у тому випадку, якщо на цьому рівні діагноз не був поставлений, система діагностики звертається до алгоритмів, які повинні відповісти на запитання про те, чи допускає ситуація, що склалася, затримку з ухваленням рішення про проведення більш докладного діагнозу або ситуація така, що розв'язок треба ухвалювати негайно, незважаючи на деяку неточність визначення стану. Повна структура системи діагностики з врахуванням зазначених алгоритмів наведена на рис. 6.1 (T — період діагностики, T_p — тривалість сеансу роботи системи).

Подібним чином може бути організована система діагностики ГТД. Однак враховуючи порівняно короткі строки роботи авіаційних двигунів, а також можливість наземного обслуговування, варто, очевидно, обмежитися діагностикою середньої глибини або навіть тільки аварійним діагнозом, а більш глибокі рівні покласти на наземне профілактичне обслуговування.

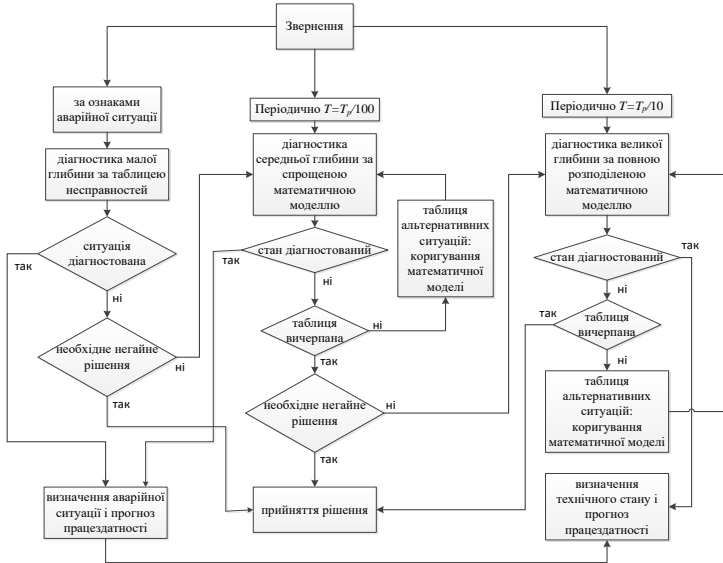


Рис. 6.1. Структура системи діагностики силової установки

6.3. Процедура модельного діагностування динамічних систем

В цьому підрозділі розглядаються основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Можна виділити параметричні несправності, що змінюють тільки параметри об'єкта, і структурні, що змінюють деяку частину об'єкта (підсистему, підсхему) досить довільним чином. Далі основна увага приділяється локалізації структурних несправностей [73].

Постановка задачі. Нехай справна система описується залежністю

$$y^* = F^*(u), \quad u \in D_u, \quad (6.18)$$

де $y^* = (y_1^*, \dots, y_n^*)^m$ — вектор вихідних сигналів, $u = (u_1, \dots, u_m)^m$ — вектор вхідних сигналів системи, D_u — область значень u , F^* — вектор-функція.

Виділимо в системі підсистему S_i , опис якої у виправленому стані має вигляд $Z_i^* = f_i^*(V_i)$, де Z_i^* — вектор вихідних сигналів розмірності n_i , V_i — вектор вхідних сигналів розмірності m_i , f_i^* — вектор-функція (оператор).

Несправності можливі в одній підсистемі. Несправна підсистема S_i описується невідомою залежністю $Z_i = f_i(V_i)$, де Z_i, V_i — відповідно вектори вихідних і вхідних сигналів несправної підсистеми, що мають розмірність n_i, m_i .

Нехай встановлено, що система несправна. Потрібно, маючи наявності вхідні і вихідні сигнали несправної системи та описи справної системи, визначити несправну підсистему.

Підсистеми з незалежним спостереженням. Несправну систему представимо як таку, що складається із двох підсистем (рис. 6.2): з несправної підсистеми S і справної підсистеми, відповідної до справної частини системи. Опис справної підсистеми має вигляд $y = A_i(u, Z_i)$, $V_i = B_i(u, Z_i)$, де A_i, B_i — матриці.

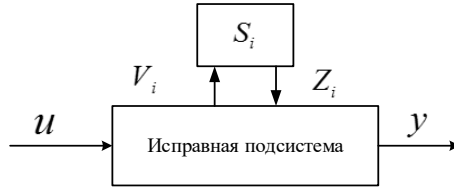


Рис. 6.2. Структура несправної системи

Визначення 1. Несправну підсистему S_i будемо називати спостережуваною, якщо по вхідних сигналах системи можна визначити її вихідні сигнали.

При чисельній реалізації алгоритмів діагностування істотна, як і при ідентифікації систем, лінійність залежності між оцінюванням і спостережуваними величинами. Обмежимося випадком лінійної залежності між вихідними сигналами підсистеми, що перевіряється, і $y = A_i(u) Z_i$ системи. При цьому залежність між входом і виходом системи може бути нелінійною.

Позначимо

$$\frac{\partial y}{\partial Z_i^m} = L_i(u), \Delta Z_i = Z_i - Z_i^*, \Delta y = y - y^*,$$

де Z_i^*, y^* — зареєстровані сигнали.

Опис системи з несправною підсистемою S_i представимо у вигляді

$$y = y^* + \Delta y = A_i(u)Z_i^* + L_i(u)\Delta Z_i,$$

звідси

$$\Delta y = L_i(u)\Delta Z_i. \quad (6.19)$$

Твердження 1. Несправна підсистема S_i спостережувана в тому і тільки тому випадку, якщо існує таке значення $u \in D_u$, що ранг $L_i(u) = n_i$.

Справедливість твердження впливає з умови можливості розв'язання рівняння (6.19).

Помітимо, що спостережуваність підсистеми є в загальному випадку необхідною й достатньою умовою для визначення її вхідних сигналів, які після відновлення Z_i визначаються по формулі $V_i = B_i(u, Z_i)$.

Пошук несправної підсистеми проводиться послідовною перевіркою гіпотез

$$H_i : \Delta y = L_i(u)\Delta Z_i, i = \overline{1, N}, \quad (6.20)$$

де N — число підсистем, що перевіряються.

Гіпотеза H_i являє собою припущення про те, що підсистема S_i несправна й оператор f_i , що її описує, належить класу операторів L_i . Клас операторів L_i задає клас несправностей у підсистемі S_i [...]. Вважаємо, що несправності не виводять підсистему S_i із класу безінерційних систем і A_i являє собою функцію досить довільного виду.

Рівняння, складене щодо оцінюваної величини, будемо називати діагностичним. При перевірці підсистеми S_i діагностичним є рівняння (6.20).

Перевірка гіпотези H_i полягає в перевірці сумісності рівняння (6.20). Якщо рівняння (6.20) сумісне, то гіпотеза H_i приймається і підсистема S_i вважається несправною. Якщо не сумісне, то не приймається і перевіряється наступна гіпотеза.

Будемо говорити, що підсистеми S_i, S_j нерозрізнені при гіпотезі H_i , якщо гіпотеза H_i приймається як при несправній підсистемі S_i , так і при несправній підсистемі S_j .

Підсистеми S_i , S_j нерозрізнені при гіпотезі H_i тільки в тому випадку, якщо при несправній підсистемі S_j існує таке значення ΔZ_i що

$$L_i(u)\Delta Z_i = L_j(u)\Delta Z_j, \quad u \in D_u. \quad (6.21)$$

Аналіз умов, при яких не виконується рівність (6.21), дозволяє встановити умови й критерії розрізнення підсистем.

Визначення 2. Підсистеми S_i , S_j будемо називати підсистемами з незалежним спостереженням при гіпотезі H_i , якщо підсистема S_i спостережувана й вектори ΔZ_i , ΔZ_j лінійно незалежні.

З (6.21) очевидним образом випливає наступне твердження.

Твердження 2. Підсистеми S_i , S_j мають незалежні спостереження при гіпотезі H_i в тому тільки випадку, якщо існує таке значення $u \in D_u$, що

$$\text{ранг} \left[L_i(u) \middle| L_j(u) \right] = n_j + \text{ранг} L_j(u). \quad (6.22)$$

Умова (5) може виконуватися і для випадку, коли підсистема S_j неспостережувана, тобто $\text{ранг} L_j(u) < n_j$.

Для забезпечення незалежної спостережливості підсистем S_i , S_j у загальному випадку потрібно $n_i + n_j$ контрольних точок. Однак вектори ΔZ_i , ΔZ_j можуть бути лінійно незалежні (залежно від конкретного значення ΔZ_j) при $n_i + 1$ контрольній крапці, якщо виконується умова

$$\text{ранг} \left[L_i(u_k) \middle| \begin{matrix} \ell \\ j,k \end{matrix} L_j(u_k) \right] = n_j + 1, \quad k = \overline{1, n_j}, \quad (6.23)$$

де $\ell_{j,k}$ — k -й стовпець матриці $L_j(u)$.

Якщо матриці $L_i(u)$, $L_j(u)$ є функціями вхідних сигналів системи й можуть змінюватися в процесі діагностичного експерименту, то ймовірність появи для різних значень u таких значень ΔZ_j , що за умови (6.23) вектор $L_j(u)\Delta Z_j$ лінійно залежимо з матрицею $L_i(u)$, мала. Якщо цією ймовірністю можна знехтувати (що на

практиці часто має місце), то умову (6.23) можна прийняти в якості критерію незалежності спостережень підсистем.

Незалежна спостережуваність підсистем визначається вхідними сигналами системи, її структурою й параметрами. У загальному випадку виділити всі фактори, що визначають незалежну спостережуваність підсистем, складно. Тому один зі шляхів визначення вхідних сигналів системи u , при яких виконується рівність (6.22) або (6.23), полягає в безпосередній перевірці цих рівностей.

У безінерційних системах з одним виходом підсистеми не мають властивість незалежності спостережень. Для існування незалежної спостережуваності підсистем S_i, S_j при гіпотезі H_i необхідно мати у своєму розпорядженні $n_i + 1$ виходи системи. Однак наявність $n_i + 1$ спостережуваних виходів системи є лише необхідною умовою.

Нульові елементи в матриці $\left[\begin{array}{c|c} L_i(u) & L_j(u) \end{array} \right]$ обумовлюють не-

залежність спостережень підсистем у силу структурних властивостей системи, які зберігаються при будь-яких параметрах.

Твердження 3. Якщо підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження, то вони помітні.

Дійсно, в силу лінійної незалежності векторів $\Delta Z_i, \Delta Z_j$ для заданого довільного значення $\Delta Z_j \neq 0$ не існує ΔZ_i рівності, що задовольняє (6.21).

Підсистеми з незалежним керуванням. У справній підсистемі, отриманій при виділенні S_i при гіпотезі H_i (рис 6.1), виділимо у свою чергу підсистему S_j , що має вхідний сигнал V_j , який визначається залежністю $V_j = B_j^i(u, Z_i)$. Для представленої в такий спосіб системи розглянемо властивість незалежності керувань підсистем S_i, S_j .

Визначення 3*. Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежним керуванням при гіпотезі H_i , якщо вектори V_i, V_j лінійно залежні.

Для підсистем S_i, S_j , що задовольняють визначенню 3*, існують вхідні сигнали системи, що забезпечують зміну (варіацію)

вхідних сигналів підсистеми S_j при змінених вхідних сигналах підсистеми S_i .

Якщо вихідний сигнал справної підсистеми S_j залежить від зміни будь-якого компонента вектора вхідних сигналів V_j (що, як правило, має багато), то при діагностуванні достатньо при незмінному векторі V_i змінювати по черзі компоненти вектора V_j . Далі, замість визначення 3* будемо користуватися наступним визначенням.

Визначення 3. Підсистеми S_i, S_j будемо називати підсистемами з незалежним керуванням при гіпотезі H_i , якщо компоненти вектора V_j лінійно незалежні з вектором V_i .

Одержуємо критерій виділення підсистем з незалежним керуванням.

$$\text{Позначимо } \frac{\partial B_i(u, Z_i)}{\partial u^m} = \Omega_i(u, Z_i), \quad \frac{\partial B_j^i(u, Z_i)}{\partial u^m} = \Omega_j^i(u, Z_i).$$

Обмеживши розглянуті процедури діагностування лінійними, далі будемо вважати матриці Ω_i, Ω_j^i постійними.

Варіацію вхідних сигналів системи, що забезпечує незмінність вектора V_i і варіацію значення компоненти $V_{j,k}$ вектора V_j , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta V_{j,k} \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ \omega_j^i \end{bmatrix} \Delta u, \quad (6.24)$$

де $\omega_{j,k}^i$ — k -й рядок матриці Ω_j^i .

Твердження 4. Підсистеми S_i, S_j мають при гіпотезі H_i незалежні керування в тому й тільки тому випадку, якщо рівність (6.24) виконується для всіх значень $K, K = 1, m_j$.

Вважаємо, що функції чутливості вихідного сигналу системи у стосовно зміни значень компонент векторів Z_i, Z_j не дорівнюють нулю.

Для проведення діагностичного експерименту необхідно одержати вхідні сигнали системи $u^{o\delta}, u^{n\rho}$ (навчальні, перевірочні), що забезпечують сталість V_i і варіацію $V_{j,k}$. Ці сигнали можуть бути

довільними, але повинні відрізнятися один від одного на величину Δu , отриману із системи рівнянь (6.24).

Задавши довільне значення $u^{o\delta}$, одержимо $u^{n\rho} = u^{o\delta} + \Delta u$.

Процедура перевірки гіпотези H_i , що забезпечує сталість V_i і варіацію $V_{j,k}$, що впливає, наступна.

1. Подавши на діагностовану систему вхідний сигнал $u^{o\delta}$, одержимо $\Delta y^{o\delta}$.
2. При $u^{n\rho}$ одержати $\Delta y^{n\rho}$.
3. Перевірити сумісність системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta y^{o\delta} \\ \Delta y^{n\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i(u) \\ L_i(u) \end{bmatrix} \Delta Z_i. \quad (6.25)$$

Якщо матриця $L_i(u)$ постійна, тобто $L_i(u) = L_i$, то перевірка спільності системи рівнянь (8) зводиться до перевірки рівності $\Delta y^{o\delta} = \Delta y^{n\rho}$.

Якщо система рівнянь (8) несумісна, то гіпотеза H_i не приймається. Якщо сумісна, то це не суперечить гіпотезі H_i .

Остаточне рішення про вірогідність гіпотези H_i приймається після її перевірки при значеннях $u^{n\rho}$ вхідних сигналів, що забезпечують варіацію всіх, підсистем S_i , що мають із підсистемою незалежні керування. Максимальне число вхідних сигналів систем при перевірці гіпотез H_i дорівнює сумі розмірностей векторів вхідних сигналів підсистем, що мають із підсистемою S_i незалежні керування. На практиці число вхідних сигналів системи, що забезпечують розрізнення підсистем з незалежним керуванням, значно менше максимального, оскільки при зміні вхідних сигналів однієї з підсистем змінюються вхідні сигнали інших підсистем.

Підсистеми з незалежним спостереженням і керуванням. При гіпотезі H_i виділимо в справній частині системи (рис 6.2) підсистему S_j .

Позначимо $\frac{\partial y}{\partial Z_j^m} = L_{j,i}(u)$. Нехай $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$, V_i — скалярні величини, $u = (u_1, \dots, u_m)^m$.

Підсистеми S_i , S_j будемо називати підсистемами з незалежними спостереженням і керуванням, якщо:

- 1) функції $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ лінійно незалежні;
- 2) функція $V_i(u)$ лінійно незалежна, хоча б з однієї функцією $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$.

В цьому випадку, якщо несправна підсистема S_j , а перевіряється S_i , вибором u можна одержати зміну значень $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ при постійних значеннях ΔZ_i рівність, що порушує залежність (6.21), і забезпечити розрізнення підсистем.

$$\text{Позначимо } \frac{\partial V_i}{\partial u^m} = \Omega_i(u), \quad \frac{\partial L_i(u)}{\partial u^m} = d_i(u), \quad \frac{\partial L_{j,i}(u)}{\partial u^m} = d_{j,i}(u).$$

Нехай $\Omega_i(u) = \Omega_i$, $d_i(u) = d_i$, $d_{j,i}(u) = d_{j,i}$.

Функції $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ лінійно незалежні, якщо $\text{rang} \begin{bmatrix} d_i \\ d_{j,i} \end{bmatrix} = 2$.

Варіацію Δu вхідних сигналів системи u , що забезпечує варіацію $\Delta L_i(u)$ функції $L_i(u)$ й сталість значення V_i , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta L_i(u) \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_i \end{bmatrix} \Delta u \quad (6.26)$$

за умови, що $\text{rang} \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_i \end{bmatrix} = 2$.

Для перевірки гіпотези H_i , як і для підсистем з незалежним керуванням, формуються вхідні сигнали системи $u^{o\delta}$, $u^{n\rho} = u^{o\delta} + \Delta u$. Значення Δu , що забезпечує варіацію однієї з функцій $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ і незмінність V_i , визначається з (6.26).

Процедура перевірки гіпотези H_i наступна.

1. При $u^{o\delta}$ визначається $\Delta u^{o\delta}$.
2. При $u^{n\rho}$ визначається $\Delta u^{n\rho}$.
3. Перевіряється спільність системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta y^{n\rho} \\ \Delta y^{n\rho} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_i(u^{o\delta}) \\ L_i(u^{n\rho}) \end{bmatrix} = \Delta Z_i. \quad (6.27)$$

Якщо система рівнянь (6.27) несумісна, то гіпотеза H_i не приймається. Якщо сумісна, то це не суперечить гіпотезі H_i .

Розглянемо випадок, коли $L_i(u)$, $L_{j,i}(u)$ — матриці й $L_i(u)$ має зворотну матрицю $L_i^{-1}(u)$. Тоді з (4) при $L_j(u) = L_{j,i}(u)$ одержимо

$$\Delta Z_i(V_i) = L_i^{-1}(u) L_{j,i}(u) \Delta Z_j(V_j) = \Phi(u) \Delta Z_j(V_j).$$

Підсистеми S_i , S_j є підсистемами з незалежними спостереженням і керуванням при гіпотезі H_i , якщо існують вхідні сигнали системи, що забезпечують незмінність V_i і варіацію хоча б одного елемента матриці $\Phi(u)$, що є співмножником змінної $Z_{j,k}$, $K = \overline{1, n_j}$.

Установимо умови, при яких підсистеми S_i , S_j мають незалежні спостереження і керування.

Через $\varphi_k^m = [\varphi_{k,1}(u), \dots, \varphi_{k,n_i}(u)]$ позначимо k -й стовпець матриці $\Phi(u)$, $K = \overline{1, n_j}$. Одержимо

$$D(u) = \frac{\partial \varphi_k(u)}{\partial u^m} = \begin{bmatrix} d_{k,1}(u) \\ \vdots \\ d_{k,n_i}(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_{k,1}}{\partial u_m} \\ \vdots \\ \frac{\partial \varphi_{k,n_i}}{\partial u_1} \dots \frac{\partial \varphi_{k,n_i}}{\partial u_m} \end{bmatrix}.$$

Обмежимо аналіз системи випадками, коли матриця $D(u)$ — постійна, $D(u) = D$.

Варіацію Δu вхідних сигналів u , що забезпечують варіацію $\Delta \varphi_{k,s}$ елемента $\varphi_{k,s}$ матриці Φ й незмінність значення V_i , можна знайти із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i = 0 \\ \Delta \varphi_{k,s} \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Omega_i \\ d_{k,s} \end{bmatrix} \Delta u \quad (6.28)$$

за умови, що існує таке значення S , що залежить у загальному випадку від k , що

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} \Omega \\ d_{k,s} \end{bmatrix} = \text{ранг} \Omega_i + 1. \quad (6.29)$$

Підсистеми S_i , S_j при гіпотезі H_i мають незалежні спостереження й керування, якщо умова (6.29) виконується для всіх значень $K = 1, \overline{n_j}$.

Якщо підсистеми S_i , S_j мають незалежні спостереження і керування, то вони розрізняються для широкого класу несправностей.

У процедурі перевірки гіпотези H_i значення Δ_i визначається за формулою (6.28).

Динамічні системи, що описуються моделями у вигляді передатних функцій.

Підсистеми з незалежним спостереженням. Нехай справна система задана у вигляді структурної схеми. Будемо розглядати підсистеми, що мають скалярні вхід і вихід, залежність між якими описується

відомою передатною функцією $W(p) = \frac{Z_i(p)}{V_i(p)}$, де $Z_i(p), V_i(p)$ —

зображення по Лапласу вихідного $Z_i(t)$ й вхідного $V_i(t)$ сигналів підсистеми.

Вважаємо, що несправності можливі тільки в одній підсистемі і несправність міняє передатну функцію підсистеми на невідому залежність між її входом і виходом. В окремому випадку несправна підсистема може описуватися невідомою передатною функцією. Тоді несправності не виводять діагностовану систему із класу лінійних систем.

Завдання полягає в тому, щоб маючи опис справної системи і маючи реалізації вхідних і вихідних сигналів діагностованої системи, визначити несправну підсистему.

Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежними спостереженнями й незалежними керуваннями. Тому аналіз діагностованості підсистем зводиться до визначення цих властивостей у різних пар підсистем. Для підсистем, що володіють якоюсь конкретною властивістю, використовується відповідний метод діагностування.

Систему з несправною підсистемою S_i представимо у вигляді, зображеному на рис. 6.2. Передатну функцію від виходу несправної

підсистеми Z_i до виходу системи y_k позначимо як $W_{i,k}$ (для простоти записів символ ρ у позначеннях передатної функції далі будемо опускати).

Залежність вихідного сигналу системи від вихідного сигналу підсистеми S_i має вигляд

$$y_k(p) = W_{i,k} Z_i(p), \quad K = \overline{1, n}.$$

Несправна підсистема S_i спостережувана в тому й тільки тому випадку, якщо існує вихід системи y_k , щодо якого передатна функція $W_{i,k}$ має зворотну $W_{i,k}^{-1}$.

Рівність (6.21) у цьому випадку записується в такій спосіб:

$$\begin{bmatrix} W_{i,1} \\ \vdots \\ W_{i,n} \end{bmatrix} Z_i(p) = \begin{bmatrix} W_{j,1} \\ \vdots \\ W_{j,n} \end{bmatrix} Z_j(p). \quad (6.30)$$

Твердження 5. Підсистема S_i, S_j мають незалежні спостереження щодо виходів системи y_a, y_δ при гіпотезі H_i , якщо підсистема S_i спостережувана й

$$W_{i,a} W_{j,\delta} \neq W_{j,a} W_{i,\delta}. \quad (6.31)$$

Доведення. Слід довести, що при заданому $Z_j(p)$ не існує $Z_i(p)$, що задовольняє рівності (6.30).

Тому що підсистема S_i спостережувана, де хоча б для однієї передатної функції $W_{i,a}, W_{i,\delta}$ існує зворотна функція. Нехай існує $W_{i,a}^{-1}$. Тоді з (6.30) одержимо

$$Z_i(p) = W_{i,a}^{-1} W_{j,a} Z_j(p). \quad (6.32)$$

Очевидно, що значення $Z_i(p)$, отримане щодо виходу в системі y_a , повинне задовольняти й рівнянню, відповідному до виходу системи y_δ (δ -й рядок системи рівнянь (6.30)). Поставимо (6.32) в δ -й рядок (6.30)

$$W_{i,\delta} W_{i,a}^{-1} W_{j,a} Z_j(p) = W_{j,\delta} Z_j(p). \quad (6.33)$$

Рівність (6.33) існує тільки в тому випадку, якщо $W_{i,\delta} W_{i,a}^{-1} W_{j,a} = W_{j,\delta}$ або $W_{i,\delta} W_{j,a} = W_{i,a} W_{j,\delta}$. Але дана рівність, згідно з

умовою (6.31), не існує, отже, не виконується й рівність (6.32), тобто при заданому $Z_j(p)$ не існує значення $Z_i(p)$, що задовольняє (6.30).

Незалежність спостережень підсистем обумовлюється структурою й параметрами системи. Для систем, заданих передатними функціями, зручно спочатку провести аналіз системи в символьному виді. При цьому передатні функції виразу (6.31) визначаються в загальному вигляді згідно з алгеброю структурних схем по передатних функціях, заданих символами W_1, \dots, W_n . Аналіз у символьному вигляді дозволяє встановити необхідні умови лінійної незалежності спостережень підсистем і достатні умови їх залежності.

Якщо встановлено, що умова (6.31) при символьному аналізі виконується, то потрібно цю умову перевірити для конкретних моделей підсистем, що дозволяє остаточно встановити незалежність спостережень підсистем. Якщо при символьному аналізі умова (6.30) не виконується, то підсистеми S_i, S_j мають незалежні спостереження й подальший аналіз не проводиться. Підсистеми з незалежним спостереженням помітні для широкого класу несправностей.

Метод діагностування підсистем з незалежним спостереженням полягає в перевірці сумісності систем діагностичних рівнянь, складеної для кожної з гіпотез

$$\begin{bmatrix} y_1(p) \\ \vdots \\ y_n(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W_{i,1} \\ \vdots \\ W_{i,n} \end{bmatrix} Z_i(p), \quad i = \overline{1, N}.$$

Підсистема з незалежним керуванням. Нехай діагностована система має m входів і один вихід. Як і раніше, будемо розглядати підсистему зі скалярним входом і виходом.

Передатну функцію від входу системи $u_k(p)$ до входу $V_i(p)$ несправної підсистеми S_i позначимо через $V_{i,k}(p)$ (далі $V_{i,k}$), $V_i = (V_{i,1}, \dots, V_{i,m})$. У справній частині системи (рис. 6.2) виділимо, у свою чергу, підсистему S_j . Передатну функцію від входу системи $u_k(p)$ до входу цієї підсистеми $V_j(p)$ позначимо через $V_{j,k}^i, V_j^i = (V_{j,1}^i, \dots, V_{j,m}^i)$.

Варіацію вхідних сигналів системи $\Delta u(p)$, що забезпечує варіацію вхідного сигналу підсистеми S_i при незмінному вхідному сигналі підсистеми S_j при гіпотезі H_i , одержимо із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_i(p) = 0 \\ \Delta V_j(p) \neq 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_i \\ V_j^i \end{bmatrix} \Delta u(p) \quad (6.34)$$

за умови, що

$$\text{ранг} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j^i \end{bmatrix} = 2. \quad (6.35)$$

Перед перевіркою гіпотези H_i одержимо $u^{n\rho}(p) = u^{o\delta}(p) + \Delta u(p)$. Значення $\Delta u(p)$ визначається із системи рівнянь (41) для заданого значення $\Delta V_j(p)$.

Процедура перевірки гіпотези H_i наступна.

1. При $u^{o\delta}(p)$ визначається $\Delta y^{o\delta}(p)$.
2. Система встановлюється у вихідний початковий стан і при $u^{n\rho}(p)$ визначається $y^{n\rho}(p)$.
3. Якщо $\Delta y^{n\rho}(p) = \Delta y^{o\delta}(p)$, то гіпотеза H_i приймається й підсистема S_i вважається несправною.

Приклад 1. Структурна схема справної системи представлена на рис. 6.3. Підсистеми S_1, \dots, S_4 описуються передатними функціями:

$$W_1 = \frac{1}{p}, W_2 = \frac{2}{p^2}, W_3 = 2, W_4 = 3.$$

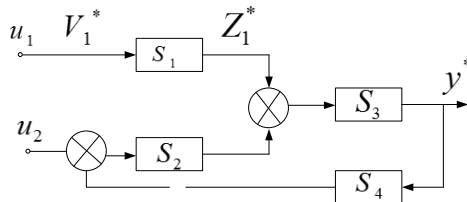


Рис. 6.3. Структурна схема справної системи

Несправною може бути одна з підсистем, опис якої змінюється непередбаченим чином. Вважаємо, що є можливість установки несправної системи в деякий початковий стан. У цьому випадку початковий стан справних підсистем — нульовий, несправної підсистеми — довільний, постійний. Потрібно, маючи вхідні і вихідні сигнали системи, визначити несправну підсистему в режимі тестового діагностування.

Досліджуємо незалежність керувань (розрізнення) підсистем S_1, \dots, S_4 . Розрізнення підсистем при гіпотезі H_i встановлюється шляхом аналізу залежності вхідних сигналів підсистем при вилученій підсистемі S_i . Аналіз незалежності керувань підсистем проведемо в символічному виді. Таке дослідження дозволяє встановити достатні умови залежності керувань підсистем і необхідні умови їх незалежності. Остаточо незалежність керувань устанавлюється заміною позначень передатних функцій конкретними залежностями. При гіпотезі H_1 (видаляється підсистема S_1)

$$V_{1,1} = 1, \quad V_{1,2} = 0, \quad V_{2,1}^1 = 0, \quad V_{2,2}^1 = \frac{1}{1 - W_2 W_3 W_4},$$

$$V_{3,1}^1 = 0, \quad V_{3,2}^1 = \frac{W_2}{1 - W_2 W_3 W_4}, \quad V_{4,1}^1 = 0, \quad V_{4,2}^1 = \frac{W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4}.$$

Маємо $V_{1,1} V_{K,2}^1 \neq V_{1,2} V_{K,1}^1$, $K = \overline{2, 4}$, отже, виконується (6.35) і підсистеми в парах $S_1 - S_K$, $K = \overline{2, 4}$ мають незалежні керування.

Оскільки в матрицях $\begin{bmatrix} V_{1,1} & V_{1,2} \\ V_{K,1}^1 & V_{K,2}^1 \end{bmatrix}$, $K = \overline{2, 4}$ є нульові елементи

($V_{1,2} = V_{2,1}^1 = V_{3,1}^1 = V_{4,1}^1 = 0$), то незалежність керувань обумовлюється структурою схеми й зберігається при будь-якому описі підсистем. Таким чином, якщо гіпотеза H_1 приймається, то несправна підсистема S_1 , якщо не приймається (\bar{H}_1), то слід перевірити підсистеми S_2, S_3, S_4 .

Аналогічним чином при гіпотезі H_2 одержимо

$$V_{1,1}^2 = 1, V_{1,2}^2 = 0:$$

$$V_{2,1} = W_1, W_2 W_3, V_{2,2} = 1, V_{3,1}^2 = W_1, V_{3,4}^2 = V_{4,2}^2 = 0, V_{4,1}^2 = W_1, W_3.$$

Маємо $V_{2,1} V_{K,2}^2 \neq V_{2,2} V_{K,1}^2$, $K = 1, 3, 4$. Отже, при перевірці гіпотези H_2 множина підсистем розбиваються на дві підмножини: $\{S_2\}$ — якщо гіпотеза H_2 приймається, $\{S_1, S_3, S_4\}$ — якщо не приймається.

При гіпотезі H_3 одержимо

$$V_{1,1}^3 = 1, V_{1,2}^3 = V_{2,1}^3 = V_{4,1}^3 = V_{4,2}^3 = 0, \quad V_{2,2}^3 = 1, V_{3,1} = W_1, V_{3,2} = W_2.$$

Тому що $V_{4,1}^3 = V_{4,2}^3 = 0$, то для підсистеми S_4 при гіпотезі H_3 не має керувань і підсистеми S_3, S_4 нерозрізнені. Цей же висновок впливає з рівності $V_{3,1}V_{4,2}^3 = V_{3,2}V_{4,1}^3$. Підсистеми в парах $S_3 - S_1$, $S_3 - S_2$ мають незалежні керування й, отже, помітні, оскільки $V_{3,1}V_{1,2}^3 \neq V_{3,2}V_{4,1}^3$, $V_{3,1}V_{2,2}^3 \neq V_{3,2}V_{2,1}^3$. При перевірці гіпотези одержимо наступну розбивку безлічі підсистем: $\{S_3, S_4\}$ — якщо гіпотеза H_3 приймається, $\{S_1, S_2\}$ — якщо не приймається.

Діагностичне дерево, що визначає послідовність перевірки гіпотез, може мати вигляд, представлений на рис. 6.4. Проведемо діагностичний експеримент згідно з діагностичним деревом для системи з несправною підсистемою S_2 , передатна функція якої прийняла вигляд

$$\tilde{W}_2 = \frac{1}{p^3}.$$

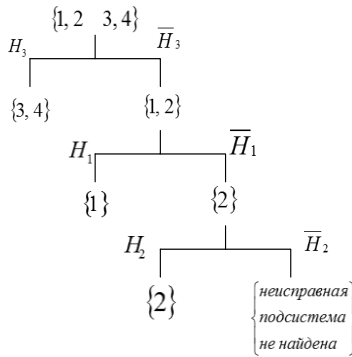


Рис. 6.4. Діагностичне дерево послідовності перевірки гіпотез

Модель справної системи

$$\begin{aligned} y^*(p) &= \frac{W_1 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_1(p) + \frac{W_2 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_2(p) = \\ &= \frac{2p}{p^2 - 12} u_1(p) + \frac{4}{p^2 - 12} u_2(p). \end{aligned}$$

Несправна система описується залежністю (нам невідомої)

$$\begin{aligned} y(p) &= \frac{W_1 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_1(p) + \frac{\tilde{W}_2 W_3}{1 - W_2 W_3 W_4} u_2(p) = \\ &= \frac{2p^2}{p^2 - 6} u_1(p) + \frac{2}{p^3 - 6} u_2(p). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta y(p) &= y(p) - y^*(p) = \\ &= \frac{2p}{p^5 - 12p^3 - 6p^2 + 72} \left[(-12p + 6)u_1(p) + (-2p^2 + p)u_2(p) \right]. \end{aligned}$$

Перевіримо гіпотезу H_3 . Всі розрахунки будемо проводити в просторі зображень перетворення по Лапласу.

Варіацію вхідних сигналів системи, що забезпечують незмінність вхідних сигналів підсистеми S_3 й варіацію вхідних сигналів підсистеми S_1 , одержимо із системи рівнянь

$$\begin{bmatrix} \Delta V_3(p) = 0 \\ \Delta V_1(p) = \frac{2}{p^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_{3,1} & V_{3,2} \\ V_{1,1}^3 & V_{1,2}^3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(p) \\ \Delta u_2(p) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{p} & \frac{2}{p^2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(p) \\ \Delta u_2(p) \end{bmatrix}.$$

Маємо $u^{np}(p)$. Задавши $u_1^{o\delta}(p) = \frac{1}{p}$, $u_2^{o\delta}(p) = \frac{2}{p}$, одержимо

$$u_1^{np}(p) = u_1^{o\delta}(p) + \Delta u_1(p) = \frac{p+2}{p}, \quad u_2^{np}(p) = \frac{1}{p}.$$

Процедура перевірки гіпотези H_3 наступна.

1. При $u^{o\delta}(p)$ одержимо $\Delta y^{o\delta}(p) = \frac{-8p^4 - 20p^3 + 12}{p^5 - 12p^3 - 6p^2 + 72}$.

2. Установивши систему у вихідний початковий стан, при $u^{np}(p)$ одержимо

$$\Delta y^{np}(p) = \frac{-4p^3 - 22p^2 - 36p + 24}{p^6 - 12p^4 - 6p^3 + 72p}.$$

3. Тому що $\Delta y^{np}(p) \neq \Delta y^{o\delta}(p)$, то гіпотеза H_3 не приймається, і на несправність підозрюються підсистеми S_1, S_2 .

Аналогічним чином перевіряються гіпотези H_1, H_2 . З них приймається тільки гіпотеза H_2 й підсистема S_2 вважається несправною.

Якщо в підсистемах допускаються тільки параметричні несправності, то процедура діагностування полягає в перевірці сумісності перевизначеної системи діагностичних рівнянь, складених щодо параметрів підсистеми, що перевіряється. Перевизначена система діагностич-

них рівнянь формується відповідним вибором контрольних точок або вхідних сигналів системи. Якщо підсистеми мають незалежні спостереження або керування, то можна спочатку визначити несправну підсистему, а потім оцінити значення її параметрів.

В задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизначеною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мірі вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід усувати, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і дають підстави для постановки діагнозу. Задача діагностики ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури. У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Суттєву та визначальну роль у ефективному розв'язанні вказаних задач відіграє метод мінімізації функціоналу в оптимізаційному процесі досягнення результату діагностування чи ідентифікації. Ретельне дослідження методів мінімізації, що найбільш застосовуються в практиці, виконане шляхом обчислювальних експериментів. Результати вказують на явну перевагу методу найменших квадратів. Алгоритми мінімізації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування — наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами. Процедури модельного діагностування динамічних систем розглядаються як основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Розглядаються параметричні і структурні несправності. Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежне спостереження й незалежне керування. Для підсистем з конкретною властивістю використовується відповідний метод діагностування.

7. ВИБІР ТА АДАПТАЦІЯ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ ПРИ СТВОРЕННІ АЛГОРИТМІВ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ В КОМП'ЮТЕРНО ІНТЕГРОВАНІХ СИСТЕМАХ

7.1. Адаптація обчислювальних алгоритмів реалізації диференціальних динамічних моделей

Умови функціонування динамічних комп'ютерно-інтегрованих систем жорстко визначають вимоги до швидкодії обчислювально-керуючих систем [102], які мають завжди обмежені ресурси, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються при організації обчислювальних процесів [3, 71, 187].

Аналіз властивостей методів наближеного розв'язання рівнянь динаміки [161]. В даний час відома велика кількість методів чисельного розв'язання систем звичайних диференціальних рівнянь [159, 196], основну частину яких можна розділити на три групи:

- однокрокові методи типу Рунге-Кутта і ступеневі методи;
- багатокрокові кінцево-різницеві методи (типу Мілна, Адамса);
- гібридні методи (типу Батчера).

Загальною властивістю цих методів є те, що всі вони будуються на основі *розкладання шуканої функції в степеневий ряд*, в якому зберігається (враховується) скінченна кількість членів. При цьому накладається умова — метод r -го порядку повинен давати точне рішення, коли шукана функція являє собою поліном r -го ступеня. Ця умова і той факт, що будь-яка функція, що має достатню кількість похідних, може бути наближено замінена відповідним поліномом, визначають можливість побудови зазначених методів [27, 124, 141].

Інший, досить загальний підхід до питання побудови чисельних методів розв'язання диференціальних рівнянь, полягає в *заміні вихідної системи* деякою іншою, розв'язання якої може бути здійснено досить просто з залученням аналітичних прийомів. Найбільш відомими з таких методів є так звані експоненційні, сутність яких

полягає в поданні правої частини вихідної системи у вигляді суми лінійного та нелінійного членів і використанні виразу загального інтеграла для лінійних систем. Різноманітність методів має місце через різні способи введення лінійних членів, а також завдяки різним прийомам обчислення загального інтеграла [22, 108].

Незважаючи на велику кількість різноманітних обчислювальних схем (розрахункових правил) розв'язання звичайних диференціальних рівнянь (ЗДР) з початковими умовами і велику історію розвитку цього питання процес вдосконалення чисельних методів не припиняється і зараз [162]. Пояснюється це значним розвитком обчислювальної техніки, який забезпечив можливість дослідження складних об'єктів і практичної реалізації складних обчислювальних схем [48]. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів чисельного аналізу динаміки, що відзначаються значно кращими характеристиками стійкості в порівнянні з класичними явними методами. Різноманітність неявних обчислювальних схем рішення ЗДР обумовлюється різноманітністю прийомів формування і розв'язання нелінійних алгебраїчних рівнянь [116, 129].

Проаналізуємо принципи побудови методів чисельного розв'язання задачі Коші, а також розрахункові правила найбільш уживаних на практиці методів. При цьому, з метою спрощення запису та досягнення наочності розрахункових співвідношень, викладення матеріалу дано для випадку одного диференціального рівняння з одним невідомим

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(0) = y_0 \quad (7.1)$$

Таке спрощення не знижує загального характеру результатів у зв'язку з тим, що процедура розв'язання системи диференціальних рівнянь полягає в застосуванні розрахункових правил до кожного рівняння розв'язуваної системи.

Під однокроковими методами [85] розв'язування задачі Коші для рівняння (7.1) розуміють методи чисельного інтегрування, що дозволяють визначати наближений розв'язок в точці лише на основі отриманого раніше розв'язку для попередньої точки. У загальному вигляді алгоритми однокрокових методів представляються в наступному вигляді

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i) \quad (7.2)$$

для явних методів інтегрування, і

$$y_{i+1} = F(f, t_i, y_i, y_{i+1}) \quad (7.3)$$

для неявних методів інтегрування (F — сформована розрахункова залежність).

В останньому випадку мають місце не розрахункові співвідношення для визначення y_{i+1} , а рівняння відносно них. Отже, при використанні неявних методів виникає необхідність розв'язання рівняння (7.3), а в багатовимірному випадку — систем рівнянь відносно y_{i+1} на кожному кроці. Оскільки ці рівняння, як правило, є нелінійними, то обчислювальна складність неявних методів стає очевидною. Застосування неявних методів виправдано в тих випадках, коли можливе використання великого кроку інтегрування вихідної системи або коли рівняння (7.3) може бути розв'язане досить просто. Тут слід зазначити, що розв'язання рівняння (7.3) зазвичай ведеться ітераційним способом, тим більше що його вигляд є якраз зручним для застосування ітерацій. Таким чином, ефективність неявних методів буде в значній мірі залежати від збіжності ітераційного процесу, що в загальному випадку визначається властивостями вихідної системи (7.1). На практиці процес ітерацій переривають після двох-трьох циклів [155, 158].

Аналіз однокрокових методів чисельного інтегрування системи (7.1) [180], заснованих на багаточленних наближеннях, дозволяє виділити три принципи їх побудови:

- розвинення шуканого розв'язку в ряд Тейлора;
- компенсація перших членів ряду Тейлора для функції похибки (методи Рунге-Кутта);
- застосування квадратурних правил.

Розвинення шуканого розв'язку в ряд Тейлора відноситься до найбільш відомих способів наближеного розв'язання. Необхідність визначення похідних високого порядку від шуканого розв'язку обумовлює значну обчислювальну складність методів. Найявні результати по формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів.

У практиці чисельного розв'язання рівнянь типу (7.1) широкого поширення набули явні методи Рунге-Кутта, що задаються правилами

$$y_{i+1} = y_i + \sum_{j=1}^q p_j k_j(h), \quad (7.4)$$

де

$$k_j(h) = h f \left(y_i + \sum_{s=1}^{j-1} \beta_{js} k_s(h), t_i + \alpha_j h \right), \quad (7.5)$$

де h — крок дискретизації, параметри $p_j, \alpha_j, j = \overline{1, q}, (\alpha_1 = 0), \beta_{js}, 0 < s < j \leq q$ обираються, виходячи з умов рівності нулю перших членів ряду Тейлора функції похибки $\varphi(h)$, яка визначається рівністю

$$\varphi(h) = y(t+h) - y(t) - \sum_{j=1}^q p_j k_j(h). \quad (7.6)$$

Величина $\varphi(h)$ характеризує похибку методу на кроці інтегрування (локальна похибка методу) і, в припущенні гладкості $f(y, t)$ за обома аргументами, може бути представлена на основі формули Тейлора у вигляді

$$\varphi(h) = \frac{\varphi^{(r+1)}(\theta h)}{(r+1)!} h^{r+1}, \quad 0 \leq \theta \leq 1, \quad (7.7)$$

де величина r називається порядком (ступенем) точності методу.

Методи першого порядку точності. Вони представляються таким розрахунковим правилом (метод Ейлера):

$$y_{i+1} = y_i + h f(y_i, t_i). \quad (7.8)$$

Методи другого порядку точності. Ці методи представляються розрахунковими правилами, параметри яких задовольняють наступній системі

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 2 p_1 \beta_{21} = 0, \quad (7.9)$$

яка отримується прирівнюванням до нуля перших трьох членів розвинення функції $\varphi(h)$ в ряд Тейлора.

Система (7.9) є недовизначеною і сумісною, що призводить до існування безлічі розв'язків, представлених у вигляді однопараметричної множини. Приймаючи $\alpha_2 = b$, отримуємо для будь-яких $\beta \neq 0$

$$p_1 = 1 - \frac{1}{2b}, \quad p_2 = \frac{1}{2b}, \quad \beta_{21} = b. \quad (7.10)$$

При виборі конкретного значення b керуються різними міркуваннями. На практиці набули поширення значення параметрів, що приводять до зручних в обчислювальному відношенні розрахункових правил. Так, при $b = 1$ маємо $p_1 = 1/2, p_2 = 1/2, \beta_{21} = \alpha_2 = 1$. Розрахункове правило, що відповідає цим значенням, має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} (f(y_i, t_i) + f(y_i + h \dot{y}_i, t_i + h)), \quad (7.11)$$

а так як $y_i + h \dot{y}_i \approx y_{i+1}$, то лінійну комбінацію $0,5(k_1 + k_2)$ можна розглядати як аналог квадратурної формули трапецій при обчисленні інтеграла у виразі для точного значення шуканої функції

$$y_{i+1} = y_i + \int_{t_i}^{t_{i+1}} \dot{y}(r) dr. \quad (7.12)$$

Ще одне правило, що використовується, отримується при $b = 1/2$. В цьому випадку маємо $p_1 = 0$, $p_2 = 1$, $\beta_{21} = \alpha_2 = 1/2$ і

$$y_{i+1} = y_i + h f \left(y_i + \frac{1}{2} h \dot{y}_i, t_i + \frac{h}{2} \right), \quad (7.13)$$

що може розцінюватися як аналог квадратурної формули середніх прямокутників при обчисленні інтеграла в (7.12).

Можливе однозначне визначення значень параметрів p_1 , p_2 , α_2 , β_{21} шляхом доповнення системи (7.9) співвідношеннями, які отримуються з умови перетворення на нуль деяких членів у виразі для $\varphi'''(0)$. Так, з (7.9) випливає $\alpha_2 = \beta_{21}$. При цьому $\varphi'''(0)$ містить три члена з однаковими коефіцієнтами, рівність нулю яких дає систему

$$1 - p_1 - p_2 = 0, \quad 1 - 2 p_2 \alpha_2 = 0, \quad 1 - 3 p_2 \alpha_2^2 = 0, \quad (7.14)$$

яка має єдиний розв'язок $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$. Відповідне розрахункове правило має вигляд

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f \left(y_i + \frac{2}{3} h \dot{y}_i, t_i + \frac{2}{3} h \right) \right). \quad (7.15)$$

З виразу для $\varphi'''(0)$ випливає неможливість побудови формул чисельного інтегрування третього порядку точності при $q = 2$, оскільки ніяким вибором параметрів не можна забезпечити рівність $\varphi'''(0) = 0$ для довільних $f(y, t)$.

Методи третього порядку точності. При $q = 3$ є вісім параметрів, що підлягають визначенню: $p_1, p_2, p_3, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \beta_{21}, \beta_{31}, \beta_{32}$ (в загальному випадку число параметрів, як це випливає з (7.4) і (7.5), визначається виразом $(q^2 + 3q - 2)/2$). Система рівнянь для їх визначення має вигляд

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 + p_3 &= 1, & p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 &= 1/2, \\ p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^2 &= 1/3, & p_2 \alpha_2 \beta_{32} &= 1/6, \\ \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 &= 0, & \beta_{21} + \alpha_2 &= 0. \end{aligned} \quad (7.16)$$

Система (7.16) є недовизначеною і несумісною. Множина її рішень може бути представлена в двохпараметричному вигляді з двома вільними параметрами, в якості яких доцільно прийняти α_2 і α_3 , оскільки вони в (7.16) входять в другому степені. При цьому розв'язок (7.16) має вигляд

$$\begin{aligned} p_1 &= 1 - \frac{3(\alpha_3 - \alpha_2) - 2}{6\alpha_2\alpha_3}, & p_2 &= \frac{3\alpha_3 - 2}{6\alpha_2(\alpha_3 - \alpha_2)}, & p_3 &= \frac{2 - 3\alpha_2}{6\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}, \\ \beta_{21} &= \alpha_2, & \beta_{31} &= \frac{\alpha_3(3\alpha_2(1 - \alpha_2) - \alpha_3)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)}, & \beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_3 - \alpha_2)}{\alpha_2(2 - 3\alpha_2)} \end{aligned} \quad (7.17)$$

при будь-яких α_2 , α_3 за винятком $\alpha_2 = \alpha_3$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$, $\alpha_2 = 2/3$, при яких система (7.16) стає несумісною.

Найбільш уживане правило третього порядку точності виходить при $\alpha_2 = 1/2$, $\alpha_3 = 1$. Для цього випадку $p_1 = 1/6$, $p_2 = 2/3$, $p_3 = 1/6$, $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1$, $\beta_{32} = 2$ і розрахункове правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3), & k_1 &= h f(y_i, t_i), \\ k_2 &= h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), & k_3 &= h f(y_i - k_1 + 2k_2, t_i + h). \end{aligned} \quad (7.18)$$

Це правило можна розглядати як аналог квадратурної формули Сімпсона, так як в разі, коли $f(y, t)$ не залежить від y ($f_y \equiv 0$), (7.18) збігається з останньою.

В даному випадку параметри розрахункових правил можуть вибиратися із залученням додаткових співвідношень, що забезпечують єдиний розв'язок системи (7.16) і, крім того, не існує наборів параметрів, що призводять до правил четвертого порядку точності.

Методи четвертого і більш високого порядку точності. Із зростанням q система рівнянь відносно параметрів розрахункових правил набуває все більш складного вигляду. При $q = 4$ маємо 13 параметрів, які повинні задовольняти системі 11 рівнянь

$$\begin{aligned}
 p_1 + p_2 + p_3 + p_4 &= 1, & p_2 \alpha_2 + p_3 \alpha_3 + p_4 \alpha_4 &= 1/2, & \alpha_2 &= \beta_{21}, \\
 p_2 \alpha_2^2 + p_3 \alpha_3^3 + p_4 \alpha_4^2 &= 1/3, & p_2 \alpha_2^3 + p_3 \alpha_3^3 + p_4 \alpha_4^3 &= 1/4, \\
 p_3 \beta_{32} \alpha_2 + p_4 (\beta_{42} \alpha_2 + \beta_{43} \alpha_3) &= 1/6, & \beta_{31} + \beta_{32} - \alpha_3 &= 0, \\
 p_3 \beta_{32} \alpha_2^2 + p_4 (\beta_{42} \alpha_2^2 + \beta_{43} \alpha_3^2) &= 1/12, & \beta_{41} + \beta_{42} + \beta_{43} - \alpha_4 &= 0, \\
 p_3 \beta_{32} \alpha_2 \alpha_3 + p_4 \alpha_4 (\beta_{42} \alpha_2 + \beta_{43} \alpha_3) &= 1/8, & p_4 \beta_{43} \beta_{32} \alpha_2 &= 1/24.
 \end{aligned} \tag{7.19}$$

Система (7.19) має безліч розв'язків, які в загальному випадку залежать від двох параметрів. Аналіз умов спільності показує, що безліч розв'язків розпадається на три підмножини, вигляд яких залежить від співвідношень між окремими параметрами. Так, якщо $\alpha_2 \neq \alpha_3 \neq \alpha_4$, то (7.19) сумісна лише при $\alpha_4 = 1$ і множина розв'язків є двохпараметричною. При вільних параметрах α_2 і α_3 всі розв'язки представляються таким чином

$$\begin{aligned}
 p_2 &= \frac{2\alpha_3 - 1}{12\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(\alpha_2 - 1)}, & p_3 &= \frac{2\alpha_2 - 1}{12\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(1 - \alpha_3)}, \\
 p_4 &= \frac{6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3}{12(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}, \\
 \beta_{42} &= \frac{(\alpha_2 - 1)(4(\alpha_2 - \alpha_3^2) + 3(\alpha_3 - \alpha_2) + 2(\alpha_3 + 1))}{2\alpha_2(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, \\
 \beta_{43} &= \frac{(2\alpha_2 - 1)(\alpha_3 - 1)(\alpha_2 - 1)}{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)(6\alpha_2\alpha_3 - 4(\alpha_2 + \alpha_3) + 3)}, \\
 \beta_{32} &= \frac{\alpha_3(\alpha_2 - \alpha_3)}{2\alpha_2(2\alpha_2 - 1)}, & p_1 &= 1 - p_2 - p_3 - p_4,
 \end{aligned} \tag{7.20}$$

причому $\alpha_2 \neq \frac{1}{2}$, $\alpha_2 \neq 0$, $\alpha_2 \neq \frac{3 - 4\alpha_3}{4 - 6\alpha_3}$, $\alpha_3 \neq 0$.

Друга підмножина розв'язків визначається умовами сумісності системи (7.19) при $\alpha_2 = \alpha_4$ і являє собою однопараметричну множину, для опису якої зручно вважати вільним параметром p_2 . При цьому всі розв'язки подаються як

$$\begin{aligned}
 \alpha_2 = \alpha_4 = \beta_{21} &= 1, & \alpha_3 &= \frac{1}{2}, & p_1 &= \frac{1}{6}, & p_3 &= \frac{2}{3}, & p_4 &= \frac{1}{6} - p_2, & \beta_{31} &= \frac{3}{8}, \\
 \beta_{32} &= \frac{1}{8}, & \beta_{41} &= \frac{12p_2 + 1}{2(6p_2 - 1)}, & \beta_{42} &= \frac{1}{2(6p_2 - 1)}, & \beta_{43} &= \frac{2}{1 - 6p_2},
 \end{aligned} \tag{7.21}$$

причому $p_2 \neq 1/6$.

Третя підмножина розв'язків визначається умовами сумісності при $\alpha_2 = \alpha_3$ і, так само як і друга підмножина, є однопараметричною, опис якої також зручно задається при вільному параметрі p_2 . Всі розв'язки мають вигляд

$$\begin{aligned} \alpha_2 = \alpha_3 = \beta_{21} &= \frac{1}{2}, \quad \alpha_4 = 1, \\ p_1 = \frac{1}{6}, \quad p_3 &= \frac{2}{3} - p_2, \quad p_4 = \frac{1}{6}, \quad \beta_{31} = \frac{1 - 3p_2}{2(2 - 3p_2)}, \\ \beta_{32} &= \frac{1}{2(2 - 3p_2)}, \quad \beta_{41} = 0, \quad \beta_{42} = 3p_2 - 1, \quad \beta_{43} = 2 - 3p_2, \end{aligned} \quad (7.22)$$

причому $p_2 \neq 2/3$.

Розрахункове правило, яке відповідає множині параметрів (7.22) при $p_2 = 1/3$ і яке отримало найбільше поширення, має вигляд

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4), \\ k_1 &= h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \\ k_3 &= h f\left(y_i + \frac{k_2}{2}, t_i + \frac{h}{2}\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_3, t_i + h). \end{aligned} \quad (7.23)$$

Таким чином, це правило, як і правило (7.18), можна розглядати в якості аналогу квадратурної формули Сімпсона.

Інша поширена форма розрахункових співвідношень четвертого порядку відповідає першій підмножині розв'язків системи (7.19) при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$. При цьому $\beta_{21} = 1/2$, $\beta_{31} = -1/3$, $\beta_{32} = \beta_{41} = \beta_{43} = \alpha_4 = 1$, $\beta_{42} = -1$, $p_1 = p_4 = 1/8$, $p_2 = p_3 = 3/8$, а розрахункове правило має вигляд

$$\begin{aligned} y_{i+1} &= y_i + \frac{1}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4), \\ k_1 &= h f(y_i, t_i), \quad k_2 = h f\left(y_i + \frac{k_1}{3}, t_i + \frac{h}{3}\right), \\ k_3 &= h f\left(y_i + \frac{k_2}{3} + k_2, t_i + \frac{2}{3}h\right), \quad k_4 = h f(y_i + k_1 - k_2 + k_3, t_i + h). \end{aligned} \quad (7.24)$$

Це правило може трактуватися як аналог відомої квадратурної формули «трьох восьмих» (при $f_y \equiv 0$ (7.24) співпадає з останньою).

Викладені методи Рунге-Кутта до четвертого порядку включно мають властивість множинності розв'язків рівнянь щодо параметрів розрахункових правил (за винятком методу Ейлера). Починаючи ж з $q = 5$ і далі, параметрів $\alpha_j, p_j, \beta_{js}, j = 1, q, 0 < s < j \leq q$ не вистачає для виконання умов забезпечення q -го порядку точності. Відповідні системи стають перевизначеними і несумісними. Так, побудова методу 5-го порядку можлива лише при $q = 6$. Ця властивість полягає в тому, що порядок точності методу менше q зберігається для всіх методів вище четвертого порядку. Застосування методів Рунге-Кутта вимагає q -кратного обчислення правих частин вихідного рівняння на кожному кроці інтегрування. А так як саме обчислення правої частини є однією з найбільш трудомістких операцій, то використання методів вище четвертого порядку повинно призводити до високих вимог по швидкодії до обчислювального пристрою, що працює в реальному часі. Крім того, застосування методів високого порядку точності виправдано у випадках, коли обчислювальний процес може бути реалізований з великим кроком інтегрування, при якому необхідна швидкодія обчислювача може виявитися прийнятною. Однак, у разі побудови системи керування, крок інтегрування, що співпадає з інтервалом дискретності визначення керувань, має обмеження зверху, оскільки збільшення дискретності керувань призводить до збільшення похибки моделювання. Дана обставина свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Сказане рівною мірою слід віднести і до використання неявних методів Рунге-Кутта, ідея побудови яких аналогічна викладеній вище, не дивлячись на те, що неявні методи є більш точними, оскільки містять більше число параметрів (у виразах (7.5) для неявних методів слід покласти $0 < s \leq q$ або $0 < s \leq j$ — для напівявних).

Квадратурні методи. Третя група однокрокових методів чисельного розв'язування задачі Коші включає в себе методи, побудова яких заснована на застосуванні квадратурних формул при обчисленні інтеграла в (7.12). Ці методи будемо називати *квадратурними*.

Для викладу основної ідеї побудови квадратурних методів представимо вираз (7.12) у вигляді

$$y_{i+1} = y_i + h \int_0^1 f(y(t_i + \alpha h), t_i + \alpha h) d\alpha = y_i + h \int_0^1 \varphi(\alpha) d\alpha, \quad (7.25)$$

що досягається заміною змінних $\alpha = [(\tau - t_i)/h]$ в (7.12). Для обчислення інтеграла в (7.25) скористаємося формулою Гауса. Тоді отримаємо наближене значення для y_{i+1} у вигляді

$$y_{i+1} \approx y_i + h \sum_{j=1}^q p_j \varphi(\alpha_j) = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f\left(y(t_i + \alpha_j h), t_i + \alpha_j h\right). \quad (7.26)$$

Права частина (7.26) містить $2q$ параметрів, які вибираються з умови точності квадратурного правила для поліномів r -го степеня. З теорії квадратур відомо, що такі правила можуть бути побудовані для будь-яких $r \leq (2q - 1)$, Причому похибка обчислення інтеграла в (7.25) в припущенні неперервності $\varphi^{(r+2)}(\alpha) \in$ величиною $O(h^{r+2})$. В результаті отримується метод чисельного розв'язування диференціальних рівнянь $(r + 1)$ -го порядку. Якщо в (7.26) з $2q$ параметрів m параметрів вважати вільними, то можна будувати методи $(2q - m)$ -го порядку точності.

Умова точності квадратурного правила для поліномів r -го степеня призводить до наступної системи рівнянь щодо параметрів:

$$\sum_{i=1}^q p_i \alpha_i^{(j-1)} = \frac{1}{j}, \quad j = \overline{1, (2q - m)}, \quad (7.27)$$

в якій m параметрів можуть бути обрані довільно. В теорії квадратур доводиться, що при $m = 0$ система (7.27) має єдиний розв'язок для будь-якого $q \geq 1$. З цього випливає, що вона сумісна при будь-яких $m < 2q$.

Таким чином, задаючи q, m , а також вільні параметри і визначаючи з (7.27) інші параметри, замість (7.26) можна записати точну рівність

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^q p_j f\left(y_{i+\alpha_j}, t_i + \alpha_j h\right) + O\left(h^{2q-m+1}\right), \quad (7.28)$$

(тут $y_{i+\alpha_j} = y(t_i + \alpha_j h)$).

Однак для розрахунків вираз (7.28) не може бути застосований, так як значення $y_{i+\alpha_j}$ невідомі. Аналізуючи (7.28) неважко помітити, що порядок похибки рівності не зміниться, якщо в ньому замінити невідомі $y_{i+\alpha_j}$ на величини, які мають порядок похибки $O(h^{2q-m})$, для отримання яких досить застосувати квадратурну формулу меншого (на одиницю) порядку точності. Це досягається: або зменшенням q , або збільшенням кількості вільних параметрів на одиницю, а також вибором їх значень, зручних в обчислювальному

відношенні. При цьому для обчислення $y_{i+\alpha_j}$ з похибкою $O(h^{2q-m})$ знадобиться знання інших значень $y_{i+\bar{\alpha}_j}$, вимога до точності визначення яких ще більш слабка (порядок похибки $y_{i+\bar{\alpha}_j}$ дорівнює $(2q-m-1)$). Застосовуючи описану процедуру до знаходження $y_{i+\bar{\alpha}_j}$ і повторюючи цей процес, в результаті приходимо до необхідності знання $y_{i+\bar{\alpha}_j}$ з похибкою $O(h^2)$, що забезпечується застосуванням методу Ейлера. Таким чином, будується алгоритм послідовного визначення з наростаючою точністю значень $y_{i+\bar{\alpha}_j}, \dots, y_{i+\bar{\alpha}_j}, y_{i+\alpha_j}$, що дозволяє знайти y_{i+1} за (7.28) з заданим порядком локальної похибки.

При побудові квадратурних методів розв'язування задачі Коші основною проблемою є узгодження квадратурних формул різного порядку точності між собою з метою отримання економічних розрахункових правил. У загальному вигляді задача формалізації побудови квадратурних методів не вирішена.

Квадратурні методи першого порядку точності. Параметри методів визначаються з (7.27) при $(2q-m-1)$, що призводить до єдиної

умови $\sum_{j=1}^q p_j = 1$. При $q=1$ маємо $p_1 = 1$ (α_1 обирається довільно) і

$y_{i+1} = y_i + h f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h)$, але $f(y_{i+\alpha_1}, t_i + \alpha_1 h) = f(y_i, t_i) + O(h)$, що приводить до явного методу Ейлера (при $\alpha_1 = 1$ має місце неявний метод Ейлера).

Квадратурні методи другого порядку. Для побудови методів використовуються два рівняння системи (7.27):

$$\sum_{j=1}^q p_j = 1 \quad \sum_{j=1}^q p_j \alpha_j = \frac{1}{2}. \quad (7.29)$$

При $q=1$ є єдиний розв'язок $p_1 = 1, \alpha_2 = 1/2$ і відповідне розрахункове правило збігається з методом Рунге-Кутта (7.13). При $q=2$ система (7.29) має два вільних параметра, в якості яких зручно вибирати α_1 і α_2 . При цьому

$$p_1 = \frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}, \quad p_2 = \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)}$$

і, отже,

$$y_{i+1} = y_i + h \left(\frac{2\alpha_2 - 1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_1}, t_{i+\alpha_1, h}) + \frac{1 - 2\alpha_1}{2(\alpha_2 - \alpha_1)} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2, h}) \right). \quad (7.30)$$

Природно, що при використанні (7.30) для побудови розрахункових правил доцільно прийняти $\alpha_1 = 0$. Тоді множина розв'язків (7.29) є однопараметричною (параметр α_2) і збігається з множиною (7.10) розв'язків системи (7.9) для параметрів методів Рунге-

Кутта другого порядку, а вираз (7.30) набуває вигляду

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i + h \left(1 - \frac{1}{2\alpha_2} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2} f(y_{i+\alpha_2}, t_{i+\alpha_2, h}) \right), \quad (7.31)$$

де верхній індекс при шуканій функції означає порядок локальної похибки. Вираз (7.31) являє собою неявне правило, для використання якого необхідно знати $y_{i+\alpha_2}$. Відповідно до викладеного раніше

для побудови явного однокрокового правила необхідно мати $y_{i+\alpha_2}^{(2)}$, що забезпечується застосуванням правила

$$y_{i+\alpha_2}^{(2)} = y_{i+\alpha_2} h f(y_i, t_i). \quad (7.32)$$

Сукупність виразів (7.31) і (7.32) складає розрахункові правила методів другого порядку точності. У загальному випадку ці методи вимагають дворазового обчислення правих частин на кроці інтегрування, проте використання властивостей асимптотичних оцінок дозволяє в окремому випадку $\alpha_2 = 1$ побудувати метод другого порядку, що вимагає одноразового обчислення правих частин на кожному кроці. Дійсно, при $\alpha_2 = 1$ (7.31) можна представити як

$$y_{i+1}^{(3)} = y_i^{(3)} + \frac{1}{2} h \left(f(y_i^{(2)}, t_i) + f(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h) \right), \quad (7.33)$$

звідки видно, що розраховане на $(i+1)$ -му кроці значення $f(y_{i+1}^{(2)}, t_i + h)$ може використовуватися на $(i+2)$ -му кроці в якості першого доданка збільшення в (7.33). Таким чином, сукупність виразів (7.32) і (7.33) дає економний метод другого порядку.

Квадратурні методи третього порядку. Система рівнянь відносно параметрів цих методів складається з перших трьох рівнянь системи (7.27):

$$\sum_{j=1}^q P_j = 1, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j = \frac{1}{2}, \quad \sum_{j=1}^q P_j \alpha_j^2 = \frac{1}{3}. \quad (7.34)$$

При $q = 1$ система (7.34) несумісна, а при $q > 1$ — недовизначена з $2q - 3$ вільними параметрами. Для $q = 2$ є однопараметрична множина розв'язків, яка при вільному параметрі α_1 має вигляд

$$p_1 = \frac{1}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad p_2 = \frac{3(2\alpha_1 - 1)^2}{4(3\alpha_1^2 - 3\alpha_1 + 1)}, \quad \alpha_2 = \frac{3\alpha_1 - 1}{3(2\alpha_1 - 1)}.$$

При $\alpha_1 = 0$ маємо $p_1 = 1/4$, $p_2 = 3/4$, $\alpha_2 = 2/3$, так що

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(3)} + \frac{h}{4} \left(f(y_i^{(3,4)}, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_i + \frac{2}{3}h\right) \right). \quad (7.35)$$

Для обчислення $y_{i+2/3}^{(3)}$ необхідно використовувати один з методів другого порядку, застосовуючи для цієї мети загальний вираз (7.30). Однак, з огляду на те, що в (7.35) входить $f(y_i, t_i)$, при обчисленні $y_{i+2/3}^{(3)}$ має сенс використовувати це значення правої частини, що призводить до $\alpha_1^{(3)} = 0$ і

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_{i+}^{(4)} + \frac{2}{3}h \left(\frac{2\alpha_2^{(3)} - 1}{2\alpha_2^{(3)}} f(y_i, t_i) + \frac{1}{2\alpha_2^{(3)}} f\left(y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}}, t_i + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)}h\right) \right) \quad (7.36)$$

а

$$y_{(i+2/3)\alpha_2^{(3)}} = y_i^{(4)} + \frac{2}{3}\alpha_2^{(3)}h f(y_i, t_i).$$

Приймаючи $\alpha_2^{(3)} = 1/2$, приходимо до наступного правила

$$y_{i+1/3}^{(2)} = y_i + \frac{h}{3} f(y_i, t_i),$$

$$y_{i+2/3}^{(3)} = y_i + \frac{2}{3}h f\left(y_{i+1/3}^{(2)}, t_{i+1/3}h\right), \quad (7.37)$$

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3}h\right) \right).$$

Правило (7.37) аналогічне до методу Рунге-Кутта третього порядку, отриманому при $\alpha_2 = 1/3$, $\alpha_3 = 2/3$ в (7.16).

При $\alpha_2^{(3)} = 1$ обчислювальне правило набуває вигляду

$$\begin{aligned} y_{i+2/3}^{(2)} &= y_i + \frac{2}{3} h f(y_i, t_i), \\ y_{i+2/3}^{(3)} &= y_i + \frac{1}{3} h \left(f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+2/3}^{(2)}, t_{i+2/3} h\right) \right), \\ y_{i+1}^{(4)} &= y_i + \frac{h}{4} \left(f(y_i, t_i) + 3 f\left(y_{i+2/3}^{(3)}, t_{i+2/3} h\right) \right). \end{aligned} \quad (7.38)$$

При $q = 3$ система (7.34) має три вільних параметра, в якості яких зручно прийняти $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$. Поклавши, як і раніше, $\alpha_1 = 0$, приходимо до наступного розв'язку

$$p_1 = \frac{1}{3\alpha_2\alpha_3} + \frac{\alpha_2 - 1}{2\alpha_2} + \frac{\alpha_3 - 1}{2\alpha_3}, \quad p_2 = \frac{3\alpha_3 - 2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_2}, \quad p_3 = \frac{2 - 3\alpha_2}{6(\alpha_3 - \alpha_2)\alpha_3}.$$

Питання вибору значень α_2, α_3 не вирішене в даний час. Як вказувалося, часто вибирають параметри з умови зручності обчислень. Так, приймаючи $\alpha_2 = 1/2, \alpha_3 = 1$, маємо $p_1 = 1/6, p_2 = 2/3, p_3 = 1/6$ і

$$y_{i+1}^{(4)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{6} \left(f(y_i, t_i) + 4 f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+1/2} h\right) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h} h\right) \right). \quad (7.39)$$

Для значень $y_{i+1/2}^{(3)}$ і $y_{i+1}^{(3)}$ справедливі вирази (7.36) в яких параметри $\alpha_2^{(3)}$ в загальному випадку різні, а вибір їх значень призводить до різних обчислювальних правил. Так, якщо $\alpha_2^{(3)} = 2$, то, з огляду на

необхідність обчислення $f\left(y_{i+1/2}^{(3)}, t_{i+h} h\right)$ в (7.39) для $y_{i+1/2}^{(3)}$, маємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{8} \left(3 f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h} h\right) \right). \quad (7.40)$$

Вважаючи $\alpha_2^{(3)} = 1$ для обчислення $y_{i+1}^{(3)}$, отримуємо

$$y_{i+1/2}^{(3)} = y_i^{(4)} + \frac{h}{2} \left(f(y_i, t_i) + f\left(y_{i+1}^{(3)}, t_{i+h} h\right) \right) \quad (7.41)$$

і, як зазвичай,

$$y_{i+1}^{(2)} = y_i + h f\left(y_i^{(4)}, t_i\right). \quad (7.42)$$

Сукупність виразів (7.39)-(7.42) і складає обчислювальне правило. Аналізуючи ці вирази, неважко помітити, що число обчислень правої частини залежить від порядку похибки $y_i^{(r)}$ при обчисленні $f(y_i, t_i)$. При $r = 4$ потрібно обчислювати чотири значення правої частини на кожному кроці інтегрування, а при $r = 3$ — три. Інша особливість цього розрахункового правила полягає в наявності трьох наближених значень y_{i+1} , що може бути використане для контролю обчислювального процесу. Ця властивість методів, заснованих на квадратурних формулах, слід вважати істотною перевагою і враховувати при виборі методу чисельного розв'язування.

7.2. Вибір оптимального (найкращого) алгоритму

Критерії оптимальності. Реальні припущення щодо властивостей керованих об'єктів дають змогу представити рівняння динаміки у вигляді задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь

$$\dot{\mathbf{y}} = f(\mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{p}), \quad \mathbf{y}(0) = \mathbf{y}_0, \quad (7.43)$$

де \mathbf{y} — вектор змінних стану, компонентами якого є (у загальному випадку) вихідні координати динамічного об'єкта, значення відхилень керуючих органів, різні змінні параметри тощо; \mathbf{u} — вектор керуючих сигналів, що діють на вході системи керування об'єкта; \mathbf{p} — вектор параметрів, що характеризують властивості об'єкта і його системи керування, а також властивості зовнішнього середовища; \mathbf{y}_0 — вектор початкових значень змінних стану.

Зазвичай серед рівнянь системи (7.43) можна виділити групи рівнянь, інтегрування яких здійснюється досить просто або можливо в явному вигляді. До таких рівнянь, наприклад, можна віднести одновимірні рівняння, що зв'язують значення відхилень органів керування зі значеннями відповідних керуючих сигналів. Зазначені рівняння є порівняно простими, а питання чисельного розв'язування їх розроблені досить повно. У той же час частина рівнянь системи (7.43), яка представляє собою сукупність рівнянь динаміки, є найбільш складною і специфічною для заданого типу об'єкта. Саме для вирішення цієї частини рівнянь, якими надалі будемо вважати систему (7.43), особливе значення має вибір найкращого обчислювального методу.

Вирішення задачі вибору обчислювального методу передбачає проведення порівняльного аналізу різних методів за певними харак-

теристиками. Відомий ряд підходів до порівняння обчислювальних методів розв'язування ЗДР, зокрема, такі як порівняння областей або характеру стійкості, локальних похибок, в тому числі за обчислювальними витратами на їх оцінювання. В даний час найбільш поширеним є порівняння методів за результатами розв'язування наборів тестових задач. Недоліки такого підходу полягають в труднощі отримання однозначних результатів порівняння (мабуть, цей підхід успішно може застосовуватися для виявлення явно «поганих» методів) і в неможливості, взагалі кажучи, оцінки властивостей методів при розв'язуванні реальних задач, що характерно і для згаданих вище підходів. В цілому вирішення питання про вибір найкращого методу аналізу динаміки залежить від змісту, що вкладається в поняття «найкращий», яке повністю визначається критерієм оптимальності. Як правило, критерій оптимальності являє собою деяку функцію або функціонал від будь-яких характеристик (аргументів критерію) елементів множини, в якій шукається оптимальний елемент. В даному випадку такою множиною є множина обчислювальних методів розв'язування задачі (7.43). Під оптимальним елементом при цьому розуміється елемент множини, на характеристиках якого критерій оптимальності приймає глобальне екстремальне значення.

Формулювання або конструювання критерію оптимальності не завжди є завданням математичного характеру і повністю залежить від дослідника і переслідуваних ним цілей. Це також відноситься і до вибору аргументів критерію оптимальності. При цьому визначення критерію оптимальності часто представляється складним через суперечливість різноманітних характеристик, що добре видно, наприклад, у випадку порівняння методів на тестових задачах. Стосовно розглянутих задач з врахуванням вимоги функціонування об'єкта в реальному часі під оптимальним методом чисельного розв'язування задачі Коші слід розуміти метод, що забезпечує найбільш швидке наближене розв'язування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, за умови, що похибка наближеного розв'язку не перевищує заданого значення.

Визначення оптимального в зазначеному сенсі методу розв'язування задачі Коші є в загальному випадку досить складною задачею, що не має в даний час практично прийнятних алгоритмів вирішення, в той час як потреба такого визначення при організації обчислювальних процесів в системах керування динамічними об'єктами є очевидною.

Складність задачі визначення найкращого методу чисельного розв'язування систем нелінійних диференціальних рівнянь є наслід-

ком того факту, що похибка наближеного розв'язку істотно залежить від виду системи, що розв'язується. Саме тому не можна очікувати, що можна отримати розумну відповідь на питання: який метод вважати кращим при вирішенні системи типу (7.43) в загальному випадку? Якщо ж система рівнянь (7.43) відноситься до досить вузького класу диференціальних рівнянь, що має певні, притаманні лише йому властивості, як у випадку, наприклад, рухомих об'єктів, то питання про вибір найкращого методу чисельного розв'язування рівнянь з цього класу набуває сенсу. Так, математичні моделі різних рухливих об'єктів, по суті, відрізняються лише значеннями параметрів p , що входять в опис (7.43), бо в основі отримання цих рівнянь у всіх випадках лежать закони збереження кількості руху і його моменту.

Однак навіть в разі належності системи (7.43) до певного, досить вузького класу, вибір найкращого методу є важким завданням, оскільки властивість нелінійності диференціальних рівнянь значно ускладнює отримання характеристик точності різних методів.

Стосовно розглянутих тут задач цілком очевидно, що при виборі найкращого методу до числа аргументів критерію оптимальності слід включити характеристики точності методів, характеристики обсягу обчислювальної роботи на кроці інтегрування, а також величину останнього. Зазначені характеристики досить повно відображають ті властивості чисельних методів, врахування яких необхідне для досягнення основної мети — організації ефективного *алгоритмічного забезпечення*, що вимагає прийнятної швидкодії і дозволяє отримати необхідні характеристики процесу моделювання. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульована так: потрібно визначити обчислювальний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія керуючої системи є мінімальною, а похибка розв'язування рівнянь динаміки не перевищує заданої величини δ_d .

Критерієм оптимальності при цьому є функція

$$W = \frac{N_i}{\delta_i^{-1}(\delta_d)}, \quad (7.44)$$

де i — індекс методу, N_i — обсяг обчислень на кроці інтегрування i -м методом, $\delta_i^{-1}(h)$ — функціональна залежність похибки розв'язку від величини кроку інтегрування h (оптимальний метод мінімізує значення цієї функції).

Представляє практичний інтерес також наступна постановка задачі вибору оптимального методу: швидкодія обчислювача задана

і потрібно знайти метод, що дає мінімальну похибку розв'язування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється. У цьому випадку критерієм оптимальності є функція

$$E = \delta_i \left(\frac{N_i}{W_3} \right), \quad (7.45)$$

де W_3 — задана швидкодія, а оптимальний метод також мінімізує її значення.

В загальному випадку критерії (7.44) і (7.45) не є залежними, тобто оптимальний за критерієм (7.44) метод може не бути оптимальним за критерієм (7.45) і навпаки. Однак при певних умовах, що залежать від виду функцій похибок $\delta_i(h)$, оптимізація за розглянутими критеріями приводить до однакових результатів.

Вибір оптимального методу може проводитись при використанні як функцій похибок вихідних координат, так і їх похідних. Для цілей побудови керуючих систем динамічних об'єктів, коли потрібно забезпечення еквівалентності за похідними вихідних координат, природним є використання функцій похибок похідних. В окремих ситуаціях можливий оптимальний вибір методу інтегрування з врахуванням похибок вихідних координат. Тому характеристики точності різних методів розв'язування рівнянь динаміки необхідно оцінювати як за вихідними координатами, так і за їх похідними.

З викладеного випливає, що для визначення найкращого методу чисельного розв'язування рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, необхідно мати такі характеристики методів як точність і об'єм обчислень на кроці інтегрування. Що стосується об'єму обчислень, то питання вирішується порівняно просто. Дійсно, складність математичних описів об'єктів, що моделюються, як правило, дуже значна в обчислювальному відношенні. У зв'язку з цим переважна частина обчислювальної роботи при аналізі динаміки припадає на обчислення значень системи (7.43). Отже, в якості міри об'єму обчислень на кроці інтегрування доцільно прийняти число звернень до процедури обчислення праних частин системи (7.43), що вимагається на кожному кроці інтегрування при реалізації того чи іншого методу. При цьому відношення N/h буде служити мірою необхідної швидкодії керуючої системи, що визначається досліджуваним методом аналізу динаміки об'єкта, що моделюється. У той же час, слід мати на увазі, що характеристика об'єму обчислень не завжди правильно відображає обчислювальні витрати при аналізі динаміки. Пояснюється це особливостями програмної реалізації алгоритмів

чисельного аналізу, архітектури обчислювачів і операційних систем, в результаті чого виникають додаткові витрати часу — так звані «накладні витрати».

При виборі методів аналізу динаміки з врахуванням додаткових витрат часу критерій оптимальності (7.44) слід замінити на

$$W_1 = \frac{N_i T}{(T - \Delta T_i) \delta_d^1(\delta_d)}, \quad (7.46)$$

де T — інтервал моделювання, а ΔT_i — додаткові часові витрати при програмній реалізації i -го методу. Критерій (7.46) впливає з умови рівності часу аналізу динаміки з врахуванням додаткових витрат на інтервалі моделювання. При виборі методів розв'язування за критерієм (7.61) оцінка додаткових витрат здійснюється експериментально.

Як метод дослідження властивостей точності різних алгоритмів розв'язування ЗДР, що описують динаміку об'єкта, що моделюється, слід прийняти метод обчислювального експерименту. Пояснюється це тим, що аналітичні оцінки точності розв'язків задачі Коші, отримані для різних методів, є, як правило, сильно завищеними, а часто і необчислюваними, оскільки містять невизначені константи. Використання ж асимптотичних оцінок локальної похибки для цілей порівняння методів за властивостями точності некоректно через саме асимптотичність, оскільки перенесення властивостей методів з області гранично малих кроків інтегрування на область кінцевих значень може привести до грубих похибок в оцінюванні властивостей точності різних методів.

Перевагою методу обчислювального експерименту є можливість отримання реальних характеристик похибки на всьому інтервалі моделювання. Недолік методу полягає в локальному характері одержуваних результатів, справедливих, взагалі кажучи, лише для досліджуваного режиму. У зв'язку з цим, дослідження властивостей точності різних обчислювальних методів розв'язування рівнянь динаміки об'єктів, що моделюються, слід проводити для найбільш важких (екстремальних) в динамічному сенсі режимах. При цьому можна очікувати, принаймні, непогіршення властивостей точності обчислювальних методів в разі аналізу більш «легких» режимів.

Екстремальні режими при дослідженні і оптимізації обчислювальних методів. Вирішення сформульованої вище задачі вибору найкращого методу чисельного аналізу динаміки об'єктів, що моделюються можливо лише методом обчислювального експерименту, що передбачає створення відповідної комп'ютерної методики оцін-

ки характеристик різних алгоритмів розв'язування ЗДР і їх порівняння за заданим критерієм. При цьому основним завданням, що розв'язується за допомогою обчислювального експерименту, є отримання характеристик точності порівнюваних методів. Крім того, важливе значення для ефективного використання методики має питання формування множини порівнюваних методів.

Викладені вище обчислювальні методи становлять досить велику групу і можуть служити базою для формування вихідної множини порівнюваних методів аналізу динаміки об'єктів, що моделюються.

Розглянемо питання про можливість застосування багатокрокових методів. Особливістю їх є необхідність знання значень інтегрованих змінних в декількох вузлових точках, що передують вузловий точці, в якій обчислюється чергове значення шуканих функцій (несамостартуючі методи). Для обчислювальних систем, що працюють в реальному часі, ця властивість може мати вирішальне значення. Дійсно, вимога побудови початкової ділянки призводить до необхідності використання однокрокових методів, порядок точності яких повинен бути, щонайменше, не менше порядку точності відповідного багатокрокового методу. Отже, необхідна швидкодія обчислювача буде цілком визначатися саме однокроковим методом, що використовується для визначення початкових значень.

Слід, однак, враховувати, що для широкого класу динамічних об'єктів характерно існування стаціонарних режимів функціонування, при яких вихідні змінні залишаються незмінними в часі або являють собою відомі періодичні функції. Тому з'являється можливість уникнути необхідності побудови початкової ділянки при використанні явних різницевих схем чисельного інтегрування рівнянь динаміки в реальному часі завдяки організації переходу в режим моделювання зі стаціонарного режиму. При цьому в якості «розгінних» значень вихідних координат слід приймати їх стаціонарні значення. Обчислювальні експерименти з перевірки такого способу задання початкової ділянки показують допустимість зазначеної заміни. Це обумовлено тим, що відмінність результатів розрахунків похибок багатокрокових методів з «розгінними» ділянками, отриманими за методом Рунге-Кутта четвертого порядку, а також з початковими ділянками, отриманими за стаціонарними режимами, складають одиниці відсотків. Даний результат свідчить про прийнятність зазначеного підходу до використання багатокрокових методів аналізу динаміки об'єктів, що моделюються.

Оскільки неявні різницеві схеми, що приводять до розрахункових правил типу «прогноз — корекція», також вимагають побудови

початкової ділянки, то все сказане вище щодо застосування явних схем можна перенести на випадок використання методів прогнозу і корекції. Що стосується неявних методів загального вигляду, то їх значно більша обчислювальна складність у порівнянні з явними методами дозволяє апріорі виключити ці методи з вихідної множини.

Застосування експоненціальних методів аналізу динаміки в випадках складних нелінійних математичних описів, що представляють практичний інтерес, пов'язано з рядом труднощів. Досвід чисельної реалізації експоненціальних методів при аналізі динаміки ряду об'єктів підтверджує зазначене положення. У зв'язку з цим слід визнати доцільність виключення експоненціальних методів з вихідної множини методів чисельного аналізу динаміки об'єктів, що моделюються при постановці задачі вибору найкращого методу.

З огляду на викладені міркування про властивості різних груп обчислювальних методів аналізу динаміки можна зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину досліджуваних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. За наявності можливості використання стаціонарних режимів об'єктів, що моделюються у вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи — явні і типу «прогноз – корекція».

Оцінка глобальної похибки. Отримання інформації про властивості точності тих чи інших методів розв'язування рівнянь динаміки при використанні методики обчислювального експерименту вимагає оцінки глобальної похибки інтегрування досліджуваними методами. В даний час існує досить багато способів оцінювання глобальної похибки розв'язку ЗДР, що відрізняються різним ступенем достовірності і трудомісткості.

Найбільш поширеними способами оцінки глобальної похибки розв'язку диференціального рівняння є способи, засновані на аналізі нев'язок (дефектів) і екстраполяції Річардсона. Ідея першого способу полягає у використанні того факту, що отриманий розв'язок (точніше, неперервна його апроксимація) не задовольняє вихідній системі. Отримана при цьому нев'язка характеризує глобальну похибку і може використовуватися для управління процесом чисельного розв'язування.

Таким чином, в якості еталонного розв'язку для оцінки глобальної похибки може бути прийнятий розв'язок, що отримується будь-яким з досліджуваних методів найбільшого порядку точності при мінімальному значенні кроку інтегрування. Вибір кроку в даному випадку здійснюється шляхом порівняння одержуваного розв'язку з екстрапольованим. Допуск на різницю цих розв'язків

призначається з урахуванням основної мети — забезпечення якості моделювання досліджуваних об'єктів. При цьому в якості еталонного розв'язку рівнянь динаміки приймається розв'язок, точність якого на два порядки вище необхідної точності моделювання.

Побудова функцій похибок методом обчислювального експерименту пов'язана зі значними витратами машинного часу. Тому практичне значення має вибір «розумних» меж зміни аргументу функцій похибок, тобто кордонів зміни величини кроку інтегрування досліджуваних методів. Обмеження знизу величини кроку визначається можливостями засобів обчислювальної техніки і складністю математичних описів об'єктів, що моделюються. Так, вважаючи швидкодію обчислювальної системи рівною W операцій в секунду і оцінюючи мінімальне число операцій при визначенні керувань величиною $N_{\text{оп}}$, отримуємо мінімально допустимий крок інтегрування $h_{\text{min}} = (N_{\text{оп}}/W)$ секунд. Зауважимо, що це значення кроку інтегрування слід вибирати в якості початкового значення при визначенні методу, розв'язок якого приймається за еталонний.

У загальному випадку порівняння алгоритмів аналізу динаміки за методикою обчислювального експерименту має здійснюватися для різних рівнів допустимої похибки δ_{dj} , $j = \overline{1, l}$. При цьому ранжування досліджуваних алгоритмів за величиною критерію оптимальності може призводити до різних результатів для різних рівнів δ_{dj} . У зв'язку з цим, при наявності множини допустимих рівнів похибки, в якості критерію оптимальності слід використовувати інтегральну характеристику критеріальної функції (7.44).

Побудова спеціалізованих алгоритмів аналізу динаміки. Розглянуті вище методи чисельного розв'язування задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь, як правило, мають властивість універсальності в тому сенсі, що їх розрахункові правила будуються без врахування властивостей системи, що розв'язується. Певною мірою враховують специфіку системи такі методи, як експоненціальні і неявні, в яких наближені значення шуканих величин знаходяться шляхом розв'язування нелінійних алгебраїчних рівнянь з використанням матриці Якобі. Як випливає з попереднього викладу, використання цих методів проблематичне через високі обчислювальні витрати на кроці інтегрування, обмеженість зверху останнього і умови функціонування в реальному часі.

Прагнення до поліпшення властивостей точності і швидкості обчислювальних методів аналізу динаміки об'єктів, приводить до

ідеї побудови спеціалізованих методів, призначених для розв'язування заданої конкретної системи рівнянь. Хорошим прикладом реалізації цієї ідеї є розрахункове правило для розв'язування лінійних рівнянь з постійними коефіцієнтами, в якому чисельні значення параметрів залежать від матриці системи, що розв'язується. Іншим прикладом служить варіант введення у формули чисельного інтегрування додаткових членів, що компенсують фазові спотворення при інтегруванні синусоїдальних сигналів. Можлива також побудова спеціалізованих методів для розв'язування рівнянь обертання на основі розвинення в ряд Тейлора і застосування методу Пікара з одночасним урахуванням виду правих частин. Необхідність розробки спеціалізованих методів виникає у випадках, коли потрібно багаторазове проведення чисельного аналізу однієї і тієї ж системи, а використання універсальних методів з яких-небудь причин (як правило, пов'язаних з кінцевою метою чисельного аналізу) недоцільне або взагалі неможливе. Саме така ситуація реально може виникнути при побудові керуючих систем динамічних об'єктів.

Досвід проведення відповідних досліджень свідчить, що при розробці завдання синтезу спеціалізованих методів розв'язування заданої системи (7.43) формулюється як задача *ідентифікації* в широкому сенсі. При цьому основна ідея побудови методів полягає в знаходженні відповідних представлень залишків

$$r_j(h) = y_j(t+h) - z_j(t+h), \quad j = \overline{1, n} \quad (7.47)$$

($z_j(t+h)$) — наближене значення невідомої вектор-функції $y_j(t+h)$, що отримується деяким чисельним (базовим) методом у вигляді

$$r_j(h) \approx \sum_{k=1}^{N_j} p_{kj} \cdot q_{kj}(\dot{z}(t), z(t), u(t)) = \varphi_j(p_j, \dot{z}, z, u), \quad (7.48)$$

де $q_{kj}(\cdot)$ — деякі функції, p_{kj} — параметри, $j = \overline{1, n}$.

Розрахункове правило спеціалізованого методу має вигляд

$$z_{i+1} = \Phi(z_i, f) + \Psi(p, z_i, f, u), \quad (7.49)$$

де $\Phi(z_i, f)$ — вектор-функція, яка визначається розрахунковим правилом базового методу; $\Psi(p, z_i, f, u)$ — вектор-функція, компонентами якої є функції з (7.48).

Основними питаннями, що виникають при вирішенні таким чином поставленої задачі синтезу спеціалізованих методів аналізу динаміки, є: теоретичне обґрунтування існування розв'язку; вибір базового методу; визначення або організація пошуку вигляду функцій $q_{kj}(\cdot)$, їх кількості і аргументів; оцінка значень параметрів p_{kj} .

Перше питання вирішується порівняно просто, принаймні в разі обґрунтування існування функції ψ з (7.49), яка забезпечує певний порядок точності методу. Основною умовою, яка повинна виконуватися, є диференційованість необхідне число раз залишків (7.47). При цьому вид правої частини (7.48) теоретично визначається розкладанням $r_j(h)$ в ступеневий ряд за h в точці $h = 0$.

Питання вибору базового методу має вирішуватися з врахуванням кінцевої мети використання чисельного аналізу динаміки, тобто повинна вирішуватися задача вибору оптимального методу аналізу динаміки. При цьому в якості базового методу природно вибрати оптимальний або близький до нього.

Останні два зі сформульованих основних питань відносяться до власне ідентифікації — структурної та параметричної. Вирішення їх може здійснюватися за допомогою прийомів теорії ідентифікації.

7.3. Моделювання задач аналізу динамічних об'єктів на основі рівнянь типу Вольтерри II роду (прямі задачі)

При чисельній реалізації інтегрального рівняння Вольтерри II роду [35, 36, 72]

$$\varphi(x) - \int_a^x K(x, s) \cdot \varphi(s) ds = f(x) \quad (7.50)$$

перехід до дискретних обчислювальних схем здійснюються за допомогою виразу [80, 10]

$$\varphi(x_i) - \int_a^{x_i} K(x_i, s) \cdot \varphi(s) ds = f(x_i). \quad (7.51)$$

Беручи значення x_i в якості вузлів квадратурної формули і замінюючи інтеграл скінченною сумою, отримаємо систему алгебраїчних рівнянь

$$\tilde{\varphi}(x_i) - \sum_{j=1}^i A_j K(x_i, x_j) \cdot \tilde{\varphi}(x_j) \cong f(x_i), \quad (7.52)$$

де $x_j = j \cdot h$, h — крок квадратури, $\tilde{\varphi}(x_i)$ — наближені значення функції $\varphi(x_i)$ в вузлах x_i . Для побудови ефективного алгоритму доцільно отримати рекурентний вираз, користуючись тим, що це

можна зробити саме для рівнянь Вольтерри, на відміну від рівнянь Фредгольма [123, 163, 192]. Застосовуючи, наприклад, формулу трапецій можна записати наступні розрахункові вирази для змінного кроку (*загальний випадок*) [207, 157]:

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_1) &= f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{\left(f(x_2) + \frac{h_2}{2} K(x_2, x_1) \cdot \varphi(x_1) \right)}{1 - \frac{h_2}{2} K(x_2, x_2)}, \\ \tilde{\varphi}(x_i) &= \\ &= \frac{\left(f(x_i) + \frac{h_2}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h_i}{2} K(x_i, x_i)}, \end{aligned} \quad (7.53)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; для постійного кроку ($h = const$):

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_1) &= f(x_1), \\ \tilde{\varphi}(x_i) &= \frac{\left(f(x_i) + \frac{h}{2} K(x_i, x_1) \cdot \varphi(x_1) + h \sum_{j=2}^{i-1} K(x_i, x_j) \cdot \varphi(x_j) \right)}{1 - \frac{h}{2} K(x_i, x_i)}. \end{aligned} \quad (7.54)$$

Слід відзначити, що при використанні традиційного розрахункового виразу (7.54) час обчислення шуканої функції залежить від кількості кроків дискретизації, збільшення яких призводить до збільшення кількості обчислювальних операцій. Розрахунковий вираз, отриманий у випадку виродженого ядра

$$K(x, s) = \sum_{l=1}^m \alpha_l(x) \beta_l(s), \quad (7.55)$$

із застосуванням формули трапецій, має вигляд: при змінному кроці дискретизації (*загальний випадок*):

$$\tilde{\varphi}(x_1) = f(x_1), \quad \tilde{\varphi}(x_2) = \frac{f(x_2) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_2) \cdot \beta_l(x_1) \cdot \varphi(x_1)}{1 - \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_1) \cdot \beta_l(x_1)},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(x_i) &= \\ &= \frac{f(x_i) + \frac{h_2}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \beta_l(x_1) \varphi(x_1) + \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=2}^{i-1} \frac{h_j + h_{j+1}}{2} \beta_l(x_j) \varphi(x_j)}{1 - \frac{h_i}{2} \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \beta_l(x_i)}, \end{aligned} \quad (7.56)$$

де $i = 3, 4, \dots, n$; $h_j = x_j - x_{j-1}$; при постійному кроці дискретизації ($h = const$):

$$\tilde{\varphi}(0) = f(0), \quad \tilde{\varphi}(x_i) = \frac{f(x_i) + h \sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i) \cdot \sum_{j=1}^{i-1} A_j \beta_l(x_j) \cdot \varphi(x_j)}{1 - \frac{h}{2} K(0)}, \quad (7.57)$$

де $i = 2, 3, \dots, n$; $A_j = \begin{cases} 0,5, & \text{при } j = 1, \\ 1, & \text{при } j > 1. \end{cases}$

Аналогічно можуть бути отримані розрахункові вирази для розв'язування систем інтегральних рівнянь Вольтерри II роду [183].

Приклад 7.1. Розв'язується інтегральне рівняння Вольтерри II роду

$$\varphi(x) = x \cdot 3^x - \int_0^{x_i} 3^{x-s} \cdot \varphi(s) \cdot ds \quad (7.58)$$

в інтервалі від 0 до 0,4 з кроком дискретизації $h = 0,02$. Використовуючи традиційний алгоритм (7.5), отримуємо співвідношення відносно $\varphi_T(x_i)$

$$\varphi_T(0) = (0), \quad \varphi_T(x_i) = \frac{x_i \cdot 3^{x_i} - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{x_i - x_j} \cdot \varphi_n(x_j)}{1 - \frac{h}{2}}, \quad (7.59)$$

а при використанні властивостей виродженого ядра маємо модифіковане розрахункове співвідношення відносно $\varphi_M(x_i)$:

$$\varphi_M(0) = (0), \quad \varphi_M(x_i) = \frac{\left[3^{x_i} \cdot \left(x_i - h \sum_{j=1}^{i-1} A_j 3^{-x_j} \cdot \varphi_m(x_j) \right) \right]}{\left(1 - \frac{h}{2} \right)}. \quad (7.60)$$

У таблиці 7.1. представлені результати обчислень за розрахунковими співвідношеннями (7.59) і (7.60), а також точний розв'язок $\varphi_0(x_i)$. Як видно з таблиці 7.1. по точності обидва алгоритми збігаються; на рис. 7.1 наведено графік похибки отриманого розв'язку. Час розв'язування за алгоритмом (7.59) при кроці $h = 0,02$ становить 0,08 с, а за алгоритмом (7.60) — становить 0,06 с, тобто алгоритми, отримані на основі використання виродженості ядра є більш швидкодійними, ніж традиційні алгоритми.

Таблиця 7.1

Результати дослідження для прикладу 7.1

x_i	$\varphi_T(x_i)$	$\varphi_0(x_i)$	$\varepsilon(x) =$ $= \varphi_T(x_i) - \varphi_0(x_i) $	$\varphi_M(x_i)$	$\varepsilon(x) =$ $= \varphi_T(x_i) - \tilde{\varphi}_0(x_i) $
1	2	3	4	5	6
0	0,0000	0,00000	0,00000	0,00000	0,00000
0,02	0,0202	0,02024	0,00004	0,02024	0,00004
0,04	0,0409	0,04097	0,00007	0,04097	0,00007
0,06	0,0622	0,06221	0,00001	0,06221	0,00001
0,08	0,0839	0,08395	0,00005	0,08395	0,00005
0,1	0,1062	0,10622	0,00002	0,10622	0,00002
0,12	0,1290	0,12902	0,00002	0,12902	0,00002
0,14	0,1523	0,15237	0,00007	0,15237	0,00007
0,16	0,1762	0,17628	0,00008	0,17628	0,00008
0,18	0,2007	0,20076	0,00006	0,20076	0,00006

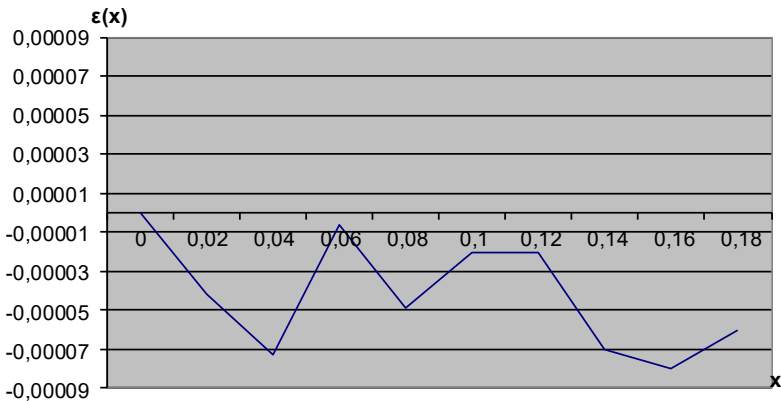


Рис. 7.1. Графік похибки розв'язку

Резольвентний метод [76]. Загальною аналітичною формою розв'язування рівняння Вольтерри II роду є вираз

$$y(x) = f(x) + \int_a^x R(x, s) f(s) ds, \quad (7.61)$$

де функція $R(x, s)$ є резольвентою (резольвентним або розв'язуючим ядром).

Ітеровані ядра. Резольвента рівняння (7.61) визначається виразом

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s), \quad (7.62)$$

де $K_n(x, s)$ — ітеровані (повторні) ядра, які визначаються рекурентними співвідношеннями

$$K_1(x, s) = K(x, s),$$

$$K_{n+1}(x, s) = \int_s^x K(x, t) K_n(t, s) dt, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.63)$$

Визначення резольвенти і чисельна або аналітична реалізація виразу (7.62) означає, по суті, операцію обернення оператора об'єкта, що моделюється, представленого лівою частиною рівняння (7.71). Крім того, такий підхід до пошуку розв'язку відкриває можливість отримання ряду нових обчислювальних алгоритмів моделювання, що реалізують явне подання оберненого оператора задачі.

Приклад 7.2. Техніку дій з ітерованими ядрами можна проілюструвати на прикладі визначення резольвенти ядра

$$K(x, s) = K_1(x, s) = e^{x-s}.$$

Згідно (7.63)

$$K_2(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} dz = e^{x-s} \int_s^x dz = e^{x-s} (x-s),$$

$$K_3(x, s) = \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s) dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^2}{2},$$

$$K_4(x, s) = \frac{1}{2} \int_s^x e^{x-z} e^{z-s} (z-s)^2 dz = e^{x-s} \frac{(x-s)^3}{3!},$$

або в загальному вигляді $K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \frac{(x-s)^n}{n!}, n = 0, 1, 2, \dots$

Тепер за виразом (7.62) можна знайти

$$R(x, s) = \sum_{n=0}^{\infty} K_{n+1}(x, s) = e^{x-s} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-s)^n}{n!} = e^{x-s} e^{-x+s} = e^{2(x-s)}.$$

Рівняння відносно резольвенти. Для резольвенти може бути отримано інтегральне рівняння, яке її визначає:

$$R(x, s) = K(x, s) + \int_s^x K(x, t) R(s, t) dt. \quad (7.64)$$

Структура отриманого рівняння (7.64) збігається зі структурою рівняння (7.62), яке розв'язується, причому вихідною інформацією, що породжує резольвенту, є задане ядро $K(x, s)$. Використання резольвенти виявляється виключно корисним при якісному аналізі задач і виконанні різного роду еквівалентних і спрощуючих перетворень. Можливі також випадки, коли головною задачею дослідження є саме знаходження резольвенти, тобто аналітичного або чисельного розв'язку рівняння (7.64), що має значний практичний сенс. Велике значення має знаходження резольвенти в задачах, які доводиться розв'язувати багато разів при різних варіантах правої частини $f(x)$ і при одному і тому ж ядрі. Наявність виразу для резольвенти у багатьох випадках дозволяє отримати розв'язок вихідного рівняння в аналітичному вигляді.

Метод виродженої резольвенти [98]. Розглянемо інтегральне рівняння [148]

$$y(x) = f(x) + \int_0^x K(x, s) f(s) ds. \quad (7.65)$$

Введемо поняття виродженої резольвенти

$$R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s), \quad (7.66)$$

тоді рівняння (7.65) матиме вигляд

$$y(x) = f(x) + \int_0^x \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s) f(s) ds \quad (7.67)$$

або

$$y(x) = f(x) + \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \int_0^x \beta_{Ri}(s) f(s) ds. \quad (7.68)$$

Таким чином, при розв'язуванні інтегрального рівняння немає необхідності знаходити інтеграл від функції двох змінних, а лише інтеграл від функцій однієї змінної. При чисельній реалізації методу

виродженої резольвенти маємо співвідношення $m \ll n$ (n — кількість дискретизуючих алгебраїчних рівнянь для методу квадратур [73]), тобто маємо відповідне скорочення кількості операцій при задіянні методу виродженої резольвенти.

Є два наступні способи отримання виродженої резольвенти за допомогою методу ітерованих ядер.

Перший спосіб. Апроксимуємо вхідне ядро інтегрального рівняння (7.65) $K(x, s) = \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(s)$, а потім застосується метод ітерованих ядер до виродженого ядра. У такому випадку маємо:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \int_s^x \sum_{i=1}^{m_1} \alpha_i(x) \beta_i(z) \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_{K_{n,j}}(z) \beta_{K_{n,j}}(z) dz = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(z) \int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz \end{aligned} \quad (7.69)$$

Враховуючи співвідношення

$$\int_s^x \beta_i(z) \alpha_{K_{n,j}}(z) dz = \int_s^x \gamma_{iK_{n,j}}(z) dz = \gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s), \quad (7.70)$$

рівняння (7.69) запишемо наступним чином:

$$\begin{aligned} K_{n+1}(x, s) &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \alpha_i(x) \beta_{K_{n,j}}(s) (\gamma_{iK_{n,j}}(x) - \gamma_{iK_{n,j}}(s)) = \\ &= \sum_{i=1}^{m_1} \sum_{j=1}^{m_2} \left[\alpha_i(x) \gamma_{iK_{n,j}}(x) \right] \beta_{K_{n,j}}(s) - \alpha_i(x) \left[\beta_{K_{n,j}}(s) \right] \gamma_{iK_{n,j}}(s). \end{aligned} \quad (7.71)$$

Отже, після проведених перетворень ітероване ядро приймає вигляд виродженого:

$$K_{n+1}(x, s) = \sum_{i=1}^{m_3} \alpha_{K_{n+1,i}}(x) \beta_{K_{n+1,i}}(s), \quad (7.72)$$

де $m_3 = 2m_1m_2$. Це свідчить про істотні витрати ресурсів пам'яті і процесорного часу на кожному кроці обчислення ітерованого ядра.

Другий спосіб. Будуємо резольвенту $R(x, s)$ за допомогою методу ітерованих ядер згідно з (7.63). Далі використовуємо метод апроксимації резольвенти у вигляді білінійного ряду (наприклад, ітераційно-варіаційним або градієнтним методом) і отримаємо резольвенту у вигляді $R(x, s) = \sum_{i=1}^m \alpha_{Ri}(x) \beta_{Ri}(s)$.

Оскільки при цьому безпосередньо отримуємо співвідношення $m \ll n$, то даний варіант ме-

тоту виродженої резольвенти буде ефективним щодо використання пам'яті та комп'ютерного часу.

Отримані висновки підтверджуються багатьма обчислювальними експериментами, в тому числі при розв'язуванні наступного прикладу.

Приклад 7.3. Інтегральне рівняння Вольтерри 2-го роду

$$y(x) - \int_0^x e^{-(x-s)} y(s) ds = e^x,$$

з точним розв'язком $y = 1$ у квадраті $[0, 0.1] \times [0, 0.1]$ (квадратури за формулами трапецій при постійному кроці $h = 0,005$) розв'язувалось із застосуванням наступних методів.

При розв'язуванні рівняння: методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом (резольвента визначається методом ітеративних ядер) потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер: знадобилося $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти (резольвента отримана методом ітеративних ядер (2-й спосіб)) знадобилося 5 ітеративних ядер і $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с. Графіки похибок використаних методів наведені на рис. 7.2. Результати розв'язування прикладу достатньо об'єктивно характеризують властивості методів, що застосовувались, в тому числі перевагу методів вироджених ядер і методу виродженої резольвенти [103].

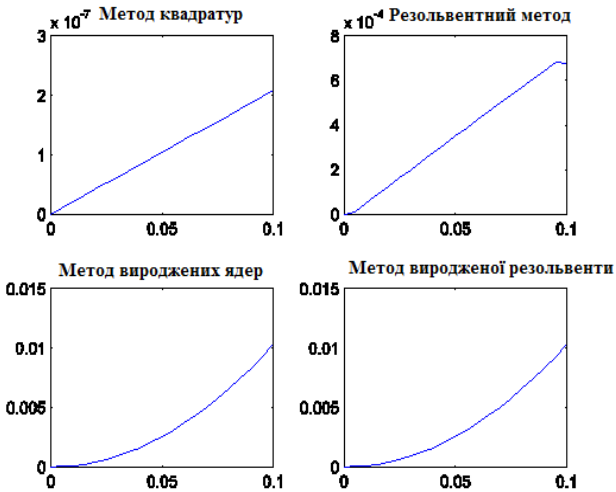


Рис. 7.2. Графіки похибок до прикладу 7.3

Суттєве практичне значення мають задачі моделювання з табличним поданням вихідних даних. Цей випадок розглянемо на наступному прикладі.

Приклад 7.4. Ядро $K(x, s)$ і права частина $f_T(x)$ рівняння

$$y(x) + \int_0^x K_T(x, s)y(s) = f_T(x)$$

подаються таблично відповідно до таблиць 7.1 і 7.2.

Розв'язки отримані: методом квадратур за $0,9353 \cdot 10^{-2}$ с, резольвентним методом (19 ітерованих ядер) за $0,7945 \cdot 10^{-2}$ с, методом вироджених ядер за $0,9924 \cdot 10^{-2}$ с, методом виродженої резольвенти $0,6399 \cdot 10^{-2}$.

Результати розв'язків рівняння наведені в таблиці 7.3, а похибки розв'язків представлені в таблиці 7.4.

Графіки апроксимуючих функцій для ядра наведені на рис. 7.3. Можна бачити, що у функціях $\alpha_3(x)$ і $\beta_3(x)$ проявляється кусково-лінійний вигляд. Графіки похибок, отриманих вказаними методами, наведені на рис. 7.4. Приклад ілюструє працездатність алгоритмів при табличному поданні вихідних даних.

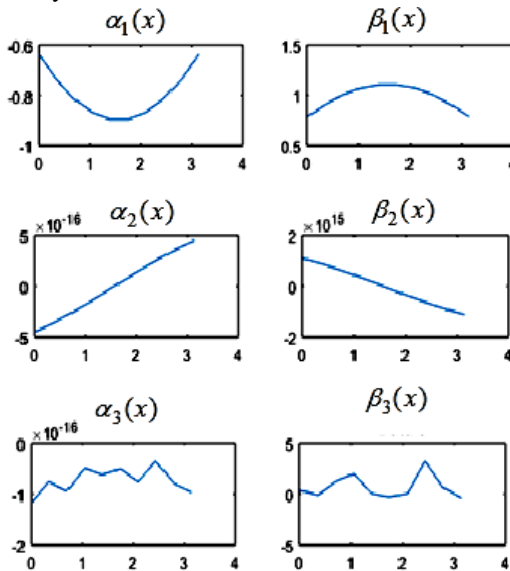


Рис. 7.3. Графіки апроксимуючих функцій

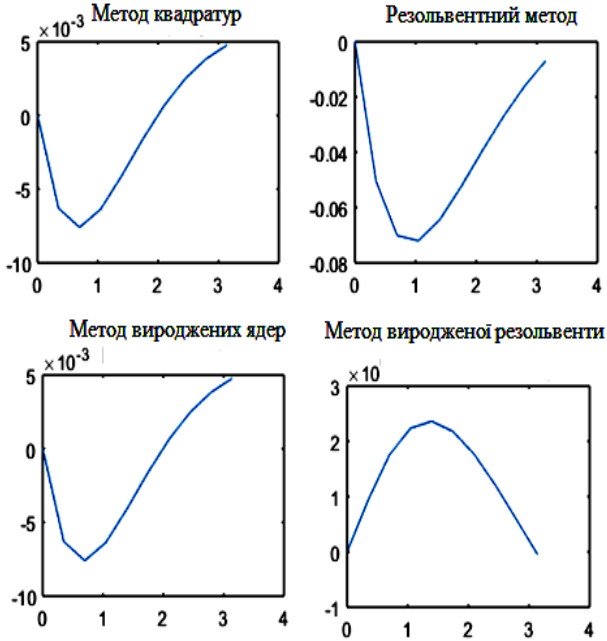


Рис. 7.4. Графіки отриманих похибок

Таблиця 7.3

Табличне подання ядра $K(x, s)$

$K(x,s)$	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
0,0000	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736	0,0000
0,3491	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420	-0,1736
0,6981	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000	-0,3420
1,0472	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428	-0,5000
1,3963	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660	-0,6428
1,7453	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660	-0,7660
2,0944	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397	-0,8660
2,4435	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848	-0,9397
2,7925	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000	-0,9848
3,1416	0,0000	-0,1736	-0,3420	-0,5000	-0,6428	-0,7660	-0,8660	-0,9397	-0,9848	-1,0000

Таблиця 7.4

Табличне подання правої частини $f_T(x)$

x	0,0000	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
$f(x)$	1,0000	0,7053	0,4975	0,3509	0,2475	0,1746	0,1231	0,0869	0,0613	0,0432

Таблиця 7.5

Отримані результати

х	0	0,3491	0,6981	1,0472	1,3963	1,7453	2,0944	2,4435	2,7925	3,1416
у точне	1	0,4605	0,15861	0,0054	-0,0578	-0,0691	-0,053	-0,0244	0,00746	0,03762
метод квад- ратур	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
резо- львен- тний метод	1	0,41001	0,08849	-0,0666	-0,1223	-0,1218	-0,0927	-0,0517	-0,0088	0,03061
метод виро- дже- них ядер	1	0,45419	0,15101	-0,001	-0,0619	-0,0708	-0,0524	-0,022	0,01129	0,04239
метод виро- дженої резо- львен- ти	1	0,46144	0,16036	0,00764	-0,0554	-0,067	-0,0512	-0,0232	0,00804	0,03758

Таблиця 7.6

Похибки розв'язків

метод квад- ратур	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
резо- львен- тний метод	0	-0,0505	-0,0701	-0,072	-0,0645	-0,0527	-0,0397	-0,0273	-0,0162	-0,007
метод виро- джених ядер	0	-0,0063	-0,0076	-0,0064	-0,0041	-0,0016	0,00063	0,00247	0,00383	0,00476
метод виро- дженої резо- львен- ти	0	0,00094	0,00175	0,00224	0,00236	0,00218	0,00177	0,00121	0,00058	-5E-05

Розглянута задача і методи адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних і інтегральних динамічних моделей показують, що обмежені ресурси комп'ютерно-інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії алгоритмів режимів функціонування обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації обчислювальних

методів розв'язування рівнянь динаміки об'єктів і велику історію розвитку цього питання. Процес вдосконалення обчислювальних методів не припиняється і зараз. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток неявних методів чисельного аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, коли можливий великий крок інтегрування вихідної системи або коли рівняння на кроці може бути розв'язане досить просто. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх застосування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно до квадратурних методів у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульоване так: потрібно визначити обчислювальний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія керуючої системи мінімальна, а похибка розв'язування рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведений аналіз властивостей різних груп обчислювальних методів дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При використанні стаціонарних режимів модельованих об'єктів у вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи — явні і типу «прогноз — корекція». При розв'язуванні інтегральних рівнянь запропонований, як найбільш ефективний, метод виродженої резольвенти. Порівняння з іншими методами показало, що при розв'язуванні тестової задачі на отримання результату методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер — $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти — 5 ітеративних ядер і $0,1659 \cdot 10^{-2}$ с.

8. ПРОГРАМНІ ЗАСОБИ РЕАЛІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ АЛГОРИТМІВ

8.1. Обґрунтування вибору середовища моделювання

При виборі програмних засобів моделювання слід враховувати не лише набір функціональних модулів, а також і підхід до організації процесів моделювання. Програмні засоби, до яких можна віднести пакет Matlab, його аналоги SciLab, VisSim, LabVIEW та ін., використовують поєднання різних способів реалізації математичних моделей, включаючи використання власної мови програмування високого рівня [178, 179]. Для вибору середовища моделювання визначимо основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, які забезпечують розв'язання широкого класу розрахункових задач, включаючи задачі динаміки для об'єктів, що представляються різними формами математичного опису; наявність засобів для реалізації структурного підходу при побудові моделей складних динамічних об'єктів; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; потужні графічні можливості відображення результатів [59, 60].

Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Приведемо короткі характеристики цих систем [110].

Система *Matlab* призначена для виконання інженерних та наукових розрахунків із високоякісною візуалізацією отриманих результатів. Ця система застосовується в математиці, обчислювальному експерименті, імітаційному моделюванні, для аналізу даних, наукової та інженерної графіки тощо [101]. Особливістю Matlab, у порівнянні зі звичайними мовами програмування, є матричне представлення даних і набір високоефективних матричних операцій. Також є можливість застосування технології візуального моделювання [169].

Ядро пакета включає програмні модулі, що написані мовою високого рівня та здатні реалізувати великий клас обчислювальних алгоритмів. Крім того у склад цього продукту входять проблемно-орієнтовані програмні комплекси (Toolbox), призначені для

розв'язування різних задач в конкретних прикладних областях. Наприклад, Symbolic Math Toolbox — пакет програм для розв'язування задач у символічному (аналітичному) вигляді, Partial Differential Equation Toolbox — пакет програм для розв'язування систем диференціальних рівнянь із частинними похідними методом скінченних елементів [114].

Для візуального моделювання віртуальних прототипів широко використовується вбудований додаток Simulink, який дозволяє моделювати динамічні системи, оцінювати їх роботу, модифікувати обчислювальні системи відповідно до принципів візуального програмування за допомогою стандартних блоків. Завдяки тісній інтеграції з Matlab, Simulink має безпосередній доступ до широкого набору засобів проектування та аналізу. При моделюванні користувач може вибирати метод розв'язування диференціальних рівнянь, а також спосіб зміни модельного часу (з фіксованим чи змінним кроком) [167]. Результати моделювання можуть бути представлені у вигляді графіків або таблиць.

Scilab — пакет наукових програм для числових обчислень, який є відкритим середовищем для інженерних і наукових розрахунків. Він містить сотні математичних функцій з можливістю додавання нових, написаних на різних мовах (C, C++, FORTRAN). Scilab має схожу з Matlab мову програмування, причому Scilab має утиліту, яка дозволяє конвертувати документи Matlab. До складу пакету також входить Scicos — інструмент для редагування і моделювання блокових діаграм (аналог Simulink в Matlab). Цей пакет має можливість перетворення форм моделей динамічних об'єктів, які задані або передатними функціями або рівняннями в просторі станів. На відміну від Matlab пакет Scilab розповсюджується безкоштовно.

За результатами аналізу і порівняння параметрів Matlab і Scilab було отримано такі результати: відповідно 69,58% і 42,54% від максимальної функціональності. Із результатів тестування можна зробити висновок, що на сьогоднішній день Matlab є найбільш потужними та універсальним пакетом, має кращу функціональність серед продуктів, які тестувалися. Він є безперечним лідером візуалізації даних, знаходиться в числі лідерів тестування швидкості обчислень і математичної функціональності, що грає вирішальну роль при створенні високопродуктивних додатків. При цьому забезпечується комп'ютерна реалізація моделей динамічних об'єктів у вигляді звичайних диференціальних рівнянь, передатних функцій, диференціальних рівнянь із частинними похідними, що дозволяє ефективно виконувати необхідні дослідницькі розрахунки згідно з отриманими в роботі результатами, а також розв'язувати практичні інженерні

задачі. Але для реалізації інтегральних динамічних моделей потрібен певний розвиток даного програмного забезпечення шляхом розширення спектру математичних моделей динамічних ланок складних об'єктів, в тому числі з розподіленими параметрами.

Відмітимо також наступні властивості засобів моделювання Matlab — Simulink, які значною мірою враховують особливості задач даного дослідження. Система Matlab орієнтована на роботу з реальними даними, виконує всі обчислення в арифметиці з плаваючою точкою на відміну від інших систем (Reduce, Macsyma, Derive, Maple, Mathematica, Theorist), де домінує цілочисельне представлення та символічна обробка даних. Кожен з цих напрямків характеризується властивими тільки йому методами і алгоритмами розв'язання задач, а їх перенесення з одного середовища в інше може бути принаймні незручним, а в більшості випадків просто неможливим. Тому для розв'язання проблем на перехресті символічних обчислень та обчислень з плаваючою точкою до складу інтегрованого середовища Matlab включений пакет прикладних програм Extended Symbolic Mathematics Toolbox, що реалізує інтерфейс з системою символічних обчислень Maple.

Розвиток цих засобів у вигляді (Matlab 7 і Simulink 6) — нової версії включає всі продукти з сімейств Matlab® і Simulink®, включаючи також 28 істотно оновлених продуктів і 12 нових продуктів.

SIMULINK — це платформа для емуляції і модельного проектування динамічних систем. Вона забезпечує інтерактивне графічне середовище і набір бібліотек блоків, які дозволяють з високою точністю проектувати, моделювати, реалізовувати і тестувати системи управління, обробки сигналів, зв'язку і т.п.

SIMULINK має наступні можливості:

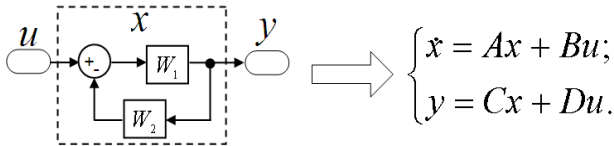
- Компонентне моделювання великих систем.
- Можливість сегментації моделі на декілька файлів, кожен з яких є окремою моделлю.
- Можливість моделювати, тестувати і реалізовувати кожен компонент окремо, ще до його вставки в загальну модель системи.
- Покращена інтеграція моделей з існуючими системами управління файлами і контролю версій.
- Інкрементальне завантаження моделей і генерація коду.
- Робочі простори моделей (Model Workspaces) забезпечують окремі області пам'яті для зберігання параметрів і змінних кожної моделі.
- Підтримка шин для завдання інтерфейсів, підтримка операцій над сигналами шини і опису шин як структури при генерації коду.
- Інтеграція Simulink і Stateflow.

- Уніфікований браузер моделей (Model Explorer) дозволяє переглядати, створювати, конфігурувати всі сигнали, параметри і властивості моделей.
- Підтримка створення і збереження конфігурацій параметрів моделювання і генерації коду.
- Можливість управління даними і їх візуалізацією.
- Можливості протоколювання даних і додавання контрольних точок без додавання блоків до моделі.
- Засіб Signal & Scope Manager дозволяє підключати до моделі джерела і приймачі сигналів без додавання блоків.
- Підтримка мови Matlab.
- Генерація С-коду і реалізація додатків на основі впроваджуваних Matlab-алгоритмів
- Функції для створення S-функцій у вигляді М-файлів.

В Matlab є можливість отримати еквівалентну динамічну модель в просторі станів, якщо вхідна модель задана в структурному вигляді в середовищі SIMULINK. Для цього використовується функція `linmod`. Синтаксис цієї функції має наступний вигляд:

$$[A, B, C, D] = \text{linmod}('name_sys');$$

де `name_sys` — ім'я файлу, в якому зберігається структурна модель, що змодельована в SIMULINK. Прикладом може бути перетворення структурної моделі типової системи управління зі зворотнім зв'язком, що побудована в середовищі SIMULINK. Тобто виконується перетворення виду:



де u — вхідний сигнал; W_1 — об'єкт управління; W_2 — елемент зворотного зв'язку; x — стан системи; y — сигнал системи на виході.

8.2. Блок програм для перетворення динамічних моделей

Структура системи інструментальних засобів для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів зображена на рис. 8.1.

Пакет складається з дванадцяти основних функцій (табл. 8.1), призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій (табл. 8.2).

У всіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задання вхідних даних, їх відповідність задачі, що розв'язується, а також забезпечення коректного завершення роботи програми у разі виникнення помилки під час розв'язання задачі. При цьому, з метою інформування користувача про причини виникнення помилки, а так само для забезпечення взаємодії з іншими програмами, у всі функції вводиться індикатор помилок — змінна *inperr* (перелік значень змінної наведено в табл. 8.3).

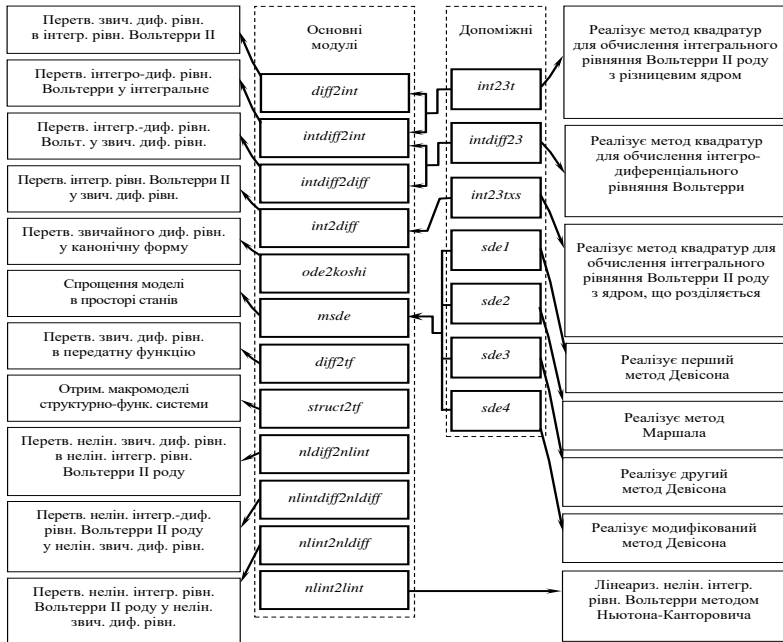


Рис. 8.1. Структура блоку програмних інструментальних засобів перетворення моделей (Model Transformation Toolbox)

Таблиця 8.1

Основні програмні модулі системи

Назва	Формат виклику	Опис параметрів	Призначення
Лінійні моделі			
<i>diff2int</i>	[<i>Kout</i> , <i>Fout</i> , <i>Ksol</i> , <i>Fsol</i>] = diff2int(<i>a</i> , <i>C</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; <i>C</i> — масив з початковими умовами; <i>f</i> — права частина диференціального рівняння; <i>Kout</i> , <i>Fout</i> — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння відносно старшої похідної; <i>Ksol</i> , <i>Fsol</i> — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння відносно невідомої функції вхідного рівняння	Отримання еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри II роду, відносно як старшої похідної так і самої функції, зі звичайного диференціального рівняння
<i>diff2tf</i>	[<i>tf</i>] = diff2tf (<i>a</i> , <i>C</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; <i>C</i> — масив з початковими умовами; <i>f</i> — права частина диференціального рівняння; <i>tf</i> — передатна функція	Отримання передатної функції зі звичайного диференціального рівняння
<i>ode2koshi</i>	[<i>sysdiff1</i>] = ode2koshi (<i>a</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, <i>f</i> — права частина звичайного диференціального рівняння <i>n</i> -го порядку	Отримання системи диференціальних рівнянь першого порядку у формі Коші зі звичайного диференціального рівняння <i>n</i> -го порядку
<i>int2diff</i>	[<i>diffeq</i>] = int2diff (<i>alpha</i> , <i>beta</i> , <i>f</i>)	<i>alpha</i> — функція зі змінною <i>x</i> , <i>beta</i> — функція зі змінною <i>s</i> , які є складовими ядра <i>K(x,s)</i> що розділяється; <i>f</i> — права частина інтегрального рівняння; <i>diffeq</i> — нормальна система диференціальних рівнянь	Отримання нормальної системи диференціальних рівнянь з інтегрального рівняння з ядром, що розділяється
<i>intdiff2int</i>	[<i>Kout</i> , <i>Fout</i>] = intdiff2int (<i>a</i> , <i>C</i> , <i>R</i> , <i>m</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої та при інтегральній частині рівняння; <i>C</i> — масив з початковими умовами; <i>R</i> — вільний доданок ядра; <i>m</i> — степінь ядра; <i>f</i> — права частина; <i>Kout</i> , <i>Fout</i> — ядро та права частина, відповідно, інтегрального рівняння	Отримання еквівалентного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з інтегродиференціального рівняння

Продовження таблиці 8.1

<i>intdiff2diff</i>	[<i>Dout</i>] = indiff2dyff (<i>a</i> , <i>K</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних; <i>K</i> — ядро лінійного інтегро-диференціального рівняння; <i>f</i> — права частина; <i>Dout</i> — звичайне диференціальне рівняння	Отримання звичайного диференціального рівняння з інтегродиференціального рівняння
<i>msde</i>	[<i>sysm</i>] = msde (<i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> , <i>D</i> , <i>m</i> , <i>method</i>)	<i>A</i> , <i>B</i> , <i>C</i> , <i>D</i> — матриці, що задають систему в просторі станів; <i>m</i> — степінь спрощеної системи; <i>method</i> — метод спрощення, цей параметр може набувати значень: ' <i>sde1</i> ', ' <i>sde3</i> ', ' <i>sde4</i> ', ' <i>sde2</i> ', що відповідають 1-му, 2-му та модиф. методам Девісона та методу Маршала відповідно; <i>sysm</i> — спрощена модель в просторі станів <i>m</i> -го порядку.	Отримання апроксимованої системи в просторі станів заданого порядку з можливим використанням шести методів
<i>struct2tf</i>	[<i>Bm</i> , <i>Am</i>] = struct2tf (<i>name_sys</i>)	<i>name_sys</i> — ім'я simulink-файлу в якому зберігається структурно-функціональна модель системи; <i>Bm</i> — чисельник, <i>Am</i> — знаменник передатної функції, що являється макромоделлю вхідної структурної моделі системи.	Отримання спрощеної макромоделі у вигляді однієї передатної функції з моделі системи, що задана складною структурно-функціональною формою
Нелінійні моделі			
<i>nldiff2nlint</i>	[<i>Kout</i> , <i>Fout</i> , <i>Ksol</i> , <i>Fsol</i>] = diff2int(<i>a</i> , <i>C</i> , <i>m</i> , <i>k</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних, крім старшої; <i>C</i> — масив з початковими умовами; <i>m</i> — степінь нелінійності невідомої функції або її похідної; <i>k</i> — номер похідної функції, яка є нелінійною; <i>f</i> — права частина диференціального рівняння; <i>Kout</i> , <i>Fout</i> — ядро та права частина, відповідно, нелінійного інтегрального рівняння відносно старшої похідної	Отримання еквівалентного нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду відносно старшої похідної зі звичайного диференціального рівняння
<i>nlintdiff2nldiff</i>	[<i>yout</i>] = indiff2dyff (<i>a</i> , <i>K</i> , <i>f</i>)	<i>a</i> — масив коефіцієнтів при функції та всіх її похідних; <i>K</i> — ядро нелінійного інтегро-диференціального рівняння; <i>f</i> — права частина; <i>Dout</i> — звичайне нелінійне диференціальне рівняння	Отримання нелінійного звичайного диференціального рівняння з нелінійного інтегродиференціального рівняння

Продовження таблиці 8.1

$nlint2nldiff$	$[diffeq] = \text{int2diff}(alpha, beta, f, m, 'type')$	$alpha$ — функція зі змінною x , $beta$ — функція зі змінною s , які є складовими ядра, що розділяється інтегрального рівняння Вольтерра II роду; m — степінь функції, що входить під знак інтегралу; f — права частина; $'type'$ — тип інтегрального рівняння, який дорівнює $'g'$ або $'u'$, що відповідає типу рівняння Гаммерштейна та Урисона відповідно; $diffeq$ — однорідне звичайне диференціальне рівняння	Отримання однорідного нелінійного диференціального рівняння з нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з оператором Гаммерштейна та Урисона.
$nlint2lint$	$[Kout, Fout] = nlint2lint(K, f, m, y0)$	K — ядро нелінійного інтегрального рівняння; m — степінь підінтегральної функції; f — його права частина; $y0$ — початкове наближення	Лінеаризація інтегрального рівняння Вольтерри II роду

Таблиця 8.2

Допоміжні програмні модулі системи

№	Назва	Застосування
1	$sde1$	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. Даний метод є швидким та досить точним, однак не завжди забезпечує збереження режимів в апроксимованій системі
2	$sde2$	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. На відміну від функції $sde1$, з використанням функції $sde2$ забезпечується збереження режимів в апроксимованій системі
3	$sde3$	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем, що мають скалярне або векторне керування з покращенням стаціонарних характеристик апроксимованої моделі
4	$sde4$	Реалізує метод виділення домінантних власних значень, який призначений для спрощення моделей систем. Даний метод ефективно використовувати при ступінчатих збуреннях на систему, оскільки стаціонарні значення реакцій співпадають як для складної так і апроксимованої моделей
5	$int23t$	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегрального рівняння Вольтерра II роду з різницеvim ядром
6	$int23xs$	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегрального рівняння Вольтерра II роду з ядром, що розділяється
7	$intdiff23$	Реалізує метод квадратур для обчислення інтегродиференціального рівняння

Таблиця 8.3

Список індикаторів помилок пакету *Model Transformation Toolbox*

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	немає помилок
1	невірне число вхідних аргументів
2	занадто багато вихідних аргументів
3	невірне число аргументів в параметрі, що задає праву частину рівняння
4	невірне число аргументів в параметрі, що задає ядро рівняння
5	розмірність масиву початкових умов не відповідає порядку задачі, що розв'язується
6	аргументи, що задають імена функцій не рядкові константи

8.3. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами

Комплекс програм для реалізації методів, які досліджувались у роботі, складається із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Він включає три основні модулі (рис. 8.2), які виконують структурне спрощення базових моделей об'єктів із розподіленими параметрами, представлених у різних формах, та чисельно реалізують їх: MoSP — спрощення математичної моделі об'єкта, представленого у формі диференціального рівняння із частинними похідними до задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь (Simpl_SupPo_Plate — одновимірної теплової задачі для необмеженої пластинки, Simpl_SupPo_Cyl — одновимірної теплової задачі для необмеженого порожнистого циліндра, Simpl_SupPo_Rod — двовимірної теплової задачі для необмеженого прямокутного стержня, Simpl_SupPo_Cyl_Fin — двовимірної теплової задачі для обмеженого порожнистого циліндра, Simpl_SupPo_Rod_Fin — тривимірної теплової задачі для обмеженого прямокутного бруса); MoIT — модуль інтегральних перетворень та реалізації інтегральних операторів (Simpl_Int_Transform_FB — застосування інтегрального перетворення зі скінченними межами, Kern_Comp_Exp — побудова ядра інтегрального оператора Вольтерри на основі експериментальних даних, Volt_Or — подання моделі у вигляді інтегрального оператора Вольтерри, Volt_Degen — чисельна реалізація інтегрального опе-

ратора Вольтерри із використанням особливості ядер, що розділяються); модуль MoCF — спрощення математичної моделі об'єкта із розподіленими параметрами, заданої у формі передатної функції високого порядку, трансцендентного або ірраціонального вигляду до дробово-раціональної передатної функції (App_ContFr — ланцюгово-дробова апроксимація, Irr_Trans_CF — ірраціональні або трансцендентні передатні функції, Reduct_TF_CF — пониження степеня передатної функції). Основні характеристики підпрограм комплексу наведені у таблиці 8.4.

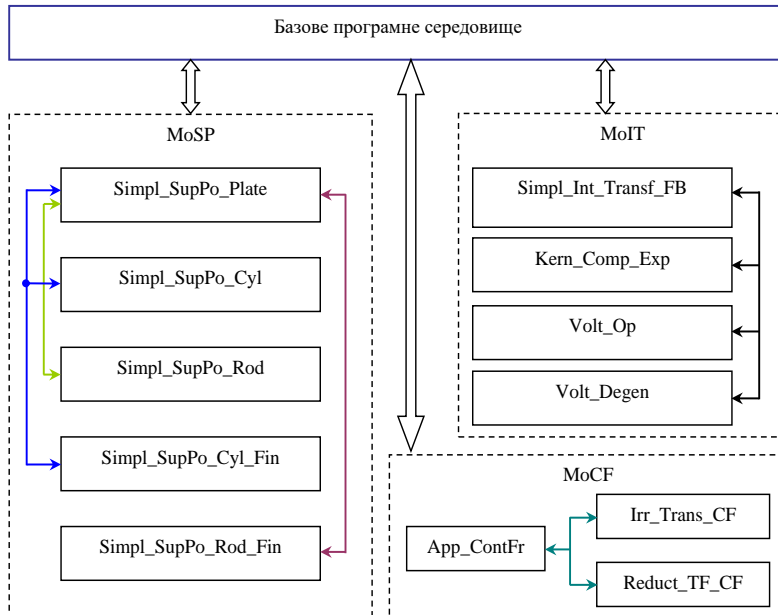


Рис. 8.2. Структура комплексу програм

Таблиця 8.4

Основні характеристики функцій комплексу програм

Найменування	Формат виклику функції	Призначення	Метод, який реалізується
Simpl_SupPo_Plate	[x,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Plate (x,t,alpha,beta, Fgr_l, Fgr_r, Pu0,Pu05)	Розв'язування одновимірного параболічного рівняння із симетричними та несиметричними граничними умовами I-III роду, заданого у декартовій системі координат	Метод опорних перерізів

Продовження таблиці 8.4

Simpl_Su pPo_Cyl	[r,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Cyl (r, t, alpha, beta, Fgr_l, Fgr_r, Pu0, Pu05)	Розв'язування одновимірного параболічного рівняння із симетричними та несиметричними граничними умовами I-III роду, заданого у циліндричній системі координат	Метод опорних перерізів
Simpl_Su pPo_Rod	[x,y,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Rod (x, y, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування двовимірної задачі теплопровідності у декартовій системі координат	Метод опорних перерізів, поширений на
Simpl_Su pPo_Cyl Fin	[x,r,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Cyl Fin (x, r, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування двовимірної задачі теплопровідності у циліндричній системі координат	обмежені та напівобмежені просторові об'єкти
Simpl_Su pPo_Rod _Fin	[x,y,z,t,T,ier]= Simpl_SupPo_Rod Fin (x, y, z, t, alpha, beta, Fgr, Pu)	Розв'язування тривимірної задачі теплопровідності у декартовій системі координат	
Simpl_Int _Transf_ FB	[x,t,T,ier]= Simpl_Int_Transf_F B (x,t,alpha,beta, Fgr, Pu)	Розв'язування одновимірного параболічного рівняння, заданого у декартовій системі координат	Метод інтегральних перетворень зі скінченими межами
Volt	[x,y,ier]= volt(x, K, f, method)	Реалізація інтегрального оператора Вольтерри із можливістю вибору квадратурних формул різного ступеня точності	Метод квадратур
Volt_deg en	[x,y,ier]= volt_degen (x, alfa, beta,f,method)	Реалізація лінійного інтегрального оператора Вольтерри з виродженим ядром	Метод квадратур на основі ядер, що розділяються
Irr_Trans _CF	[num,den,ier]= Irr_Trans_CF ('func',st,m)	Побудова апроксимаційної моделі передатної функції	Ланцюгово-дробова апроксимація
Reduct_T F_CF	[num_a,den_a,ier] = Reduct_TF_CF (num,den,st)	Пониження степені передатної функції	

Слід зазначити, що моделюючий програмний комплекс представляє для багатьох задач альтернативу існуючому розширенню Partial Differential Equation Toolbox, спрощуючи математичну модель та здійснюючи завдяки цьому ефективнішу числову реалізацію.

Побудова модулів програмного комплексу. Для забезпечення сумісності інтерфейсів підпрограм визначимо перелік вхідних аргументів та їх характеристики (таблиця 8.5). У модулях реалізовано метод опису початкових і граничних умов у вигляді анонімних функцій аргументів x (або r для циліндричної системи координат) та t відповідно. Анонімна функція аргументу x записується в такому вигляді: $@(x) F(x)$, де $F(x)$ — аналітична функція однієї змінної.

Таблиця 8.5

Опис і характеристики основних вхідних аргументів підпрограм

Позначення	Тип	Опис	Значення за замовчуванням
x	Вектор-рядок	Сітка вузлів першої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	[0:0.1:1]
y		Сітка вузлів другої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	
z		Сітка вузлів третьої просторової координати, на якій шукається розв'язок рівняння	
r		Сітка вузлів просторової координати об'єкта циліндричної форми, на якій шукається розв'язок рівняння	
t		Сітка вузлів часового проміжку	
$alpha$	Число	Перший коефіцієнт задання граничних умов	—
$beta$		Другий коефіцієнт задання граничних умов	—
Fgr	Функція аргументу t	Значення граничної умови	—
Fgr_l		Значення граничної умови ліворуч одновимірного об'єкта	—
Fgr_r		Значення граничної умови праворуч одновимірного об'єкта	—
Pu	Число	Початкова умова обмежених та напівобмежених просторових об'єктів	0
$Pu0$	Функція аргументу x	Початкова умова одновимірного об'єкта, обчислена у точці 0	—
$Pu05$	Функція аргументу x	Початкова умова одновимірного об'єкта, обчислена у точці 0,5	—

Наприклад, початкову умову

$$F_{ПУ}(r) = a_0 + a_1 r - a_2 r^2$$

для необмеженого порожнистого циліндра можна описати у такий спосіб:

$$F_p=@(r) A0+A1.*r-A2.*r.^2;$$

а граничні умови першого роду

$$F_{zp1}^{-}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 R_1 - a_2 R_1^2) e^{-b_2 t},$$

$$F_{zp1}^{+}(t) = 1 - e^{-b_1 t} + (a_0 + a_1 R_2 - a_2 R_2^2) e^{-b_2 t}$$

на внутрішній та зовнішній стінках порожнистого циліндра відповідно —

$$\text{Fgr1_m} = @ (t) 1 - \exp(-B1.*t) + (A0 + A1 * R1 - A2 * R1^2) \dots \\ \dots * \exp(-B2.*t);$$

$$\text{Fgr1_p} = @ (t) 1 - \exp(-B1.*t) + (A0 + A1 * R2 - A2 * R2^2) \dots \\ \dots * \exp(-B2.*t);$$

Для розрахунку температурного поля порожнистого циліндра методика використання розробленого комплексу програм має вигляд:

- 1) формується масив вузлів безрозмірної просторової координати. Для цього задається крок і присвоюється значення відповідній змінній-вектору:

$$h = 0.01; r = -1:h:1;$$

- 2) формується анонімна функція, яка виражає значення $r1$ просторової координати через значення безрозмірної просторової координати — аргумент цієї функції rr :

$$r1 = @(rr) 0.5 * (rr * (R2 - R1) + R1 + R2);$$

- 3) формується анонімна функція, за допомогою якої обчислюються значення початкової умови

$$F_p = @(rr1) A0 + A1 * r1(rr1) - A2 * r1(rr1).^2;$$

- 4) формуються дві анонімні функції, які описують граничні умови першого роду на внутрішній та зовнішній стінках порожнистого циліндра відповідно

$$\text{Fgr1_m} = @ (tt) 1 - \exp(-B1.*tt) + (A0 + A1 * R1 - A2 * R1^2) \dots \\ \dots * \exp(-B2.*tt);$$

$$\text{Fgr1_p} = @ (tt) 1 - \exp(-B1.*tt) + (A0 + A1 * R2 - A2 * R2^2) \dots \\ \dots * \exp(-B2.*tt);$$

- 5) створюється зовнішня функція `Temper` для обчислення правої частини системи звичайних диференціальних рівнянь

$$\text{function } f = \text{Temper}(ft, fy)$$

$$\text{global } ar0 \ ar05 \ br05 \ z0 \ z12 \ B2;$$

$$f = [-10.*ar0.*fy(1) + 32./3.*ar0.*fy(2) + z0.*\exp(-B2.*ft);$$

$$(2.*ar05 - 3.*br05).*fy(1) + (8.*br05 - 16.*ar05).*fy(2) \dots$$

$$./3 + z12.*\exp(-B2.*ft)];$$

- 6) задається масив початкових умов системи диференціальних рівнянь

$$Y0 = [T00; T012];$$

- 7) розв'язується система диференціальних рівнянь за допомогою стандартних засобів
 $[T, Y] = \text{ode23t}(@\text{Temper}, t, Y0);$
- 8) задається двовимірна сітка
 $[R, T1] = \text{meshgrid}(r, t);$
- 9) поширюється розв'язок системи рівнянь на двовимірну сітку
 $Ym1 = \text{repmat}(Y(:, 1), 1, \text{length}(r));$
 $Ym2 = \text{repmat}(Y(:, 2), 1, \text{length}(r));$
- 10) формується наближений розв'язок за інтерполяційним методом опорних точок
 $T3d_per = (4 * R.^4 - 5 * R.^2 + 1) * Ym1 + 16./3 * R.^2 * (1 - R.^2) * Ym2 + U(R, T1).$

Серед особливостей реалізації модуля MoSP є застосування методу алгоритмізації процесу спрощення моделей з використанням символьних обчислень. Суть методу полягає в тому, що всі апроксимаційні та еквівалентні перетворення, передбачені методом опорних перерізів, виконується програмним модулем, а саме здійснюються:

- 1) оголошення символьних змінних:
 $\text{syms } x \ t \ Ti \ T \ ax \ bx \ qx \ ft \ Fgr1 \ Fgr2 \ \text{real};$
- 2) задання опорних точок (як приклад, рівновіддалених вузлів інтерполювання за просторовою координатою):
 $x0 = \text{sym}(-1); \ x2 = \text{sym}(1); \ xn = \text{sym}(x0:0.5:x2);$
- 3) формування масиву невідомих значень розв'язку в опорних точках:
 $Ti = \text{cellstr}(\text{strcat}(\text{sym}(T), \text{int2str}((0:\text{length}(xn)-2))))$
- 4) задання базисної функції
 $\text{bazfun} = x;$
- 5) формування масиву елементів інтерполяційного многочлена Лагранжа за опорними точками:
 $T = \text{prod}([\text{T}(\text{bazfun} - \text{subs}(\text{bazfun}, 'x', xn))]) ./ (\text{bazfun} - \dots$
 $\text{subs}(\text{bazfun}, 'x', xn));$
 $T = \text{collect}(T ./ \text{diag}(\text{subs}(T, 'x', xn))', 'x');$
- 6) апроксимація частинних похідних за просторовою змінною вихідного рівняння шляхом аналітичного диференціювання:
 $dT = \text{diff}(T, 'x', 1); \ d2T = \text{diff}(T, 'x', 2);$
- 7) формування системи звичайних диференціальних рівнянь:
 $P = [\text{collect}(d2T .* ax + dT .* bx) \ qx .* ft];$
 $\text{Systema} = \text{simplify}(\text{subs}(P, 'x', xn)) * [Fgr1; Ti(2:end)]; \dots$
 $Fgr2; 1];$
- 8) аналітичне розв'язування сформованої системи
 $Ts = \text{dsolve}(\text{char}(s), \text{char}(PU_s));$

де s , PU_s — символні рядки із аналітичним записом системи та початкових умов відповідно;

9) формування аналітичного виразу для наближеного розв’язку вихідної задачі

$Txt = \text{simplify}(T * [Fgr1; Ts.T1; Ts.T2; Ts.T3; Fgr2]);$

10) створення функції для чисельної реалізації отриманого аналітичного розв’язку:

$Txt_mot_F = \text{matlabFunction}(Txt),$

що дає змогу в результаті отримати аналітичний вираз наближеного розв’язку задачі теплопровідності.

Результати обчислювальних експериментів, у яких порівнювалися затрати на розв’язання задачі час методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широковживаним методом скінченних різниць та функцією *pdepe* ядра пакету моделювання Matlab, наведені на (рис. 8.3).

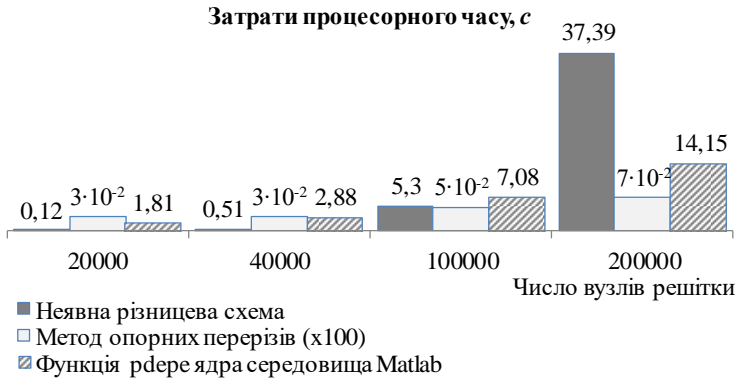


Рис. 8.3. Дослідження ефективності методу опорних перерізів

Для модуля Volt_Or особливістю реалізації оператора Вольтерри

$$y(t) = \int_0^t K(t - \tau)x(\tau) d\tau \quad (8.1)$$

є спосіб обчислення квадратурних сум без застосування циклічних операцій підсумовування для квадратурної формули на кожному кроці. Обчислення проводяться лише за допомогою матричних операцій одразу над цілими векторами сформованих коефіцієнтів квадратурної формули. Наприклад, в ході обчислювальних експериментів значення інтеграла в (8.1) в точці t_i замінюється квадратурною сумою лівих прямокутників (для випадку рівномірної та однакової сітки вузлів для змінних t і τ із кроком $h = \Delta\tau = \Delta t = t_{j+1} - t_j, t_j = \tau_j$)

$$y(t_i) = \int_0^{t_i} K(t_i - \tau)x(\tau) d\tau \approx h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j)x(t_j) = h \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j})x(t_j),$$

або

$$y_i = y(t_i) = h \left\langle \overline{K_{i-j}}, \overline{x_j} \right\rangle, j = 0, i-1,$$

де $\langle \cdot \rangle$ — скалярний добуток векторів, $\overline{K_{i-j}}$, $\overline{x_j}$ — вектори-рядки.

У випадку вхідного впливу $x(t) \equiv x = const$ i -тий елемент вектора-розв'язку визначається виразом

$$y_i = y(t_i) = x \int_0^{t_i} K(t_i - \tau) d\tau \approx hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_i - t_j) = hx \sum_{j=0}^{i-1} K(t_{i-j}) = hx \sum_{j=1}^i K(t_j).$$

Тоді вектор шуканого розв'язку $\overline{y_n}$ має вигляд

$$\begin{aligned} \overline{y_n} &= (y_0 \quad y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_n) \approx \\ &\approx hx \left(\sum_{j=1}^0 K(t_j) \quad \sum_{j=1}^1 K(t_j) \quad \sum_{j=1}^2 K(t_j) \quad \cdots \quad \sum_{j=1}^n K(t_j) \right). \end{aligned}$$

В середовищі Matlab шуканий вектор формується за допомогою оператора суми з накопиченням

$$y=[0 \ h*x*cumsum(K(2:end))];$$

де y — вектор шуканого розв'язку; h — крок Δt ; x — вхідний вплив; K — вектор значень ядра інтегрального оператора $K(t_i)$, $cumsum()$ — функція знаходження суми з накопиченням елементів вектора-аргументу.

Для дослідження ефективності запропонованого векторно-матричного способу числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри проведено ряд обчислювальних експериментів, в яких визначалась реакція лінійного динамічного об'єкта на вхідний вплив у вигляді одиничного стрибка. Розв'язок знаходився як результат матричних операцій одразу над цілими векторами вхідного впливу та ядра. При цьому фіксувався час, затрачений на знаходження розв'язку запропонованим способом і традиційним із використанням оператора циклу. Результати показали, що при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^4$ час обрахунку запропонованим методом та традиційним склав 0.000534 с та 0.011408 с відповідно; при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^6$ час обрахунку склав 0.055267 с та 1.025395 с, а при кількості вузлів $\approx 2 \cdot 10^7$ — 0.500963 с та 10.153589 с відповідно, що становить майже 20-ти разове зменшення витрат процесорного часу. Отже,

запропонований прийом числової реалізації інтегрального оператора Вольтерри із виродженим ядром виявився ефективніший у порівнянні із традиційним обчисленням квадратур із застосуванням оператора циклу.

З метою визначення якісної характеристики засобів числової реалізації різних форм математичного опису моделі ОРП було проведено низку обчислювальних експериментів. Моделювався процес розповсюдження крутильних коливань довгого пружного валу, базовий математичний опис якого поданий у формі рівняння з частинними похідними гіперболічного типу з вільним кінцем і нульовими початковими умовами та граничними умовами другого роду при подачі на вхід одиничного східчастого впливу. Розв'язок (кут повороту вільного кінця валу) знаходився на сітці із кроком $2 \cdot 10^{-4}$ часової змінної $t \in [0,1]$ (та 0.0251 для просторової змінної у випадку використання скінченно-різницевого обчислювача). При цьому фіксувався затрачений на знаходження розв'язку відповідним способом час (табл. 8.6).

За результатами проведених експериментів можна зробити висновки, що найменше часу для розв'язання потребує векторно-матричний спосіб реалізації квадратур для математичного опису у вигляді інтегрального оператора Вольтерри. Але його можна застосувати лише у випадку виродженого ядра.

Таблиця 8.6

Якісні характеристики числової реалізації різних форм моделі довгого пружного валу

Математичний опис	Рівняння з частинними похідними	Оператор Вольтерри з ядром типу згортки	Дробово-раціональна передатна функція	Оператор Вольтерри із ядром типу згортки	Оператор Вольтерри з виродженим ядром
Засіб числової реалізації	Скінченно-різницевий обчислювач	Структурна simulink-модель	Simulink-блок Transfer Function	M-file (реалізація квадратур з використанням оператора циклу <i>for</i>)	M-file (векторно-матричний алгоритм обчислення квадратур)
Час розрахунку, с	9,0196	46,241	0,943	0,0264	0,00148

В усіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задання вхідних даних, їх відповідність до задачі, що

розв'язується, а також, в разі помилки, забезпечується інформування користувача про причини виникнення помилки та коректне завершення роботи програми. Для цього у всі функції вводиться індикатор помилок — змінна *ier*, яка може приймати значення представлені в таблиці 8.7.

Опис основних модулів комплексу. Модуль MoSP реалізує спрощення математичної моделі об'єкта, представленого у формі диференціального рівняння із частинними похідними до задачі Коші для систем звичайних диференціальних рівнянь. Коефіцієнти диференціального рівняння з частинними похідними задаються у символьному вигляді. Результуюча система звичайних диференціальних рівнянь представляється також у символьному вигляді і доступна для подальшої чисельної реалізації вбудованими або спеціальними засобами. Модуль містить наступні функції: *Simpl_SupPo_Plate* — спрощення одновимірної теплової задачі для необмеженої пластинки із симетричними і несиметричними граничними умовами I-III роду, заданої у декартовій системі координат, до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь; *Simpl_SupPo_Cyl* — спрощення одновимірної теплової задачі для необмеженого порожнистого циліндра до задачі Коші для системи звичайних диференціальних рівнянь; *Simpl_SupPo_Rod* — спрощення двовимірної теплової задачі для необмеженого прямокутного стержня до добутку розв'язків двох одновимірних задач для необмежених пластинок, які своїм взаємним перерізом утворюють стержень; *Simpl_SupPo_Cyl_Fin* — спрощення двовимірної теплової задачі для обмеженого порожнистого циліндра до добутку розв'язків двох одновимірних задач для необмеженої пластинки та необмеженого порожнистого циліндра, які своїм взаємним перерізом утворюють об'єкт; *Simpl_SupPo_Rod_Fin* — спрощення двовимірної теплової задачі для обмеженого прямокутного бруса до добутку розв'язків трьох одновимірних задач для необмежених пластинок, які своїм взаємним перерізом утворюють брус.

Таблиця 8.7

Значення індикатора помилок

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	Немає помилок
1	Невірне число вхідних аргументів
2	Дуже багато вихідних аргументів
3	Невірною заданий відрізок, на якому шукається розв'язок
4	Недостатньо пам'яті

Модуль MoIT здійснює реалізацію інтегральних перетворень вихідної моделі, представленої диференціальним рівнянням із частинними похідними, до простішої задачі у зображеннях, побудову ядра інтегрального оператора Вольтерри за допомогою обчислювального експерименту та реалізацію інтегральних операторів. Він включає наступні функції: `Simpl_Int_Transform_FB` — спрощення до задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь моделі динамічного об'єкта із розподіленими параметрами шляхом застосування інтегрального перетворення зі скінченними межами за просторовими змінними та зворотного перетворення в простір оригіналів; `Kern_Comp_Exp` — побудова ядра інтегрального оператора Вольтерри на основі експериментальних даних із використанням зв'язку між перехідною характеристикою та імпульсною перехідною функцією об'єкта (реалізація за допомогою підпрограми `Volt_Op`); `Volt_Op` — подання моделі динамічного об'єкта із розподіленими параметрами у вигляді інтегрального оператора Вольтерри у випадку, коли відома імпульсна перехідна функція та її чисельна реалізація за допомогою квадратурних формул різного ступеня точності; `Volt_Degen` — чисельна реалізація інтегрального оператора Вольтерри за допомогою квадратурних формул із використанням особливості ядер, що розділяються.

Модуль MoCF представляє інструменти для спрощення математичної моделі об'єкта із розподіленими параметрами, заданої у формі передатної функції високого порядку, трансцендентного або ірраціонального виду до дробово-раціональної передатної функції. Вказані можливості реалізують такі функції: `App_ContFr` — призначена для побудови ланцюгово-дробової апроксимаційної моделі у вигляді дробово-раціональної передатної функції різними методами (1 — аналог формули Тейлора в теорії ланцюгових дробів; 2 — алгоритм побудови правильних C -дробів; 3 — QD-алгоритм побудови правильних C -дробів; 4 — алгоритм побудови g -дробів; 5 — алгоритм побудови приєднаних ланцюгових дробів); `Int_Trans_CF` — спрощення опису динамічного об'єкта із розподіленими параметрами, заданого у вигляді ірраціональних або трансцендентних передатних функцій до дробово-раціональної передатної функції шляхом ланцюгово-дробової апроксимації; `Reduct_TF_CF` — пониження степені передатної функції.

З метою дослідження ефективності програмного комплексу було проведено ряд обчислювальних експериментів з числової реалізації математичних моделей методом опорних перерізів у порівнянні з традиційним широкоживим методом скінченних різниць. Для цього розв'язувалась задача моделювання нестационарного теплового процесу у необмеженій пластинці, для якої відомий аналітичний розв'язок.

Результати тестування дозволяють зробити висновок про те, що розроблене програмне забезпечення повністю відповідає вимогам, що пред'являються до сучасних комплексів прикладних програм для комп'ютерного моделювання та може слугувати альтернативою або доповнювати існуючі засоби комп'ютерного моделювання, володіючи при цьому ефективнішою числовою реалізацією.

8.4. Програми для реалізації динамічних макромоделей

Відповідно до досвіду, що склався, систему комп'ютерного моделювання для розв'язання задач, що розглядаються в роботі, доцільно організувати у вигляді комплексу прикладних програм, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації розглянутих видів макромоделей. Структура комплексу програм на рис. 8.4, а в табл. 8.8 представлені дані про його основні модулі.

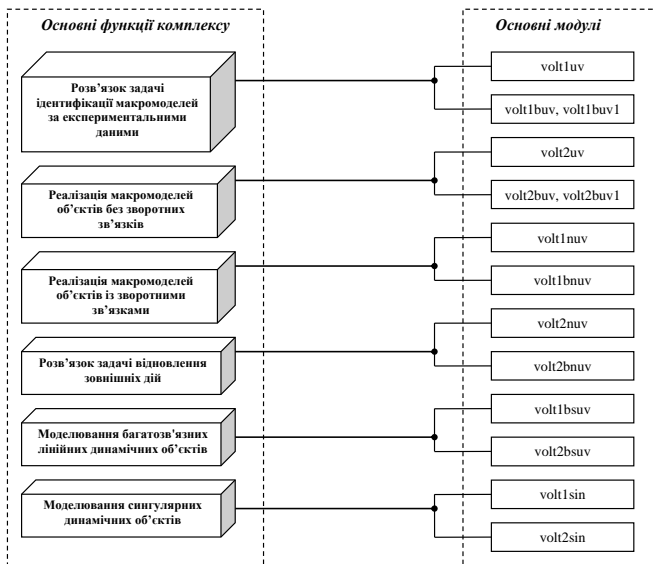


Рис. 8.4. Структура комплексу програм

Основні модулі комплексу програм

Найменування	Формат виклику функції	М-файли з вихідними даними	Призначення	Метод, що реалізується
<i>volt1uv</i>	[x,y,ier]= volt1uv(x)	fprav, kern11	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри I роду з ядром довільного виду	Метод квадратур на основі традиційного підходу
<i>volt2uv</i>	[x,y,ier]= volt2uv(x)	fprav2, kern22	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з ядром довільного виду	
<i>lt1nuv</i>	[x,y,ier]= volt1nuv(x)	fprav5, kern10, koefa1, koefc12	Ідентифікація макромоделі за експериментальними даними	Інтерполяційний метод ідентифікації
<i>volt2nuv</i>	[x,y,ier]= volt2nuv(x)	fprav4, kern8, koefa2, koefb, koefc2	Числова реалізація лінійного інтегрального оператора з довільним ядром	Квадратурний метод
<i>volt1buv</i>	[x,y,ier]= volt1buv(x)	fprav1, kern6, kern7 kern5	Числова реалізація лінійного інтегрального оператора з роздільним ядром	Квадратурний метод на основі роздільності ядер
<i>volt1buv1</i>	[x,y,ier]= volt1buv1(x)	fprav, kern1, kern2 kern12	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з ядром довільного виду	Рекурентні алгоритми метода квадратур
<i>volt2buv</i>	[x,y,ier]= volt2buv(x)	fprav2, kern13, kern14, kern15	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з виродженим ядром	
<i>volt2buv1</i>	[x,y,ier]= volt2buv1(x)	fprav6, kern111, kern101, kern21	Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду	
<i>volt1bnuv</i>	[x,y,ier]= volt1bnuv(x)	fprav5, kern61, kern71, kern9, koefa3, koefc11	Розв'язок лінійного інтегрального рівняння Вольтерри I роду з ядром довільного виду	Рекурентні алгоритми метода квадратур з «природною» регуляризцією

Продовження таблиці 8.8

<i>volt2bnuv</i>	[x,y,ier]= volt2bnuv(x)	fprav4, kern62, kern72, kern91, koefa, koefb koefc	Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри II роду з виродженим ядром	
<i>volt1bsuv</i>	[x,y,ier]= volt1bsuv(x, N)	fprav3, kern16, kern17, kernm	Розв'язок нелінійного інтегрального рівняння Вольтерри I роду	Метод квадратур з «внутрішньою» регуляризацією
<i>volt2bsuv</i>	[x,y,ier]= volt2bsuv(x, N)	fprav10, kern3, kern4, kernm1	Розв'язок сингулярного інтегрального рівняння Вольтерри I роду	

Основним входним параметром, що передається при виклику функцій x — масив виду $x = [x_0 : h : x_n]$, який задає відрізок, на якому шукається розв'язок, де h — крок інтегрування.

При формуванні ядер і правих частин рівнянь можливе використання двох підходів:

1. Задавання ядер і правих частин у вигляді масивів, в даному випадку затрати машинного часу не великі.
2. Оформлення ядер і правих частин у вигляді функцій в окремих *m*-файлах, що збільшує затрати машинного часу, але економить пам'ять.

Для підвищення ефективності комплексу в ньому використовують обидва підходи.

З врахуванням вищевикладеного, методика розроблених програм полягає в наступному.

1. Формується функція, що задає ядро, яка повинна мати наступний заголовок при розв'язанні традиційним методом:

$$\text{function } k = \text{kern11}(x, i, j),$$

де k — повертає значення ядра $K(x_i, x_j)$; x — вузли інтегрування; i, j — незалежні змінні.

У випадку розділяючого ядра формуються 3 функції:

$$\text{function } k = \text{kern1}(x, i, j),$$

де k — повертає значення $\alpha_i(x)$; x — вузли інтегрування; i — незалежна змінна;

$$\text{function } k=\text{kern2}(x,i,j),$$

де k — повертає значення $\beta_l(s_j)$; x — вузли інтегрування; j — незалежна змінна;

$$\text{function } k=\text{kern12}(x,i,j),$$

де k — повертає значення суми $\sum_{l=1}^m \alpha_l(x_i)\beta_l(x_i)$; x — вузли інтегрування; i — незалежна змінна.

Окрім вищевказаних функцій при розв'язку системи лінійних рівнянь задається функція, яка вміщує матрицю необхідних коефіцієнтів.

При розв'язанні нелінійного рівняння можна модифікувати допоміжні функції для обчислення параметрів нелінійності.

2. Формується функція, що задає праву частину, яка повинна мати наступний заголовок:

$$\text{function } f=fprav(x),$$

де f — вихідний масив, який вміщує значення правої частини для відповідного рівняння $f(x_i)$; x — вузли інтегрування.

3. Викликається основний модуль комплексу програм з потрібними вхідними параметрами.

Всі основні модулі в якості результату повертають масив розв'язків y , масив x , які містять сітку вузлів, на яких знайдено розв'язок, і значення індикатора помилок ier .

Відповідно до вимог, що пред'являються до пакетів прикладних програм комп'ютерного моделювання, у всіх розроблених функціях здійснюється перевірка правильності задавання вхідних даних, їх відповідність до задачі, що розв'язується, а також забезпечується коректне завершення роботи програми в разі виникнення помилки в ході розв'язку. При цьому, з метою інформування користувача про причини виникнення помилки, а також для забезпечення взаємодії з іншими програмами, у всі функції вводиться індикатор помилок — змінна ier , яка може приймати значення представлені в табл. 8.9.

Таблиця 8.9

Значення індикатора помилок

Значення індикатора помилки	Причина виникнення помилки
0	немає помилок
1	невірне число вхідних аргументів
2	дуже багато вхідних аргументів
3	невірно заданий відрізок, на якому шукається розв'язок
4	дискримінант рівняння менше або дорівнює нулю

Характеристики комплексу. Для оцінки якості розробленого комплексу програм скористаємося номенклатурою показників якості, яка містить шість чинників, що характеризують споживчі властивості програмного забезпечення: надійність, ефективність, зручність застосування, коректність, супроводжуваність, гнучкість.

Здійснимо оцінку двох основних показників якості — надійності і ефективності на ряді модельних прикладів, що охоплюють всі можливі типи задач, для розв'язання яких призначена розроблена система моделювання.

Під надійністю розуміється здатність програмного забезпечення успішно розв'язувати задачі, на які воно розраховане. Даний чинник характеризується такими критеріями як стійкість функціонування, достовірність, працездатність. У табл. 8.10 приведені результати тестування надійності розробленої системи.

Таблиця 8.10

Результати оцінки надійності системи моделювання

Стійкість функціонування	
можливість обробки помилкових ситуацій на вході	+
наявність засобів підтримки при виникненні перешкод	+
Достовірність	
відсоток правильно виданих повідомлень про отримані результати	92.75%
відсоток тестових задач, розв'язок яких закінчився аварійним зупином	0%
Працездатність	
відсоток вирішених тестових завдань	100%

Ефективність системи моделювання оцінюється по таких критеріях як точність розв'язку і час виконання. У табл. 8.10 приведені результати оцінки ефективності розробленого програмного забезпечення по вказаних критеріях, отримані при рішенні групи тестових прикладів.

Всі програми розроблені з використанням мови програмного комплексу MATLAB і об'єднані в єдиний комплекс прикладних програм для реалізації дослідження динамічних макромоделей відповідно концепції пакетів прикладних програм (Matlab Application Toolboxes), прийнятою в системі Matlab.

При виборі середовища моделювання визначаються основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, наявність засобів для реалізації структурного підходу при

побудові моделей; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Системи інструментальних засобів для виконання перетворення моделей динамічних об'єктів на основі запропонованих алгоритмів складається з дванадцяти основних функцій, призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами складаються із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Вони включають три основні модулі, які виконують структурне спрощення базових моделей та чисельно реалізують спрощені моделі. Програми для реалізації динамічних макромоделей організовані у вигляді комплексу, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації видів макромоделей, що розглядаються. Комплекс програм для розв'язання інтегральних динамічних моделей виконано за принципом побудови типового ToolBox з урахуванням вимог згідно з інформацією, що розміщена компанією. Комплекс складається з 23 програм, які охоплюють всі основні види інтегральних рівнянь та методи розв'язання їх на основі розщеплених ядер, що є, по суті, завершеним інструментарієм для апробації і порівняння у повному обсязі алгоритмів, запропонованих у роботі, для розв'язування тестових прикладів і складних прикладних задач.

9. РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧ

9.1. Побудова спрощених математичних моделей при дослідженні силової установки з газовим приводом і системою керування

Характеристика об'єкта досліджень. Структурна схема силової установки з газовим приводом, що досліджується, наведена на рис. 9.1.

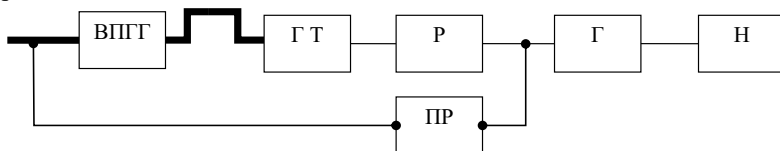


Рис. 9.1. Структурна схема силової установки з газовим приводом

На цій схемі прийнято наступні позначення: ВППГ — вільнопоршневий генератор газу, ГП — газопровід, ГТ — газова турбіна, Р — редуктор; Г — генератор; Н — навантаження, ПР — пропорційний регулятор. Величиною, що регулюється, є частота обертання ω ротора генератора, а величиною, що регулює — циклічна подача палива G в ВППГ. Режими роботи силової установки мають характер стрибкоподібної зміни електричного навантаження — режими скидання навантаження від 100% (130%) до 0, а режими накидання навантаження від 0 до 100% (130%). При цьому основною метою аналізу є оцінка характеристик точності регулювання частоти обертання ротора генератора і часових характеристик перехідних процесів.

Аналіз наведеної структурної схеми силової установки дозволяє виділити чотири основні підсистеми, що визначають точнісні і швидкісні характеристики об'єкта керування — механічна частина, що включає газову турбіну, редуктор і генератор, генератор газу ВППГ, газопровід ГП, регулятор ПР.

Для якісної оцінки керованості даного об'єкта можуть бути прийняті базові математичні описи зазначених підсистем, що враховують тільки істотні фактори. Для ВППГ такими факторами є газородуктивність і залежність параметрів газової суміші на вході газо-

проводу від кількості циклової подачі палива. Оцінка чисельних значень відповідних залежностей здійснюється на основі аналізу фізичних властивостей конструктивних параметрів ВППГ і режимів його роботи.

Для ГП істотним фактором є зв'язок параметрів газової суміші на виході (вході в турбіну) і вході, що враховує конфігурацію газопроводу і втрати енергії в ньому, а основним фактором є залежність моменту, що розвивається, від параметрів газу на вході в турбіну.

Для генератора Г основним фактором слід вважати залежність моменту опору від величини навантаження.

Для регулятора ПР основними параметрами є загальний коефіцієнт підсилення сигналу похибки, динамічні параметри виконавчих органів і параметри обмежень керуючої величини.

Для оцінки динамічних властивостей силової установки з газовим приводом, що розглядається, істотне значення мають динамічні параметри, що зв'язують зміну параметрів газової суміші на вході в турбіну зі зміною циклової подачі палива. Отримання чисельних значень цих параметрів пов'язане з великими труднощами, зумовленими складним характером газодинамічних процесів в ВППГ і ГП. Для цілей експрес-аналізу, проте, реальним шляхом подолання зазначеної складності є фізична оцінка запізнювання проходження керуючого впливу в тракці ВППГ-ГП з подальшим урахуванням цього запізнювання за допомогою еквівалентної зміни динамічних параметрів (зокрема, сталої часу) в тракці регулятора.

Попередній аналіз силової установки з газовим приводом, що розглядається, дозволяє зробити певні висновки щодо її властивостей як об'єкта регулювання. В першу чергу слід відзначити, що тип регулятора (пропорційний), що використовується, означає неминучу наявність статичної похибки регулювання, а необхідність забезпечення її малості означає необхідність встановлення досить великих значень коефіцієнта підсилення регулятора, що може призвести до коливального характеру перехідних процесів і навіть до втрати стійкості.

По-друге, на режимах скидання навантаження відбір кінетичної енергії, що накопичується в елементах, що обертаються, через запізнення керування, здійснюється за рахунок моменту тертя і авторегулюючих властивостей газової турбіни (падіння моменту, що розвивається, зі збільшенням кутової швидкості обертання). У зв'язку з цим перехідні процеси при скиданні навантаження можуть виявитися досить тривалими.

Математичні моделі підсистем.

Механічна частина. Відповідно до закону збереження моменту імпульсу маємо

$$I_{np} \frac{d\omega}{dt} = M_T + M_G + M_{Tp}$$

де ω — кутова швидкість обертання валу генератора, I_{np} — приведений до осі обертання валу генератора момент інерції всіх елементів, що обертаються, M_T — момент, що розвивається турбіною, M_G — момент опору генератора, M_{Tp} — момент тертя всіх елементів, що обертаються, приведений до валу генератора. Рівняння (9.1) при наявності значень параметрів, що входять у нього, і функціональних (або операторних) залежностей в сукупності з рівнянням регулятора складають математичну модель силової установки у необхідному припущенні про жорсткість елементів, що обертаються.

Складність отримання адекватного математичного опису зумовлена складністю визначення функціональних або операційних залежностей в першу чергу таких змінних як M_T і M_G . Величини I_{np} і M_{Tp} , можуть бути досить точно оцінені як розрахунковим I_{np} , так й експериментальним шляхом (I_{np} , M_{Tp}). Для оцінки I_{np} необхідно знати геометричні масові характеристики елементів, що обертаються, а також кінематичні зв'язки між ними. Для даного випадку дійсний наступний вираз для I_{np} :

$$I_{np} = I_G + I_{Ш2} + 3k_2^2 I_{Ш1} + k_1^2 I_T, \quad (9.2)$$

де I_G — момент інерції ротора генератора, $I_{Ш2}$ — момент інерції шестерні другого ступеня редуктора, $I_{Ш1}$ — момент інерції шестерні першого ступеня редуктора відносно власної осі обертання, k_2 — передатний коефіцієнт між шестернями першого й другого ступеня редуктора, I_T — момент інерції ротора турбіни відносно власної осі обертання, k_1 — передатний коефіцієнт редуктора.

Виходячи з геометрично-масових характеристик елементів, що обертаються, і кінематичних співвідношень для величин, що входять у (9.2), маємо:

$$I_G = 20,5 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad I_{Ш2} = 0,02 \text{ кг}\cdot\text{м}^2;$$

$$I_{Ш1} = 0,018 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad I_T = 0,05 \text{ кг}\cdot\text{м}^2; \quad k_2^2 = 18; \quad k_1^2 = 324.$$

Таким чином, $I_{np} = 37,7 \text{ кг}\cdot\text{м}^2$.

Досить точна оцінка тертя M_{Tp} розрахунковим шляхом ускладнена. Тому доцільно оцінювати його величину на основі експери-

ментальних даних в припущенні незалежності його від кутової швидкості. При цьому досить виміряти час від моменту зупинки СПГГ до моменту зупинки генератора і значення кутової швидкості обертання генератора в момент зупинки ВПГГ. Тоді

$$M_{Tp} = \frac{\omega_n I_{np}}{T_0}. \quad (9.3)$$

Відповідні експерименти дають значення M_{Tp} в межах 25 ÷ 35 Нм.

Генератор газу. Оцінка параметрів газу в порожнинах ВПГГ може бути отримана на основі використання законів збереження маси, енергії і рівняння стану газу, записаних для циклу процесів стиснення, розширення в компресорних, буферних порожнинах і порожнинах згоряння (в порожнині двигуна) генератора газу. На цьому етапі моделювання приймемо, що витрата енергії на стиснення газу супроводжується теплообміном з зовнішнім (відносно відповідної порожнини) середовищем. Цей складний процес теплообміну зазвичай враховується деяким середнім показником політропи стиснення, який залежить від інтенсивності охолодження стінок відповідної порожнини, руху заряду, щільності заряду, витоку газу через нещільності поршневих кілець і клапанів й інших чинників. Аналогічно будемо приймати сталими деякі середні показники політропи розширення робочих порожнин.

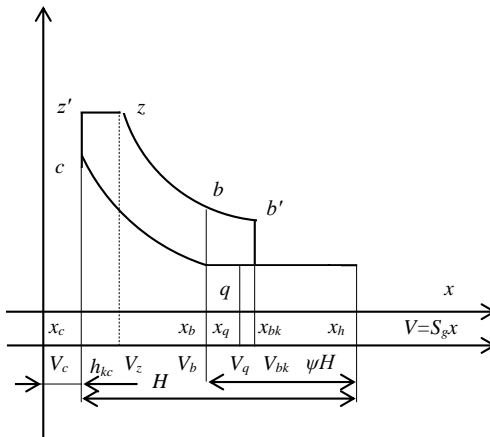
Для оцінки параметрів газу в порожнині двигуна обмежимося розрахунком параметрів робочого тіла до й після згоряння, а під час згоряння за методикою В. І. Гриневецького будемо розглядати лише найпростіші закономірності підведення теплоти до робочого тіла. Будемо задавати параметри газу в продувочному ресивері в якості вихідних даних, нехтуючи падінням тиску на впускних вікнах області двигуна. Нижче перераховані дані, які використовуються для моделювання стану газу в області двигуна ВПГГ.

Вихідні дані: D_d — діаметр поршня двигуна ($D_d = 0,120$ м), h_{kc} — висота камери згоряння половини порожнини двигуна ВПГГ, що розглядається ($h_{kc} = 0,0122$ м), H — хід поршня двигуна ($H = 0,155$ м), ψ — коефіцієнт втраченого ходу поршня ($\psi = 0,32$), m_g — кількість повітря в дизельній порожнині ($m_g = 0,009$ кг) до початку стиснення, P_a — тиск на початок стиснення в дизельній порожнині ($P_a = 5 \text{ ат} = 506625$ Па), T_a — температура повітря на початку стиснення ($T_a = 500$ К), M_T — молекулярна маса палива

($M_T = 180$ кг/кмоль), g_C, g_H, g_O — масові частки вуглецю, водню, й кисню в паливі ($g_C = 0,87, g_H = 0,126, g_O = 0,004$), ξ — коефіцієнт використання тепла ($\xi = 0,7...0,85$), γ_r — коефіцієнт залишкових газів ($\gamma_r = 0,02...0,06$), P_C — коефіцієнт політропи стиснення повітря в порожнині двигуна ($P_C = 1,34...1,40$), P_p — коефіцієнт політропи розширення продуктів згоряння ($P_p = 1,25...1,30$), $v_{zc} = \frac{V_z}{V_c}$ — ступінь попереднього розширення ($v_{zc} = 1,05$), φ_p — коефіцієнт зменшення тиску ($\varphi_p = 0,8...0,9$), $V_{кв}$ — об'єм камери вихлопу ($V_{кв} = 0,005$ м³), $P_{pв}$ — коефіцієнт політропи розширення камери вихлопу ($P_{pв} = 1,3$), C_V^{CO}, C_V^{C1} — коефіцієнти лінійної залежності середньої мольної теплоємності свіжого заряду (повітря) при $T \in [273, 1773]$, ($C_V^{CO} = 20,16$ кДж/кмоль·К, ($C_V^{C1} = 1,74 \cdot 10^{-3}$ кДж/кмоль·К²), C_V^Z — масив коефіцієнтів середньої мольної теплоємності продуктів згоряння при коефіцієнті надлишку повітря $\alpha \in [1,0; 1,8]$

$$C_V^Z = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6 \right) \cdot 10^{-3} T_z \text{ [кДж/кмоль·К]} \quad (9.4)$$

q_T — циклова подача палива (кг), α — коефіцієнт надлишку повітря, R — газова стала ($R = 8,3147$ кДж/кмоль·К), M_e — молекулярна маса повітря ($M_e = 28,982$ кг/кмоль).



Основні розрахункові співвідношення. Прийнято, що процес в порожнині двигуна відповідає індикаторній діаграмі, показаній на малюнку. На ній x — відстань поршня двигуна від вертикальної площини симетрії порожнини двигуна, ділянка $[x_g, x_h]$ — втрачений хід поршня, а ділянки $[x_g, x_{вк}]$ відповідає збільшення об'єму дизельної порожнини (при відкриванні випускних клапанів) на об'єм $V_{кв}$ камери випуску.

На діаграмі дано позначення об'ємів правої половини порожнини двигуна, що відповідають вказаним на індикаторній діаграмі точкам (прийнято $V_{вк} = V_g + V_{кв}$).

1. Визначимо об'єми порожнини двигуна, що відповідають розрахунковим точкам a, c, z, b індикаторної діаграми, враховуючи симетрію всієї порожнини відносно осі OP . Об'єм камери згоряння в кінці стиснення: $V_c = 2S_g h_{кс}$, де S_g — площа поршня

двигуна: $S_g = \frac{\pi}{4} D_g^2$. Робочий об'єм порожнини двигуна перед

початком випуску: $V_g = V_c + 2S_g H (1 - \psi)$. Об'єм дизельної камери в момент максимальної температури: $V_z = V_c v_{zc}$. Об'єм порожнини у початку стиснення газу більше об'єму V_g на величину, що визначається випередженням відкривання випускних вікон: $V_a = V_g + 2 \cdot 0,015 \cdot S_g$. Об'єм газу в порожнині двигуна перед поступленням у вихідний ресивер: $V_{вк} = V_g + V_{кв}$.

2. Параметри повітря на ділянці АС визначаємо за політропою стиснення з показником Π_c ; $P_c = P_a \left(\frac{V_g}{V_c} \right)^{\Pi_c}$, $T_c = T_a \left(\frac{V_g}{V_c} \right)^{\Pi_c - 1}$.

3. Кількість повітря, теоретично необхідного для повного згоряння 1 кг палива:

$$L_O = \frac{1}{0,21} \left(\frac{g_C}{12} + \frac{g_H}{4} + \frac{g_O}{32} \right) \text{ (кмоль/кг палива)} \quad (9.5)$$

Кількість повітря, що необхідне для повного згоряння палива в циклі: $L_T = L_O q_T$ (кмоль).

4. Коефіцієнт надлишку повітря $\alpha = \frac{m_g}{M_g L_T}$.

5. Найнижча теплота згоряння палива: $H_u = 33900 g_C + 102900 g_H$ (кДж/кг палива).

6. Виходячи з першого принципу термодинаміки на ділянці видимого згоряння cz [A1] справедливе співвідношення:

$$\xi H_u q_T = U_z - U_c + A_{cz}, \quad (9.6)$$

де U_c — внутрішня енергія заряду за температури в точці c , U_z — внутрішня енергія продуктів згоряння за температури в точці z , A_{cz} — робота газів на ділянці cz .

Використаємо залежності:

$$U_c = C_V^C \frac{m_6}{M_6} T_c,$$

$$C_V^C = C_V^{CO} + C_V^{C1} T_c = 20,16 + 1,74 \cdot 10^{-3} T_c \quad (9.7)$$

та для середньої мольної теплоємності свіжого заряду:

$$U_z = C_V^z \frac{m_6 + q_T}{M_{nc}} T_z = C_V^z M_z q_T T_z, \quad (9.8)$$

де M_{nc} — молекулярна маса продуктів згоряння, M_z — число моль продуктів згоряння 1 кг палива,

$C_V^z = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6 \right) \cdot 10^{-3} T_z$ [кДж/кмоль·К] — середня мольна теплоємність продуктів згоряння (для дизелів при $\alpha \in [1,0; 1,8]$);

$$M_z = \alpha L_O + \frac{g_H}{4} + \frac{g_O}{32};$$

$$A_{cz} = P_z V_z - P_c V_c = P_z V_z \left(1 - \frac{V_c}{V_z} \right) = P_z V_z \left(1 - \frac{1}{v_{zc}} \right) \quad (9.9)$$

Завжди справедливе співвідношення:

$$P_z = P_c \frac{\mu}{v_{zc}} \cdot \frac{T_z}{T_c},$$

де $\mu = \frac{M_2 + M_r}{M_1 + M_r}$ — коефіцієнт молекулярної зміни робочої суміші,

$\gamma_r = \frac{M_r}{M_1}$ — відношення кількості залишкових газів до кількості

свіжого заряду (в молях), $M_1 = \alpha L_O$.

Нехтуючи залишковими газами в циліндрі, будемо вважати, що

$\mu = \mu_0 = \frac{M_2}{M_1}$. Тоді, враховуючи, що $v_{zc} = \frac{V_z}{V_c}$, отримаємо:

$$A_{CZ} = \frac{P_C V_C}{T_C} \mu_0 \left(1 - \frac{1}{v_{ZC}} \right) T_Z. \quad (9.10)$$

При певних припущеннях, отримуємо квадратне рівняння відносно T_z

$$AT_z^2 + BT_z + C = 0,$$

коефіцієнти якого

$$A = \left(\frac{1,4}{\alpha} + 1,6 \right) \cdot 10^{-3} \quad (9.11)$$

$$B = 20,1 + \frac{0,92}{\alpha} + R \left(1 - \frac{1}{v_{ZC}} \right) \quad (9.12)$$

$$C = - \frac{\left(20,16 + 1,74 \cdot 10^{-3} T_C \right) T_C + \frac{\xi H_u q_T \mu_e}{m_e}}{\mu_0} \quad (9.13)$$

7. Максимальний тиск знаходимо зі співвідношення

$$P_Z = P_C \frac{\mu_0}{v_{ZC}} \cdot \frac{T_Z}{T_C} \varphi_P, \quad (9.14)$$

а температуру T_Z отримаємо за рівнянням стану:

$$T_Z = \frac{P_Z V_Z}{M_2 q_T R}. \quad (9.15)$$

8. Параметри продуктів згоряння визначаємо ділянкою ZB політропи розширення з показником n_p :

$$P_e = P_Z \left(\frac{V_Z}{V_e} \right)^{n_p}, \quad (9.16)$$

$$T_B = T_Z \left(\frac{V_Z}{V_e} \right)^{n_p - 1}. \quad (9.17)$$

Густина продуктів згоряння в точці B : $\rho_B = \frac{m_B + q_T}{V_e}$.

9. Параметри продуктів згоряння в камері випуску знайдемо за політропою розширення з показником Π_{pe} ($\Pi_{pe} = 1,3$):

$$P_{BK} = P_B \left(\frac{V_B}{V_{BK}} \right)^{\Pi_{pe}}, \quad T_{BK} = T_B \left(\frac{V_B}{V_{BK}} \right)^{\Pi_{pe} - 1}.$$

10. Параметри газу на вході у газовий ресивер отримаємо усередненням температури продуктів згоряння і маси q_n повітря для продувки, що потрапляє у ресивер. Вважаючи для них молекулярні маси й теплоємності рівними μ_B і C_V^c , з теплового балансу отримаємо співвідношення для визначення температури потоку на вході в ресивер:

$$\begin{aligned} (m_B + q_T)(R1 + C10 \cdot T_{BK})T_{BK} + q_n(R1 + C10 \cdot T_a)T_a = \\ = (m_B + q_T + q_n)(R1 + C10 \cdot T_r)T_r, \end{aligned}$$

$$R1 = 1 + \frac{R}{C_V^{CO}}, \quad C10 = \frac{C_V^{C1}}{C_V^{CO}};$$

з рівняння стану тиск на вході у ресивер $P_r = \frac{\rho_r RT_r}{\mu_{ПС}}$, де густина

$$\rho_r = \frac{m_B + q_T + q_n}{V_{BK}}.$$

Газопровід. Для наближених розрахунків газових потоків у трубах у багатьох випадках можна користуватися спрощеною одновимірною стаціонарною схемою. Прийнемо вектор швидкості в даному перерізі труби спрямованим вздовж осі, а величини швидкості V , тиску p , густини ρ й температури T сталими у перерізі. Будемо вважати процес адіабатним, тобто досить швидким, без притоку тепла ззовні, щоб не враховувати теплообмін із зовнішнім середовищем, у даному випадку зі стінками труби. Усталений потік газу вздовж осі труби (координата X направлена вздовж осі), без урахування в'язкості, описується рівнянням Ейлера.

$$V \frac{dV}{dx} = - \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} \quad (9.18)$$

і рівнянням нерозривності

$$\frac{d\rho V}{dx} = 0. \quad (9.19)$$

Ці рівняння легко інтегруються. Таким чином, вздовж лінії потоку, маємо

$$\frac{V^2}{2} + P = const, \quad (9.20)$$

$$\rho V = const, \quad (9.21)$$

тут P — функція тиску

$$P = \int_{p_0}^p \frac{dp}{\rho(p)}. \quad (9.22)$$

Вигляд цієї функції визначається типом процесу, наприклад, вона легко обчислюється для ізотермічного, адіабатичного процесів, де існують явні залежності

$$\frac{P}{\rho^k} = const; \quad \frac{P}{\rho} = const. \quad (9.23)$$

Рівність (9.20) називається інтегралом Бернуллі (за відсутності масових сил). В окремому випадку адіабатичного процесу інтеграл Бернуллі має вигляд

$$\frac{V^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{P}{\rho} = const, \quad (9.24)$$

де K — показник адіабати.

Співвідношення (9.24) означає, що зміна кінетичної енергії, у відношенні до одиниці маси газу, рівна роботі, що продукуються силами тиску. Рівняння нерозривності (9.21) дає нам сталість витрати через розподіл труби S :

$$\rho VS = const. \quad (9.25)$$

Очевидно, що рівняння (9.24) описує ідеалізований процес, проте воно може використовуватися у практичних розрахунках, якщо ввести додатковий член, що характеризує втрати енергії на в'язкість, зміну напрямку і т. д. Тоді між двома перерізами труби мають місце співвідношення

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{P_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{P_2}{\rho_2} + H, \quad (9.26)$$

де H — втрати енергії на одиницю маси. У нашому випадку H складається з двох членів — втрати на тертя H_{mp} і втрати, що викликані різкою зміною конфігурації границь потоку (подолання опору форми) $H_u \cdot H_m$.

Втрати на тертя визначаються формулою Дарсі-Вейсбаха

$$H_{mp} = \frac{\Delta p_{mp}}{\rho} = \frac{\lambda l V^2}{2d}, \quad (9.27)$$

(вплив тертя враховується додатковим перепадом тиску), тут λ — коефіцієнт гідравлічного тертя, що залежить від фізичних властивостей середовища: густини, в'язкості, а також від швидкості потоку й діаметра труби d . Для визначення втрат на місцевий опір маємо формулу

$$H_m = \frac{\Delta p_m}{\rho} = \zeta \frac{V^2}{2}, \quad (9.28)$$

де ζ — безрозмірний коефіцієнт.

Існує ряд емпіричних формул, що дозволяють обчислити коефіцієнти λ й ζ , що враховують ступінь турбулентності та інші фактори.

Число Рейнольдса, функцією якого є коефіцієнт гідравлічного тертя λ , можна подати у вигляді

$$\text{Re} = \frac{\rho V d}{\mu} = \frac{4G}{\pi d \mu}, \quad (9.29)$$

де G — масовий розхід через переріз труби. У свою чергу за ламінарного режиму, в круглій трубі

$$\lambda = \frac{64}{\text{Re}} \quad (9.30)$$

або з врахуванням (9.29)

$$\lambda = \frac{16\pi d \mu}{G}. \quad (9.31)$$

Описані дані свідчать, що, за турбулентного режиму λ відхиляються від обчислених за формулою (9.31) значень в бік збільшення, особливо це помітно для труб з великою шорсткістю. Тому були запропоновані різні емпіричні формули для визначення λ . Наприклад, формула Блазіуса: $\lambda = 0,3164/\text{Re}^{0,25}$ для гідравлічно гладких труб; формула Шифринсона: $\lambda = 0,11 \left(\frac{K}{d} \right)^{0,25}$ для досить шорстких труб (K — середня висота виступів шорсткості); формула Альтшуля: $\lambda = 0,11 \left(\frac{K_e}{d} + \frac{68}{\text{Re}} \right)^{0,25}$, яка при $\text{Re} < 10$ співпадає з формулою Блазіуса, а при $\text{Re} > 500$ — з формулою Шифринсона (K_e — еквівалентна шорсткість, враховує крім висоти виступів, їх форму; значення K_e визначаються з відповідних таблиць). Таким чином, на підставі наведених вище основних співвідношень можна побудувати математичну модель процесу проходження газу по трубі, умовна схема якої приведена на рис. 9.2

Труба розділена на 5 геометрично виділених ділянок, на кожній з яких процес проходження газу описується рівнянням Бернуллі з урахуванням втрат енергії, що визначаються геометриєю труби і впливом тертя.

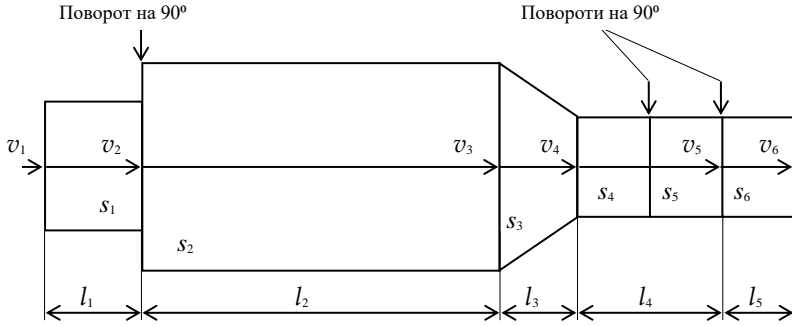


Рис. 9.2. Умовна схема процесу проходження газу по трубі

Будемо вважати, що у вхідному перерізі труби S_1 задано значення p_1, ρ_1, V_1 . Вважається заданою масова витрата газу, однакова у всіх перетинах і рівна

$$G = \rho_i V_i S_i, \quad (i = \overline{1, 6}). \quad (9.32)$$

Звідки

$$\rho_i = \frac{G}{V_i S_i}.$$

В силу адіабатичності процесу

$$\frac{p_i}{\rho_i} = \frac{p_1}{\rho_1^k} \rho_i^{k-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{\rho_i}{\rho_1} \right)^{k-1} = \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_i S_i \rho_1} \right)^{k-1}. \quad (9.33)$$

1. Втрати енергії на 1-ій ділянці визначаються тільки впливом в'язкості, особливо помітною біля стінок труби, тобто втратами на тертя.

Згідно (9.27) і (9.31)

$$H_1 = \frac{\lambda l_1 V_{12}^2}{2d_1} = \frac{8\pi\mu l_1}{G} V_{12}^2,$$

де V_{12} є середньою швидкістю на ділянці 1

$$V_{12} = \frac{V_1 + V_2}{2}.$$

Тоді маємо (9.26):

$$\frac{V_1^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} = \frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_2}{\rho_2} + \frac{2\pi\mu l_1}{G} (V_1 + V_2)^2. \quad (9.34)$$

2. В області перерізу S_2 відбувається різка зміна швидкості, і в зв'язку з цим втрата енергії, внаслідок різкої зміни перерізу труби і повороту її на 90° . Ці втрати визначаються виразом

$$H = \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2}.$$

Втрати на тертя на цій ділянці складають

$$H_{mp} = \frac{\lambda_2 l_2 V_{23}^2}{2d_2} = \frac{8\pi\mu l_2}{G} V_{23}^2 = \frac{2\pi\mu l_2}{G} (V_2 + V_3)^2$$

і відповідно

$$\frac{V_2^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_2}{\rho_2} = \frac{V_3^2}{2} + \frac{K}{K+1} \frac{p_3}{\rho_3} + \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_2}{G} V_{23}^2. \quad (9.35)$$

3. Третя ділянка труби являє собою конфузур, втрати в якому складаються з втрат на поступове звуження і втрат на тертя. Втрати

на звуження можна знайти за формулою $H = \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2}$, де

$\lambda < 20^\circ$ $\zeta_{n.c.} = 0.1$, кут конусності в конфузурі — $\alpha < 20^\circ$. Втрати на тертя дорівнюють

$$H_{mp} = \frac{\lambda}{8 \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2} = \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2}, \quad (9.36)$$

де d_3, d_4 — діаметри труби в перерізах S_3 і S_4 відповідно.

Рівняння Бернуллі на ділянці 3, з урахуванням втрат в конфузурі, має вигляд

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_3}{\rho_3} + \frac{V_3^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{V_4^2}{2} + \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2} + \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right)^2 \frac{V_4^2}{2}. \quad (9.37)$$

4. Остання ділянка труби містить 2 різких повороти, де відбувається зміна швидкості і тому розбита на частини 4 і 5. Аналогічно описаному вище маємо: на ділянці 4 (Рис. 9.2)

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_4}{\rho_4} + \frac{V_4^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_5}{\rho_5} + \frac{V_5^2}{2} + \zeta \frac{V_4^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_4}{G} (V_4 + V_5)^2 \quad (9.38)$$

і на ділянці 5:

$$\frac{K}{K+1} \frac{p_5}{\rho_5} + \frac{V_5^2}{2} = \frac{K}{K+1} \frac{p_6}{\rho_6} + \frac{V_6^2}{2} + \zeta \frac{V_5^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_5}{G} (V_5 + V_6)^2. \quad (9.39)$$

У виразах (9.38), (9.39) $\zeta = 1$, а останні члени цих виразів відображають втрати енергії на подолання тертя.

Таким чином, процес проходження газу по трубі описується п'ятьма рівняннями (9.33), (9.34), (9.36), (9.38), (9.39), а з урахуванням співвідношень (9.32) їх можна записати в замкнутому вигляді:

$$\begin{aligned} \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} + \frac{V_1^2}{2} &= \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_2 S_2 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_2^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_1}{G} (V_1 + V_2)^2, \\ \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_2 S_2 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_2^2}{2} &= \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_3 S_3 \rho_1} \right)^{K-1} + \\ &+ \frac{V_3^2}{2} + \zeta \frac{V_2^2}{2} + \left(\frac{S_3}{S_2} - 1 \right)^2 \frac{V_3^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_2}{G} (V_2 + V_3)^2, \\ \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_3 S_3 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_3^2}{2} &= \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_4 S_4 \rho_1} \right)^{K-1} + \\ &+ \frac{V_4^2}{2} + \zeta_{n.c.} \frac{V_4^2}{2} + \frac{\pi(d_3 + d_4)\mu}{G \sin(\alpha/2)} \left(1 - \frac{S_4^2}{S_3^2} \right) \frac{V_4^2}{2}, \\ \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_4 S_4 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_4^2}{2} &= \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_5 S_5 \rho_1} \right)^{K-1} + \\ &+ \frac{V_5^2}{2} + \zeta \frac{V_4^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_4}{G} (V_4 + V_5)^2, \\ \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_5 S_5 \rho_1} \right)^{K-1} + \frac{V_5^2}{2} &= \frac{K}{K+1} \frac{p_1}{\rho_1} \left(\frac{G}{V_6 S_6 \rho_1} \right)^{K-1} + \\ &+ \frac{V_6^2}{2} + \zeta \frac{V_5^2}{2} + \frac{2\pi\mu l_5}{G} (V_5 + V_6)^2, \end{aligned}$$

де $S_4 = S_5 = S_6$, $\zeta = 1$.

Результатом розв'язання даної системи є величина швидкості у вихідному перерізі, а вихідними величинами $V_1 p_1 \rho_1$ у перерізі S_1

Газова турбіна. Спрощена математична модель газової турбіни може бути представлена у вигляді залежності моменту, що розвивається нею, від параметрів газової суміші. При цьому

$$M_T = \frac{GH\eta}{\omega_T}, \quad (9.40)$$

де G — розхід газу, H — питома теоретична робота, η — ефективний коефіцієнт корисної дії, ω_T — кутова частота обертання ротора турбіни.

Величина витрати газу G визначається продуктивністю ВПГГ і в даному випадку оцінюється величиною 0.2/ 0.5 кг/с.

Питома теоретична робота H визначається, зазвичай, за умови, що процес проходження газової суміші через турбіну може стати й політропним з показником $K_T = (1.25 / 1.4)$. При цьому

$$H = \frac{K_T}{K_T - 1} RT_T \left[1 - \frac{P_T}{P_0} \frac{1 - K_T}{K_T} \right],$$

де R — газова стала газової суміші $R \approx \frac{290 \text{ Дж}}{\text{кгК}}$, P_T, P_0 — тиск газу на вході в турбіну й виході з неї, T_T — температура газу перед турбіною.

Ефективний ККД η оцінюють величиною (0.6/ 0.8).

Вираз (9.40) дає момент діючих в турбіні сил на її валу. На валу генератора цей момент збільшується у W раз, де W — передатний коефіцієнт редуктора — P . Враховуючи що $\omega_T = W\omega$, отримуємо з (9.40) для моменту, що розвивається турбіною на валу генератора

$$M_T = \frac{GH\eta}{\omega}. \quad (9.41)$$

Генератор. Момент опору генератора M_G є складною функцією досить великого числа аргументів, що характеризують роботу генератора як електричної машини. Ступінь складності розрахунку величини M залежить від прийнятих припущень відносно характеру електромагнітних процесів, що там протікають. Для мети фізико-математичної оцінки керованості даної силової установки з газовим приводом основним фактором, що визначає момент опору генератора, слід вважати електричну потужність N , що ним розвивається.

У припущенні про активно-індуктивний характер навантаження маємо для струму навантаження I_H

$$I_H = \frac{E_G}{\sqrt{(R_G + R_H)^2 + \omega_3^2 (L_G + L_H)^2}}, \quad (9.42)$$

де E_G — напруга генератора, ω_3^2 — частота напруги, R_G, R_H — активні опори генератора й навантаження, L_G, L_H — індуктивності генератора й навантаження.

Далі маємо

$$E_G = \omega_3 \Psi, \quad (9.43)$$

$$\omega_3 = p\omega, \quad (9.44)$$

де ψ — потокозчеплення, p — число пар полюсів.

Потужність навантаження, що споживається,

$$N = I_H^2 (R_G + R_H) = \frac{\omega_3^2 \psi^2}{(R_G + R_H) \left(1 + \omega_3^2 \left(\frac{L_G + L_H}{R_G + R_H} \right)^2 \right)}. \quad (9.45)$$

Момент опору генератора визначається (у припущенні $\psi = \text{const}$) із умови рівності механічної та електричної потужності з урахуванням коефіцієнта втрат k ($k > 1$), а саме

$$M_G \omega = kN, \quad (9.46)$$

звідки з урахуванням (9.45), (9.46) і вважаючи

$$\psi = \psi_H = \frac{E_{GH}}{\omega_{3H}^2} = \frac{E_{GH}}{p^2 \omega_H^2},$$

де індекс «H» означає, що відповідні величини беруться на номінальному режимі, маємо

$$M_G = \frac{k \omega \psi_H^2}{(R_G + R_H) \left(1 + \omega_3^2 \left(\frac{L_G + L_H}{R_G + R_H} \right)^2 \right)}. \quad (9.47)$$

Пропорційний регулятор. Величина керуючого впливу пропорційного регуляторної струму (ПР) лінійно залежить від похибки регульованої величини

$$V = KE = K(\omega_H - \omega), \quad (9.48)$$

де K — коефіцієнт підсилення регулятора.

Динамічні властивості замкнутої системи регулювання у значній мірі залежать від властивостей регулятора і, зокрема, від його динамічних характеристик. Наявність інерційних елементів у складі регулятора (наприклад, виконавчих органів у регуляторах непрямої дії) призводить до необхідності використання математичних моделей регулятора у вигляді диференціальних рівнянь. У найпростішому випадку рівняння регулятора подається у вигляді рівняння першого порядку

$$\tau_p V + V = K(\omega_H - \omega), \quad (9.49)$$

де τ_p — стала часу регулятора. Саме величина τ_p є суттєвою для оцінки динамічних властивостей замкнутої системи регулювання. Досить точно оцінити величину τ_p можна на основі аналізу експериментальних даних. Для оцінки ж принципів якостей даної сис-

теми регулювання за необхідними умовами можна використовувати у якості τ_p деяку оцінку її знизу. Для отримання оцінки знизу τ_p необхідно враховувати як інерційність виконавчих органів регулятора (стала часу $\tau_{up}, \tau_{up} = 0.04 \text{ с}$), так й інерційність газодинамічних процесів у ВПГТ (стала часу $\tau_{ГТ}$), а також інерційність процесів у газопроводі (стала часу $\tau_{ГП}$). В цьому випадку для мети фізико-математичної оцінки керованості даної силової установки оцінкою знизу для τ_p може слугувати наступна

$$\tau_p > \tau_{p0} = \tau_{up} + \tau_{ГТ} + \tau_{ГП}, \quad (9.50)$$

де величина $\tau_{ГТ}$ оцінюється на підставі аналізу процесів у ВПГТ. Якщо вважати, що параметри газової суміші при зміні циклічної подачі палива встановлюються за m циклів, то $\tau_{ГТ} \approx \frac{m}{3} \tau_{Ц}$, де $\tau_{Ц}$ — період циклу роботи ВПГТ. Можна вважати $m = (8 \div 10)$, що при $\tau_{Ц} = 0.04 \text{ с}$ дає $\tau_{ГТ} = 0.12 \text{ с}$.

Стала часу газопроводу оцінюється за умовами проходження у ньому газової суміші, базуючись на аналізі часу запізнення. При швидкостях течії газу $(20 \div 50) \text{ м/с}$ і довжині газопроводу приблизно 1 м маємо $\tau_{ГП} = (0.02 \div 0.05) \text{ с}$. На основі наведених даних оцінка τ_{p0} величини τ_p складає 0.2 с . Що стосується величини коефіцієнта підсилення K регулятора, то її значення, що також визначає динамічні властивості процесів регулювання, має варіюватися при виконанні обчислювальних експериментів.

Програмна система моделювання. Програмна реалізація математичних моделей підсистем силової установки з газовим приводом у поєднанні з програмною організацією взаємодії всіх зв'язків математичних моделей, а також реалізація функцій обробки і сервісу, утворюють програмну систему моделювання функціонування об'єкта.

Наведемо короткий опис функціонального призначення основних блоків параметрично керованого комплексу програмних модулів. Отриманий математичний опис об'єкта моделювання у вигляді диференціальних рівнянь та алгебраїчних залежностей дозволяє використовувати стандартні пакети комп'ютерних засобів для моделювання з реалізацією підпрограм, що використовують наступні дії:

- організація процесу моделювання при вирішенні дослідницьких завдань;

- виклик підпрограми, що виконують допоміжні обчислювальні операції;
- реалізація основного обчислювального процесу;
- знаходження правих частин диференціальних рівнянь, що описують динаміку об'єкта;
- обчислення моменту тертя елементів, що обертаються;
- визначення залежності моменту опору генератора від навантаження, де вхідним параметром є величина електричного навантаження;
- обчислення параметрів газової суміші на вході в газопровід; знаходження дійсного нуля функції методом половинного ділення в поєднанні з методом січних у випадку гладких функцій (при визначенні параметрів газової суміші в газопроводі);
- визначення залежності параметрів газової суміші на вході в турбіну від параметрів газової суміші на вході в газопровід, з урахуванням конфігурації і втрати енергії в газопроводі;
- аналіз результатів моделювання перехідних процесів.

Виконані в даній роботі обчислювальні експерименти дозволяють зробити аналіз (попередній або остаточний) динамічних властивостей силової установки з газовим приводом і пропорційним регулюванням за відхиленням.

При аналізі результатів моделювання основними факторами, що аналізувалися, були наступні характеристики перехідних процесів: характер перехідного процесу — стійкий, нестійкий, аперіодичний (А), коливальний (К); значення числових параметрів перехідних процесів (за умови стійкості) — тривалість (Т), статична похибка регулювання (δ_{CT}), максимальна похибка перерегулювання (δ_p).

Основними режимами роботи силової установки, на яких оцінювалися властивості перехідних процесів, були режим скидання навантаження від номінальної до нульової (перехід з номінального режиму в режим холостого ходу) і режим накидання навантаження від нульової до номінальної (перехід з режиму холостого ходу в номінальний) при різних значеннях коефіцієнта підсилення пропорційного регулятора.

Аналіз результатів частини виконаних обчислювальних експериментів (зведених за перерахованими вище характеристиками в таблицю 1), що отримані при моделюванні зазначених режимів, дозволяє оцінити потенційні можливості прийнятої структури системи керування даної силової установки.

Перш за все слід зазначити, що малі значення статичної похибки і тривалості перехідних процесів має місце у випадках, коли перехідний процес має коливальний характер. У разі ж аперіодичного

характеру перехідних процесів статична похибка досягає значень десятків відсотків при тривалості 6-9 с.

Таблиця 9.1

Режим	Скидання навантаження			Накидання навантаження		
	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$
Коефіцієнт підсилення	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$	$1 \cdot 10^{-4}$	$1 \cdot 10^{-3}$	$0,5 \cdot 10^{-3}$
Характер процесу	А	К	К	А	К	К
$T, \text{с}$	9	2	3,5	6	2	2,6
$\delta_{ст}, \%$	22	2,5	0,5	15	2,2	0,5
$\delta_p, \%$	-	3	1,2	-	2,8	1,2

У зв'язку з тим, що коливальний процес в системі регулювання даної силової установки є небажаним внаслідок малого запасу стійкості (так система стає нестійкою при $K \approx 1.1^{-2}$), при оцінці керованості слід орієнтуватися саме на процеси аперіодичного характеру. Далі слід мати на увазі, що отримані результати відносяться до випадку досить великого динамічного діапазону керуючої змінної (мінімальне значення циклової подачі палива — 0.02 г, максимальне — 1 г), з достатнім запасом, що перебиває діапазон значень між режимами холодного ходу і максимального навантаження (циклова подача палива %7 0.07 г й 0.8 г відповідно). За відсутності достатнього перекриття (що цілком можливо в нижній частині діапазону значень циклової подачі палива, оскільки зменшення останньої в режимі холодного ходу може призвести до зупинки ВПГТ) характер перехідних процесів якісно змінюється через спрацювання обмежень керування. При цьому тривалість перехідних процесів істотно збільшується (десятки секунд) разом з ростом статичної похибки (до 50%).

Таким чином, наведені вище результати (табл. 9.1) є суттєво позитивними, відображають властивості об'єкта і є оцінками знизу для відповідних величин реального об'єкта. Крім того, отримані в процесі виконання даної роботи результати визначають напрямок робіт з поліпшення керованості даної силової установки як розширення динамічного діапазону можливих значень керуючих змінних.

Виконана робота з дослідження керованості силової установки з газовим приводом розв'язує важливу задачу аналізу, має достатній оціночний характер при використанні спрощених математичних моделей основних підсистем. Отримані результати дозволяють оцінити гранично досяжні характеристики замкнутої системи керування обраного типу, оцінити важливість прийнятих припущень відносно істотних факторів, що визначають характер перехідних процесів, намітити шляхи вдосконалення системи керування даного об'єкта.

9.2. Комп'ютерне моделювання бурильної колони бурової установки

При спорудженні глибоких та надглибоких свердловин важливою проблемою є забезпечення високих техніко-економічних показників процесу буріння. Із збільшенням глибини буріння значно зростає твердість породи, енергозатрати на її руйнування, температура в зоні забою, утруднюється підвід промивної рідини тощо. Все це погіршує процес руйнування породи, знижує довговічність породоруйнівного інструменту та інших вузлів бурової установки.

Підвищення техніко-економічних показників бурових установок може бути досягнуто шляхом покращення динаміки процесу руйнування породи при передачі механічних зусиль через колону бурильних труб з поверхні до забою і в зворотному напрямку. Для розрахунку параметрів буріння доцільно використовувати комп'ютерну модель, що відображає процес буріння з достатньою для інженерних розрахунків адекватністю. При цьому потрібно враховувати такі властивості елементів бурової установки як нелінійність та розподіленість параметрів. В буровій установці елементом з найбільш вираженими властивостями розподіленості параметрів є колона бурильних труб.

Застосування комп'ютерної моделі колони бурильних труб при керуванні процесом буріння дозволить вирішити ряд важливих задач: підвищити техніко-економічні показники буріння за рахунок врахування динамічної складової при визначенні і підтримці оптимального навантаження на долото; здійснювати контроль за процесом підйому колони бурильних труб, з урахуванням її взаємодії із промивальною рідиною та стінками свердловини з метою зменшення часу спуско-підйомних робіт; здійснювати контроль за подачею промивальної рідини під час буріння та спускопідйомних робіт; здійснювати контроль за режимами роботи наземної системи з метою зменшення витрат енергії.

Сучасна бурова установка є складним комплексом різноманітного обладнання, який складається з двигунів обладнаних системами керування, механізмів для спуску, підйому та обертання інструменту, насосів для прокачування промивальної рідини, обладнання для механізації та автоматизації спускопідйомних робіт, бурова вишка для утримання блоків талевого механізму та розміщення бурильних труб. Робота агрегатів бурового комплексу супроводжується інтенсивними механічними коливаннями, які викликані частими пусками і зупинками приводних систем, зміною сил опору руху бу-

рильної колони, коливаннями тиску в насосних станціях та зміною сил опору при русі промивальної рідини в свердловині.

Варто відмітити, що аналіз процесів, які відбуваються при бурінні свердловини, можливий лише за умови комплексного підходу, коли система розглядається з урахуванням взаємодії двигунів, передаточних механізмів, виконавчих елементів та несучих конструкцій. Отже, всебічне вивчення динаміки бурових установок є необхідною умовою для їх раціонального проектування і ефективного використання.

При розв'язуванні задач аналізу динаміки бурової установки, в задачах керування, виникає необхідність створення адекватних математичних та комп'ютерних моделей як окремих елементів так і всієї системи в цілому. При цьому приходиться мати справу з моделями елементів різної фізичної природи (із розподіленими та зосередженими параметрами, нелінійними та лінійними, просторово-одномірними та багатомірними), які мають суттєві відмінності при їх математичному описі. Аналіз таких систем за допомогою традиційних методів, коли розв'язується система рівнянь, в яку входять звичайні диференціальні рівняння, рівняння в частинних похідних, нелінійні диференціальні рівняння, інтегральні та інтегродиференціальні рівняння, утруднюється насамперед відсутністю загальних методів їх розв'язування.

Пропонується підхід, коли над складною неоднорідною системою проводиться декомпозиція на простіші структурні елементи, що дає змогу звести розв'язування складної задачі до розв'язування певної кількості простих задач. Такий підхід дозволяє представити складну модель у вигляді певної структури з простіших елементів.

При числовій реалізації для кожного структурного елементу макромоделі обирається певний, найбільш ефективний метод, який визначає алгоритм, що використовується у відповідному програмному модулі. Такий підхід можна назвати структурно-алгоритмічним, оскільки певному структурному елементу ставиться у відповідність алгоритм. В кінцевому результаті застосування структурного підходу дає можливість будувати моделі складних систем із певного базового набору комп'ютерних модулів.

На сьогоднішній день для розв'язування окресленого кола задач можна використати велику кількість програмних засобів. Серед них слід відмітити такі, як ANSYS, COMSOL Multiphysics, MathCAD, Mathematica, Maple, MatLAB, WorkBench, Scilab, MAPC, ADAMS та ін. Однак, для реалізації структурно-алгоритмічного підходу при синтезі комп'ютерних моделей найбільш ефективним середовищем моделювання є MatLAB із вмонтованим засобом імітаційного моделювання Simulink.

Необхідно розробити ефективні моделі основних елементів бурової установки з метою їх використання на етапі проектування обладнання, а також для автоматизації процесів керування.

На стадії апробації моделей в якості середовища моделювання доцільно використати інтерактивний інструментарій для моделювання, імітації та аналізу динамічних систем — MatLAB/Simulink. Оскільки в серійних дослідницьких програмах комп'ютерної математики, і зокрема в MatLAB/Simulink відсутні засоби для моделювання ланок елементів з розподіленими параметрами та ланок з динамічними нелінійностями необхідно розробити на базі існуючих бібліотек макромоделі типових розподілених та нелінійних динамічних ланок бурової установки.

При моделюванні блоків бурової установки найбільші труднощі при числовій реалізації викликають елементи з розподіленими параметрами. В першу чергу це стосується колони бурильних труб, яка є неоднорідною, оскільки вона складається з різноманітного устаткування (сталених та поважчених бурильних труб, центраторів, перевідників, калібраторів, розширювачів, шламоуловлювачів та ін.). Також елементом з розподіленими параметрами є стовп промивальної рідини, яка подається через бурову колону до забою. Необхідність врахування динаміки руху промивальної рідини в буровій колоні викликана ще і тим, що промивальна рідина при бурінні забійним двигуном використовується для передачі енергії до нього і керування обертальним моментом на долоті здійснюється через гідравлічний зв'язок.

Колону бурильних труб, із врахуванням ряду припущень, можна вважати пружним стержнем з розподіленою масою, пружністю та в'язким тертям. До нижнього кінця колони прикладена осьова реакція забою і реакція долота, а по довжині колони розподілені сили ваги, в'язкого тертя та інерції. В буровій колоні присутні три види деформації — кручення, згину та розтягу-стиску. Деформація кручення впливає на динаміку обертового руху долота. При цьому на долото діє поздовжня сила зі сторони бурової колони, яка, в свою чергу, залежить від динаміки поздовжнього руху колони. Отже, для підтримки оптимального навантаження на долото необхідно врахувати також деформації розтягу-стиску в елементах колони.

Певні спотворення в розрахунки поздовжнього та обертового руху вносить деформація згину. Так, при дії обертового моменту та сили стиснення ділянка колони деформується у вигляді просторової спіралі обмеженої стінками свердловини. Але для багатьох задач, особливо при використанні забійного двигуна, достатнім є врахування в моделі двох взаємозв'язаних характеристик — динаміки обертового та поступального руху.

Зв'язок параметрів, що характеризують поступальний та обертальний рухи здійснюється через модель взаємодії долота-порода. Якщо використовується долото із шарошками, то при його обертанні, в результаті перекочування шарошок по забою, виникають поздовжні коливання корпусу долота, які передаються бурильній колоні, а зубці шарошки, внаслідок ударної взаємодії з породою, спричиняють її руйнування.

Таким чином, для отримання повноцінних результатів моделювання необхідно враховувати взаємодію породи, долота, забійного двигуна та колони бурильних труб.

Розглянемо способи математичного опису динаміки поздовжнього та обертального руху колони бурильних труб.

Швидкість зміщення перерізів колони $V(x, t)$, яка викликана дією погонної зовнішньої сили $F(x, t)$ описується диференціальним рівнянням в частинних похідних

$$m(x) \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial t^2} + h(x) \frac{\partial V(x, t)}{\partial t} - k \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial F(x, t)}{\partial t} - \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} \quad (9.51)$$

з граничними та початковими умовами відповідно (9.52) та (9.53)

$$\frac{\partial V(l, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial V(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (9.52)$$

$$\frac{\partial V(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad V(x, 0) = 0, \quad (9.53)$$

де $m(x)$ — погонна маса колони; $h(x)$ — погонний коефіцієнт опору колони; k — коефіцієнт пружності; $F(x, t)$ — погонна зовнішня сила; $T(x, t)$ — погонна сила тяжіння; $V(x, t)$ — швидкість руху перерізу колони.

Для опису динаміки обертального руху стержня використовується рівняння

$$J \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial \omega(x, t)}{\partial t} - GJ_p \frac{\partial^2 \omega(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial M(x, t)}{\partial t} \quad (9.54)$$

з граничними та початковими умовами відповідно (9.55) та (9.56)

$$\frac{\partial \omega(l, t)}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial \omega(0, t)}{\partial x} = 0, \quad (9.55)$$

$$\frac{\partial \omega(x, 0)}{\partial t} = 0; \quad \omega(x, 0) = 0, \quad (9.56)$$

де ω — частота обертання колони; J — момент інерції; G — модуль зсуву; M — момент кручення; τ — коефіцієнт опору обертального руху; J_p — полярний момент інерції.

Однак, якщо колона бурильних труб є неоднорідною, а також при нелінійній постановці задачі, використання підходу, коли розв'язується вихідна система диференціальних рівнянь в частинних похідних, є неефективним [171].

Пропонується використання структурних моделей у вигляді багатомасових систем із зосередженими масами [154]. Застосувавши метод прямих до рівнянь (9.51) та (9.54) отримаємо дві системи з n диференціальних рівнянь кожна

$$m_i \frac{\partial^2 V_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial V_i}{\partial t} - k_i (V_{i-1} - 2V_i + V_{i+1}) = \frac{\partial F_i}{\partial t} - \frac{\partial T_i}{\partial t}, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.57)$$

$$J_i \frac{\partial^2 \omega_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \omega_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\omega_{i-1} - 2\omega_i + \omega_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.58)$$

де V_i — швидкість руху i -го елемента; F_i — зовнішня сила, що діє на i -й елемент; T_i — сила тяжіння, що діє на i -й елемент; h_i — коефіцієнт опору, що діє на i -й елемент; k_i — коефіцієнт пружності для i -го елемента; ω_i — частота обертання i -го елемента колони; M_i — момент кручення, що діє на i -й елемент τ_i — коефіцієнт опору обертальному руху i -го елемента колони; J_{pi} — полярний момент інерції i -го елемента колони.

Після інтегрування систем рівнянь (9.57) та (9.58) отримаємо

$$m_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial t^2} + h_i \frac{\partial x_i}{\partial t} - k(x_{i-1} - 2x_i + x_{i+1}) = F_i - T_i, \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad (9.59)$$

$$J_i \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial t^2} + \tau_i \frac{\partial \varphi_i}{\partial t} - GJ_{pi} (\varphi_{i-1} - 2\varphi_i + \varphi_{i+1}) = M_i, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (9.60)$$

де x_i та φ_i — координата i -го елемента; φ_i — кут зсуву i -го елемента.

Отримана модель у вигляді системи диференціальних рівнянь дозволяє провести декомпозицію вихідної моделі за змінними x та φ на n ланок. Якщо проводити декомпозицію далі на рівні отриманих ланок, то доцільно виділити в її структурі величини, які мають фізичний зміст, що дасть можливість реалізувати динамічні нелінійні залежності через статичні (наприклад, використання гістерезисної нелінійної залежності дозволяє відтворити в структурній моделі ефект втрати частини енергії деформації внаслідок внутрішнього тертя).

Після еквівалентних перетворень для реалізації i -х диференціальних рівнянь систем (9.59) та (9.60) отримаємо структурну ланку у вигляді підсистеми simulink-моделі, приведеної на рис. 9.3.

Отримана підсистема складає основу для побудови структурної комп'ютерної моделі, що реалізує системи рівнянь (9.59)-(9.60).

З'єднання підсистем здійснюється у відповідності до зв'язків через параметри в системах диференціальних рівнянь (рис. 9.4).

Побудована таким чином структурна модель бурильної колони має ряд важливих властивостей. По-перше, дискретизація колони на ланки із зосередженими масами дає можливість для кожної ланки проводити уточнення моделі шляхом врахування певних особливостей на ділянках колони, в тому числі і нелінійних залежностей (наприклад, зміну температури з ростом глибини, а отже й інших параметрів моделі, які залежать від температури). По-друге, за рахунок організації прямих та зворотних зв'язків між ланками, модель є оборотною, що дає змогу здійснювати вхідні впливи та отримувати результати на рівні будь-якого структурного блоку моделі.

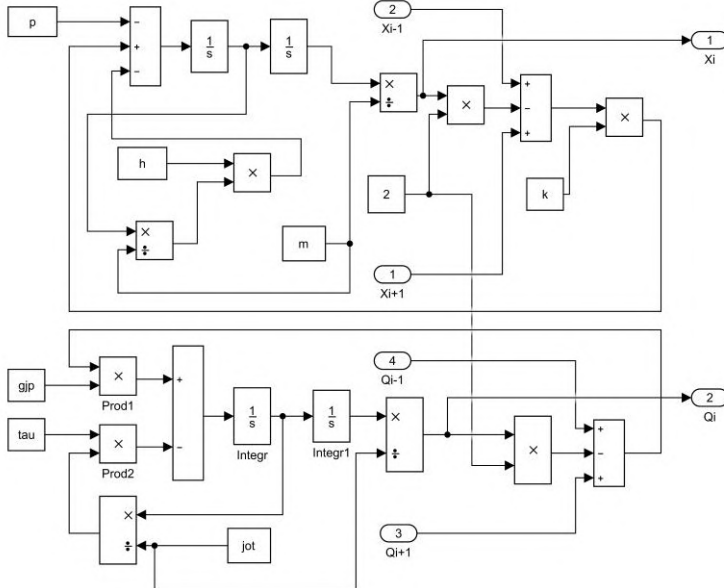


Рис. 9.3. Структурна реалізація підсистеми для моделювання ділянки колони при поступальному та обертальному русі

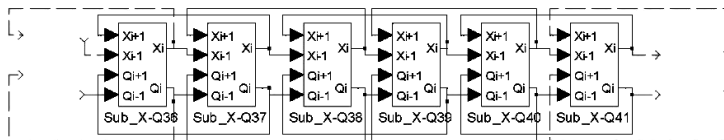


Рис. 9.4. Структурна реалізація ділянки колони

Слід зауважити, що рівняння системи (9.59)-(9.60) описують поведінку дискретних елементів, на які розбивається неперервний протяжний об'єкт з розподіленими параметрами. Наприклад, для протяжного однорідного стержня, який зазнає деформації розтягу-стиску і описується моделлю (9.51)-(9.53) апроксимаційна модель (9.59), фактично, відображає систему n зосереджених мас, зв'язаних між собою пружними зв'язками. При цьому складові моделі (9.59) мають конкретний фізичний зміст: перший доданок відображає силу інерції, другий — силу опору руху, третій — силу пружності і т. д. Тому для неоднорідних об'єктів можна змінювати параметри окремих рівнянь моделі, а також у кожне із рівнянь вносити додатково нелінійні залежності, які можна легко реалізувати у відповідній підсистемі *simulink*-моделі. Наприклад, якщо сила опору руху для k -того елемента залежить від квадрату його швидкості, то в *simulink*-моделі це відображається співвідношенням, де $f_k(t) = \mu(\dot{U}_k(t))^2$, μ — деяка постійна величина.

При побудові моделі бурильної колони зробимо припущення, що вона є однорідною на скінченій кількості ділянок ненульової довжини. Тоді в межах однієї такої ділянки будемо мати незмінні параметри. Розглянемо деякі з них.

Момент інерції ділянки колони масою m та довжиною l знаходимо з виразу

$$J = \frac{m(R^2 - r^2)l}{2},$$

де R та r , відповідно, зовнішній та внутрішній радіус колони.

Полярний момент інерції ділянки колони обчислюється за формулою

$$J_p = \frac{\pi d^4 \left(1 - \left(\frac{r}{R} \right)^4 \right)}{32},$$

де d — зовнішній діаметр колони.

Момент опору, викликаний силами в'язкості при обертальному русі колони в промивальній рідині, обчислюється за формулою Маргулеса

$$\tau = \frac{4\pi\eta h\varepsilon^2}{(\varepsilon^2 - 1)r_T} \omega; \quad \varepsilon = \frac{R_C}{r_T},$$

де η — коефіцієнт в'язкості для промивальної рідини; h — довжина ділянки колони; R_C — радіус свердловини; r_T — зовнішній радіус перерізу бурильної труби.

Важливим моментом в процесі побудови комп'ютерної моделі бурильної колони є відтворення взаємодії долота із забоем свердловини. При обертанні шарошечного долота відбувається складний процес перекочування зубців вінця шарошки по забою та їх вдавлення в породу, що викликає її руйнування. На рис. 9.5 схематично показано одноразовий акт перекочування зубця кінчної шарошки навколо миттєвого центру обертання B_1 (B_2). Внаслідок цього вісь шарошки переміщується з точки O_1 в точку O_2 , а корпус долота зміщується у вертикальному напрямі на величину

$$h = r_e \left(\cos \left(\frac{\pi}{z} - \omega_u t \right) - \cos \frac{\pi}{z} \right) \sin \beta,$$

де ω_{rc} — кутова швидкість обертання шарошки; r_e — радіус периферійного вінця шарошки; z — число зубців шарошки; β — кут між віссю долота і віссю шарошки.

При повороті шарошки на кут $\varphi = \omega_{rc} t$ виникає момент сили, прикладений до осі шарошки

$$M_{uu} = r_e P t g \left(\varphi - \frac{\pi}{z} \right),$$

де P — сила, що діє на долото з боку бурильної колони. В положенні $\varphi = 0$ момент сили M_{rc} змінює знак, тобто на проміжку $[-\varphi_{\max}, 0]$ момент сили протидіє обертальному руху долота, а на проміжку $[0, \varphi_{\max}]$ прискорює його.

Особливістю процесу перекочування шарошки є те, що час t і кут $\varphi = \omega_{rc} t$ знаходяться в проміжках відповідно $0 \leq t \leq T_1$ і

$$0 \leq \omega_{rc} t \leq \frac{2\pi}{z}, \text{ де } T_1 \text{ — час перекочування шарошки із зубця на зу-}$$

бець. Параметри h , T_1 визначаються виходячи із допущень, що всі шарошки долота синхронно перекочуються по забою, тобто одночасно контактують з ним то одним, то двома зубцями. В момент перекоку з одного опорного зубця шарошки на другий швидкість майже миттєво змінюється від максимального від'ємного значення до максимального додатного значення. В цей момент осьове прискорення теоретично прямує до нескінченності, а практично, враховуючи деформації елементів, набуває дуже великого значення.

Для відтворення залежностей, що пов'язані з передачею обертального руху долота шарошкам, а також взаємодії зубців з породою використовується підсистема, приведена на рис. 9.6. Вважається, що при повному оберті долота відбувається рівномірне руйнування породи без утворення забійної рейки.

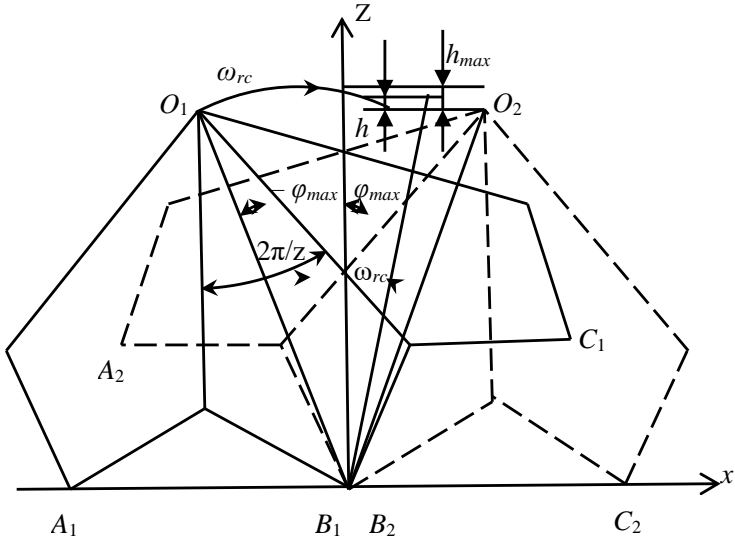


Рис. 9.5. Поворот периферійного вінця шарошки навколо миттєвого центру обертання

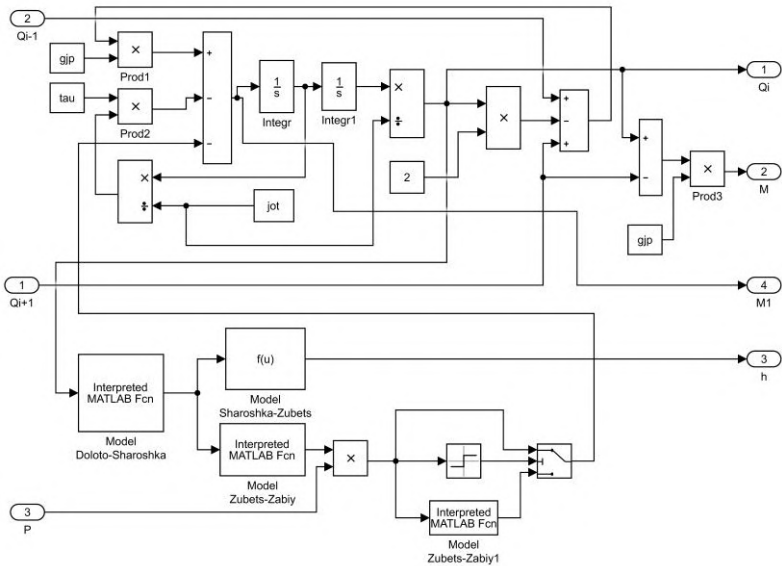


Рис. 9.6. Підсистема відтворення взаємодії долота з породою

Використаємо розроблені структурні елементи у вигляді підсистем для побудови моделі бурильної колони із урахуванням її позовжнього та обертального руху та взаємодії долота із забоем. Керуючими діями будемо вважати силу, прикладену зі сторони лебідки через талеву систему та момент сили зі сторони роторного столу або забійного двигуна. При цьому будемо враховувати: неоднорідність бурової колони внаслідок використання різнотипних бурильних труб; деформацію бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, викликані взаємодією промивальної рідини зі стінками колони; виштовхувальну силу та інерцію стовпа промивальної рідини; сили опору при взаємодії долота з породою та при перекочуванні шарошок. Вихідні параметри моделі представлені в таблиці 9.2.

Таблиця 9.2

Основні параметри механічної частини бурової установки

Параметр	Значення
Зовнішній діаметр Стальної Бурильної Труби (СБТ)	127 мм.
Довжина свічки (3 бурильні труби СБТ)	36.6 м
Внутрішній діаметр труби СБТ	113 мм.
Довжина Поважченої Бурильної Труби (ПБТ)	12.0 м
Зовнішній діаметр ПБТ	178 мм.
Внутрішній діаметр ПБТ	88 мм.
Коефіцієнт опору відносно швидкості свічки	920 Н·с/м
Густина речовини труби	7990 кг/м ³
Маса свічки зі СБТ	771.7151 кг
Маса ПБТ	1802.8 кг
Модуль Юнга для матеріалу труби	2.06 E+11 Н/м ²
Густина промивальної рідини	1150 кг/м ³
Коефіцієнт жорсткості для свічки із СБТ	1.5141 E+7 Н/м
Коефіцієнт жорсткості для свічки із ПБТ	3.2904 E+8 Н/м
Маса вишки	1.5 E+4 кг
Коефіцієнт жорсткості вишки	1.02 E+8 Н/м
Швидкість пружної деформації матеріалу труби	5.1267 E+3 м/с
Модуль пружності при зсуві	8.0 E+10 н/м ²
Погонний момент інерції СБТ	11.8628 кг·м
Полярний момент інерції СБТ	9.5325 E-6 м ⁴
Погонний момент інерції ПБТ	64.7377 кг·м
Полярний момент інерції ПБТ	9.2668 E-5 м ⁴
Коефіцієнт в'язкості промивальної рідини	0.014 Па·с
Діаметр долота	190 мм
Діаметр шарошок	120 мм
Число зубців шарошки	24
Кут між віссю долота і шарошки	52°

Комп'ютерну модель колони бурильних труб подаємо у вигляді simulink-моделі зі з'єднанням підсистем, як приведено на рис. 9.4. Кожна підсистема моделює динаміку однієї бурильної труби в колоні. По мірі нарощення колони буде збільшуватись кількість підсистем моделі. В модель також входять ланки для відтворення динаміки бурової вишки, забійного двигуна, інерції промивальної рідини в свердловині, взаємодії долота з породою. Також в simulink-моделі присутні модулі для генерації вхідних впливів та реєстрації і відображення результатів. За допомогою отриманої моделі було проведено ряд обчислювальних експериментів. На рис. 9.7 відображено результати моделювання взаємодії шарошечного долота із дном свердловини.

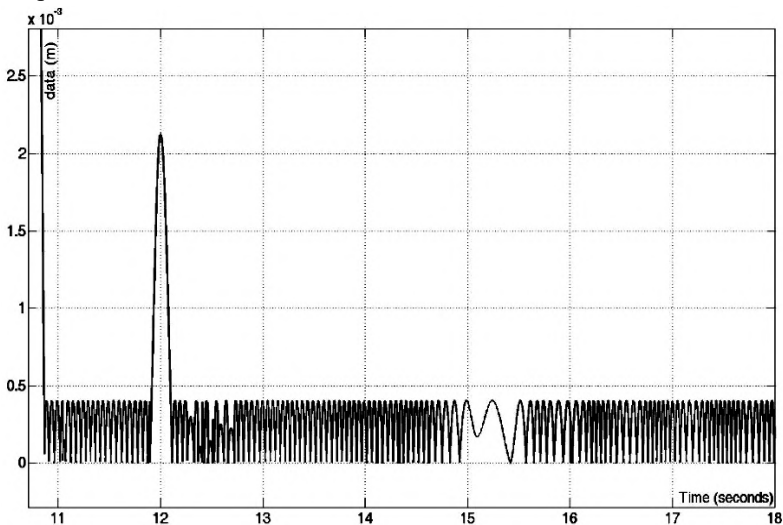


Рис. 9.7. Графік коливань корпусу долота

Колона в початковий момент часу знаходилась у підвішеному стані в промивальній рідині на висоті 0,42 м від дна свердловини. Для спуску колони було зменшено зусилля на крюку талевої системи на 7060 Н. В момент часу 10,78 с відбувся контакт шарошок долота з дном свердловини. На графіку спостерігається складний характер коливань долота, який викликаний в першу чергу змінами динамічного зусилля з боку колони на долото, а також силами, що виникають під час перекочування шарошок по забою. Також було отримано графік зміни навантаження на долото (рис. 9.8) при його контакті з дном свердловини.

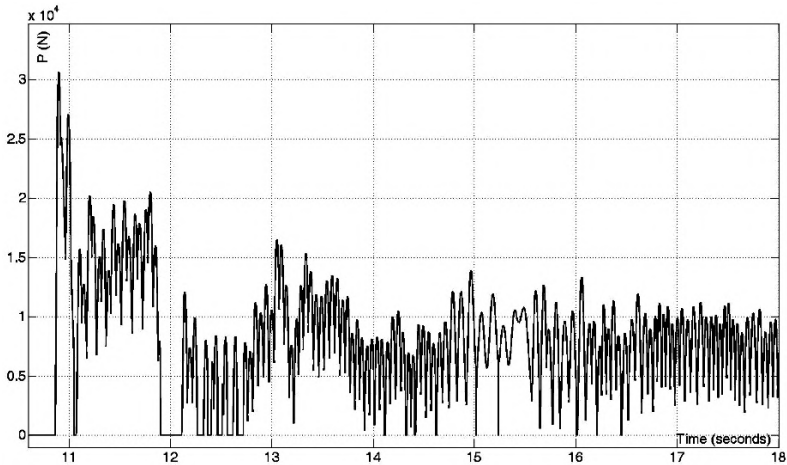


Рис. 9.8. Графік зміни навантаження на долото

Отже, на основі запропонованої апроксимаційної моделі у вигляді систем звичайних диференціальних рівнянь побудовано комп'ютерну модель бурильної колони, яка має ряд важливих властивостей: дозволяє відтворювати зміну фізичних параметрів на ділянках колони; відображати нелінійні залежності; модель є оборотною, що дає можливість здійснювати входні впливи і отримувати відгуки на рівні будь-якого структурного елементу моделі. Також модель дає змогу враховувати: неоднорідність бурильної колони при використанні різнотипних бурильних труб; деформацію бурової вишки при навантаженні та її інертність; сили опору, що викликані взаємодією промивальної рідини зі стінками колони; дію виштовхувальної сили, а також інерцію стовпа промивної рідини; силу опору при взаємодії долота з породою; перетік енергії при обертальному і поступальному русі колони внаслідок перекошування шарошок.

Наведені результати моделювання свідчать, що отримана модель може з успіхом використовуватися як на стадіях проектування обладнання бурової установки та розрахунку компоновки бурильної колони, так і в системі управління для підтримки оптимальних режимів буріння при проходці свердловини, а також для оптимізації спуско-підйомних робіт. Крім того, модель може використовуватись в системі керування при проходці свердловини для підтримки оптимальних режимів буріння та для оптимізації спуско-підйомних робіт.

9.3. Отримання спрощеної математичної моделі газотурбінного двигуна за каналом подачі палива

Енергетичний параметр ГТД двигуна у вигляді степеня підвищення тиску $\pi_{кст} = \pi_{\kappa}(G_T)$, що визначає тягові характеристики ГТД, може бути знайдений за змінними в часі витратами палива $(G_T) = G_T(t)$. В таблиці Д.1 наведені моделі 3-го порядку, що характеризують зміну π_{κ} при різних вхідних значеннях витрат палива G_T .

Знайдемо набір спрощених моделей для моделі №1 з табл. 9.3. Для цього використаємо допоміжні модулі *sde1*, *sde2*, *sde3*, *sde4*, *mdc* та *del*, що реалізують різні методи спрощення і порівняємо похибки їхньої апроксимації.

Вказані моделі мають розмірність — три і їх не дуже зручно в такому вигляді застосовувати при побудові адекватних та комп'ютерно-орієнтованих математичних моделей авіаційних двигунів. Було б добре спростити ці моделі до другого порядку. Моделі у вигляді полюсів та нулів системи не завжди вдається спростити так щоб похибка апроксимації була прийнятною.

Для ефективного спрощення перетворимо засобами системи Matlab дані моделі у форму, що представляється диференціально-алгебраїчною системою, заданою матрицями *A*, *B*, *C*, *D* в просторі станів. Для безпосереднього спрощення моделей використаємо методи виділення домінуючих власних значень, такі як методи Девісона, Маршала та методи MatchDC та Truncate, що реалізовані в системі Matlab її розробниками. Після цього знову виконаємо перетворення вже спрощених моделей у моделі задані за допомогою полюсів та нулів системи. Використовується пакет Model Transformation Toolbox.

Побудуємо амплітудно-частотну, фазово-частотну характеристики, графіки реакції системи на ступінчатий та імпульсний сигнали, діаграму Найквіста (АФЧХ), графіки абсолютних похибок при різних вхідних сигналах (рис. 9.9-9.18) для спрощених та початкової моделі з кількістю палива на вході 0.13235 од. Нумерація кривих на рис. 9.9-9.14 відповідає номерам методів апроксимації поданих в таблиці 9.4. Криві, що відповідають початковій (вхідній) системі (моделі) мають номер — 0.

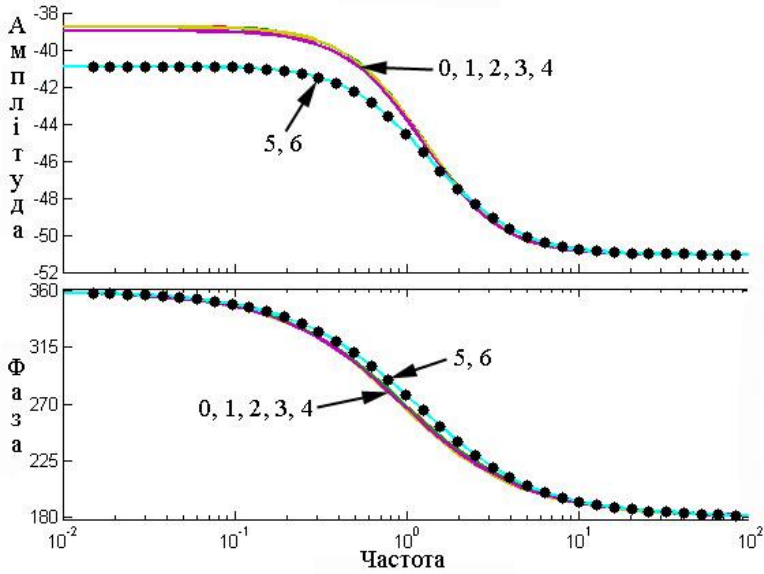


Рис. 9.9. Амплітудно-частотна та фазово-частотна характеристики

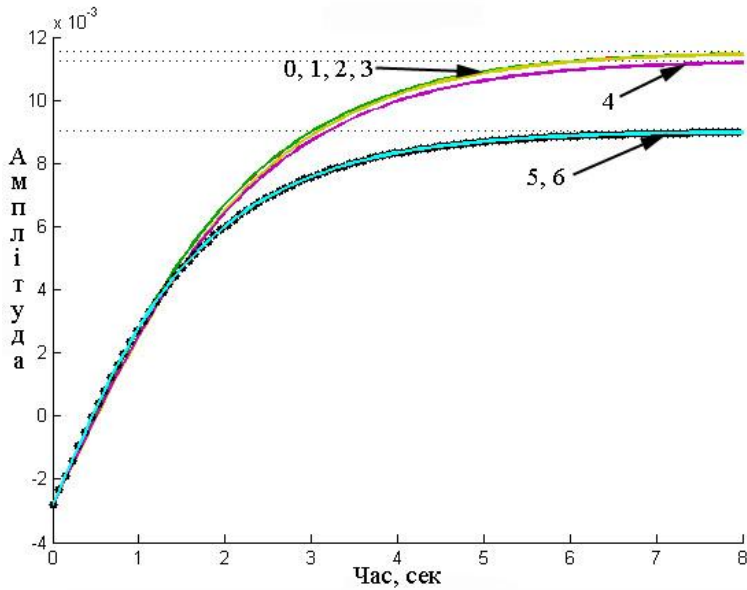


Рис. 9.10. Реакції моделей на ступінчастий вхідний сигнал

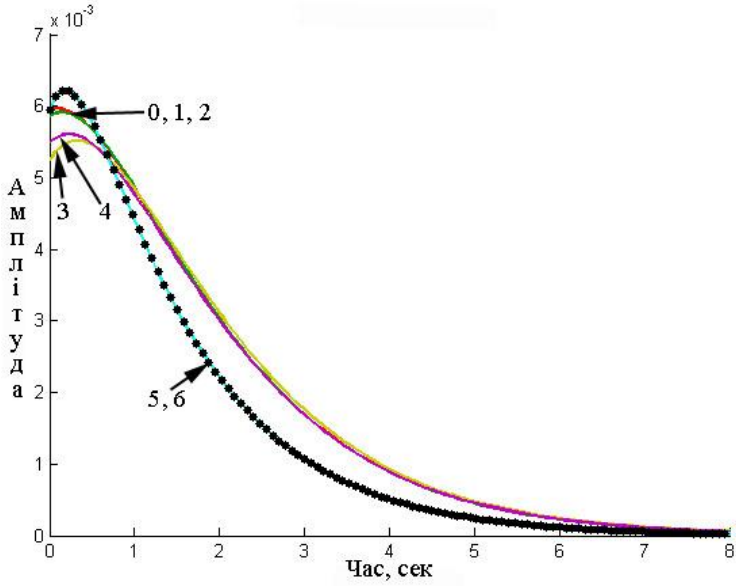


Рис. 9.11. Реакції моделей на імпульсний вхідний сигнал

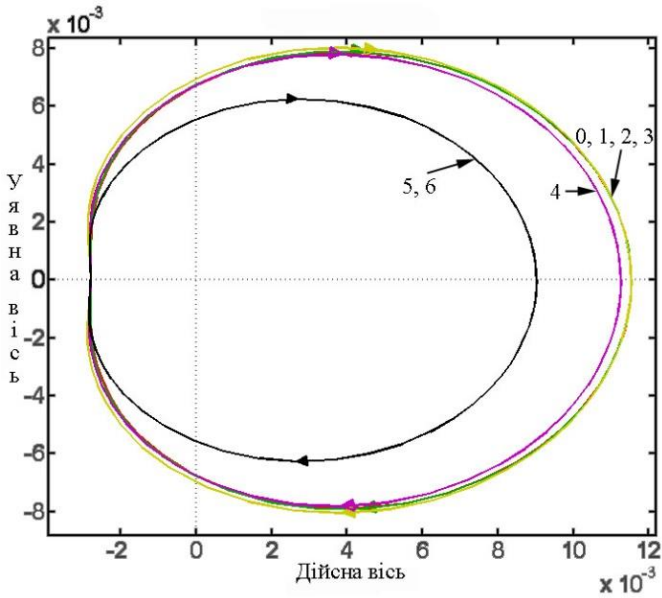
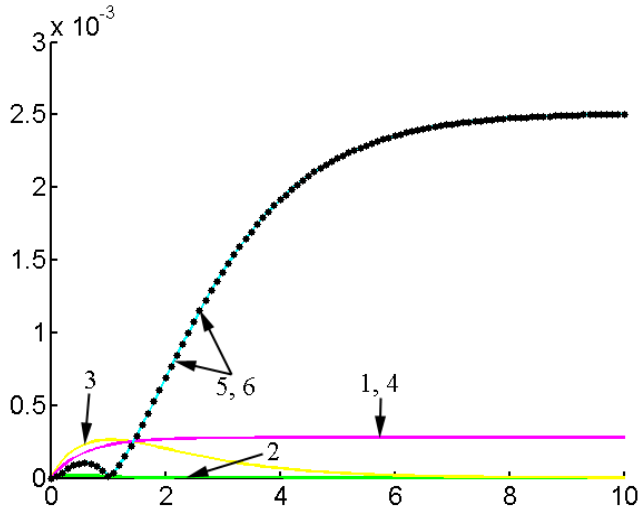
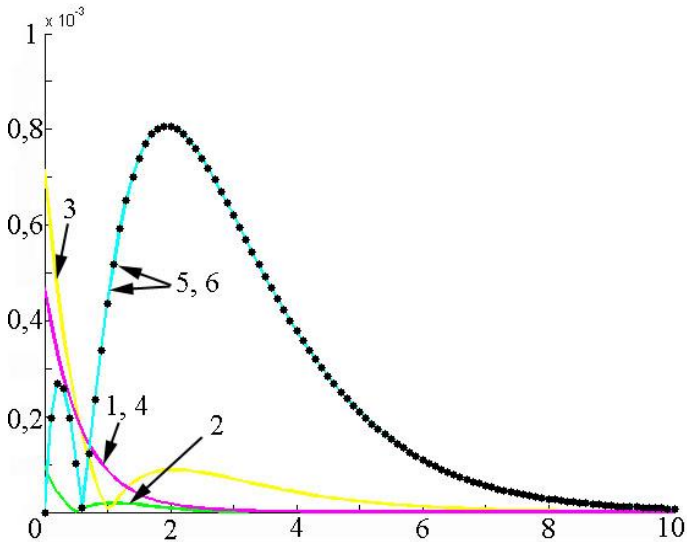


Рис. 9.12. Діаграма Найквіста (АФЧХ)



*Рис. 9.13. Графіки абсолютних похибок
апроксимаційних моделей
при вхідному ступінчастому сигналі*



*Рис. 9.14. Графіки абсолютних похибок
апроксимаційних моделей
при вхідному імпульсному сигналі*

Таблиця 9.3

*Спрошені моделі газотурбінного
двигуна по каналу подачі палива*

№ п/п	Витрати палива, од	Моделі задані за допомогою полюсів та нулів сис- теми
1	0.13235	(s-1.953) (s+1.681) zpk2=-0.0028012 ----- (s+0.7361) (s+1.083)
2	0.22059	(s+3.846) (s-0.9105) zpk2=-0.0016985 ----- (s^2 + 3.929s + 4.586)
3	0.29412	(s^2 + 11.54s + 38) zpk2=0.0036054 ----- (s-2.609) (s+1.827)
4	0.35294	(s-4.742) (s+3.953) zpk2=-0.0033286 ----- (s-2.874) (s+1.777)
5	0.44118	(s^2 — 8.108s + 21.86) zpk2=-0.0021345----- (s-3.256) (s+1.708)
6	0.58824	(s+138.2) (s-5.925) zpk2=0.0001293 ----- (s-3.64) (s+1.846)
7	0.67647	(s+5.574) (s-4.657) zpk2=0.0061914 ----- (s-3.951) (s+1.853)
8	0.73529	(s+82.05) (s+6.018) zpk2=0.0001773 ----- (s-4.081) (s+1.955)
9	0.79412	(s-5.385) (s+2.523) zpk2=0.0058566 ----- (s-4.048) (s+1.913)
10	0.88235	(s-6.049) (s+0.9528) zpk2=0.0054163 ----- (s-4.136) (s+2.022)
11	1	(s-6.001) (s+0.9226) zpk2=0.0057039 ----- (s-4.188) (s+2.153)

Після спрощення моделей в просторі станів, перетворимо найкращі з них у той же вигляд, що й початкова модель, тобто у модель задану полюсами та нулями системи (табл. 9.3).

Формування макромоделі системи регулювання подачі палива двигуна внутрішнього згорання. Нехай маємо структурну схему

системи регулювання швидкості подачі палива двигуна внутрішнього згорання, що зображена на рис. 9.15.

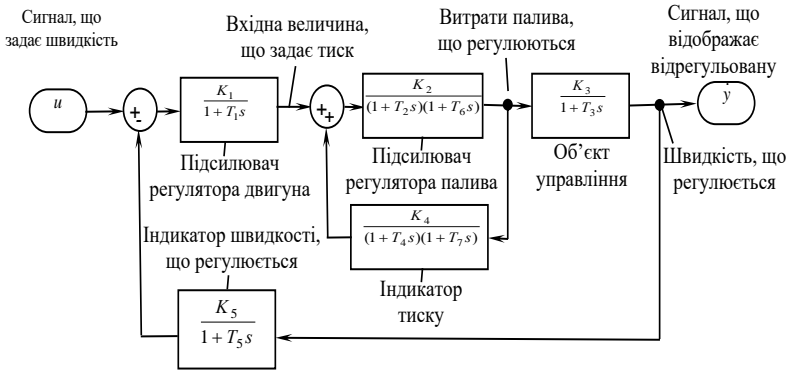


Рис. 9.15. Структурна схема системи регулювання швидкості подачі палива

На рис. 9.15 коефіцієнти передатних функцій дорівнюють: $K_1 = 0,318$, $K_2 = 45$, $K_3 = 0,95$, $K_4 = 0,0083$, $K_5 = 1,00$, $T_1 = 0,0195$, $T_2 = 0,010$, $T_3 = 2,00$, $T_4 = 0,025$, $T_5 = 0,013$, $T_6 = 0,050$, $T_7 = 0,0065$.

В цій схемі основною змінною, що регулюється, є швидкість, яка вимірюється за допомогою індикатора швидкості і порівнюється зі входним сигналом u системи. Розбіжність по швидкості діє на підсилювач регулятора двигуна, щоб встановити входний сигнал тиску, який задається. Цей тиск додається до того тиску, який створюється кількістю палива, що протікає. Сигнал розбіжності регулятора палива діє на підсилювач регулятора палива. Для заданих робочих умов витрати палива характеризують значення швидкості, що регулюється.

Для аналізу даної систем управління побудуємо її макромодель у вигляді однієї передатної функції того ж порядку яка має найпростіший вигляд і з достатньою точністю в інженерних розрахунках апроксимує складну систему управління зі зворотними зв'язками.

Побудувавши систему регулювання швидкості подачі палива, що зображена на рис. 9.15 в середовищі Simulink, отримуємо вектори коефіцієнтів чисельника та знаменника передатної функції (макромоделі) того ж порядку, що і початкова система.

$$B_m = [0 \ -5.6843e-014 \ -4.3656e-011 \ -5.5879e-009 \ 6.9715e+005 \ 1.8877e+008 \ 1.4686e+010 \ 3.3001e+011]$$

$$A_m = [1 \ 442.55 \ 75818 \ 6.4296e+006 \ 2.7921e+008 \ 5.6226e+009 \ 4.3528e+010 \ 3.4522e+011]$$

Тобто отримуємо передатну функцію такого виду

$$H(s) = \frac{6.972 \cdot 10^5 s^3 + 1.888 \cdot 10^8 s^2 + 1.469 \cdot 10^{10} s + 3.3 \cdot 10^{11}}{s^7 + 442.6 s^6 + 7.6 \cdot 10^4 s^5 + 6.4 \cdot 10^6 s^4 + 2.8 \cdot 10^8 s^3 + 5.6 \cdot 10^9 s^2 + 4.4 \cdot 10^{10} s + 3.5 \cdot 10^{11}}$$

Похибки апроксимації складної структурно-функціональної моделі системи регулювання подачі палива двигуна внутрішнього згорання представлені в табл. 9.4.

Таблиця 9.4

Похибки апроксимації

Тип вх. сигналу	Відносна, %	Середньо-квадратична	Середня абсолютна
Ступінчатий	5.5857e-015	2.3028e-015	2.1629e-015
Імпульсний	0	0	0

Побудуємо для складної моделі і її макромоделі амплітудно-частотну, фазово-частотну характеристики, графіки реакцій моделей на ступінчатий та імпульсний сигнали, діаграму Найквіста (АФЧХ), графік абсолютної похибки тільки для випадку коли ступінчатий вхідний сигнал, оскільки, як видно з табл. 9.4 для випадку імпульсного вхідного сигналу — абсолютні похибки дорівнюють нулю (рис. 9.16-9.20). Номер один кривої відповідає складній структурно функціональній моделі, а два — макромоделі.

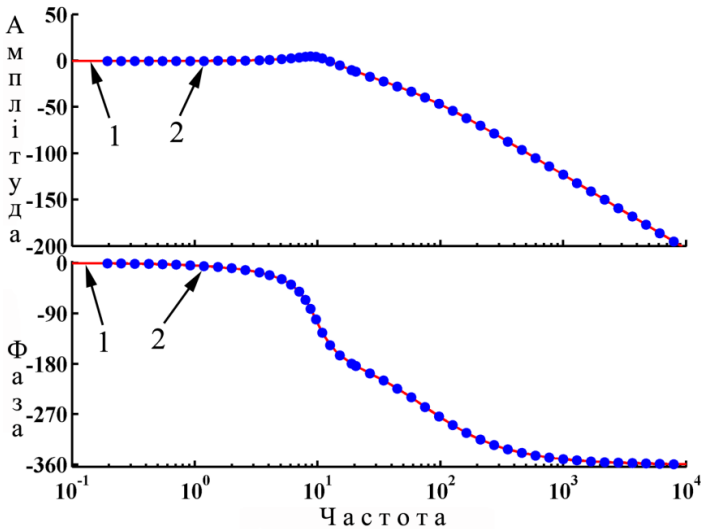


Рис. 9.16. Амплітудно-частотна та фазово-частотна характеристики

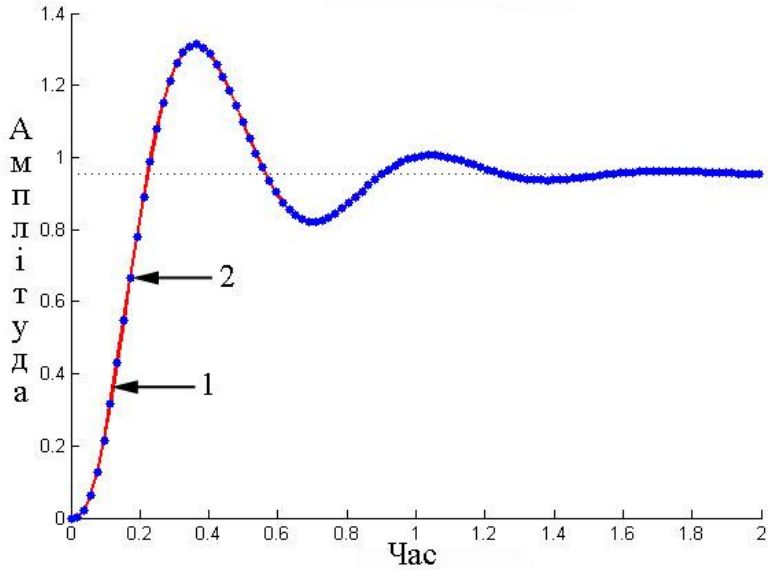


Рис. 9.17. Реакції моделей на ступінчастий вхідний сигнал

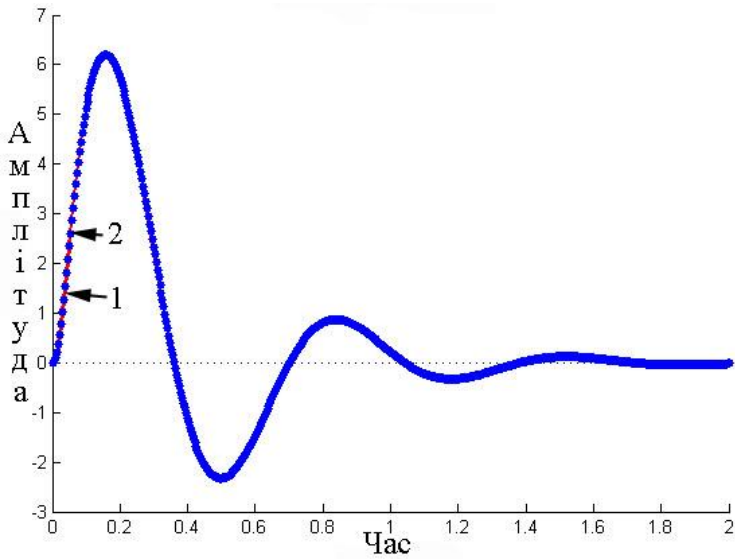


Рис. 9.18. Реакції моделей на імпульсний вхідний сигнал

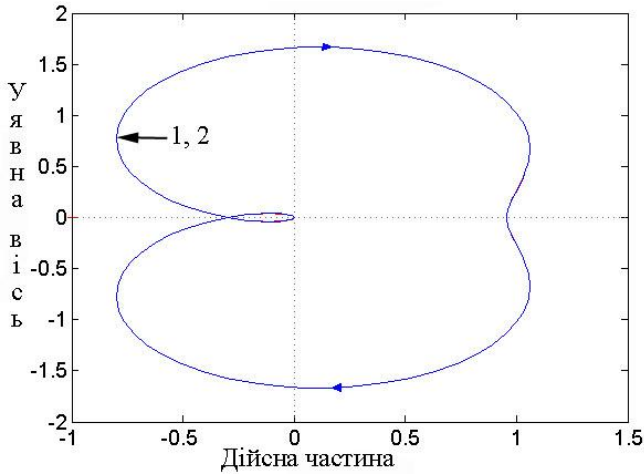


Рис. 9.19. Діаграма Найквіста (АФЧХ)

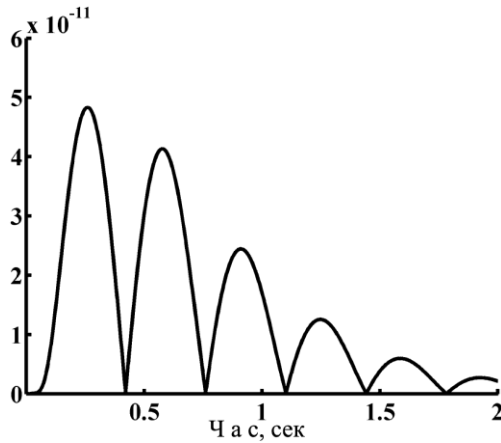


Рис. 9.20. Графік абсолютної похибки апроксимаційної моделі при входньому ступінчастому сигналі

Запропонований алгоритм структурно-функціонального перетворення моделей дозволяє отримувати макромоделі лінійних динамічних системи стосовно складних simulink-моделей, які задані в структурному вигляді.

ВИСНОВКИ

На основі аналізу найбільш суттєвих властивостей комп'ютерно-інтегрованих систем з ретельним розглядом найбільш розповсюджених прикладів силових енергетичних установок з характерним для цього класу систем призначенням і організацією обрані наступні підходи для розвитку і застосування досягнутих результатів в галузі математичного та комп'ютерного моделювання задач динаміки: використання принципу альтернативності різних форм динамічних моделей з ефективним застосуванням інтегральних динамічних моделей у вигляді операторів і рівнянь типу Вольтерри; застосування принципу та методів математичної редукції для отримання спрощених робочих динамічних моделей; адаптаційний вибір методів чисельної реалізації динамічних моделей та побудови відповідних алгоритмів зі зниженою обчислювальною складністю; структурна організація програмних засобів для проведення обчислювальних експериментів і розв'язання прикладних задач, що забезпечує їх використання відповідно до існуючої інженерної практики.

Аналіз також свідчить, що, не дивлячись на те, що базовими моделями великої частки фізичних об'єктів комп'ютерно-інтегрованих систем є рівняння з частинними похідними, вони практично не використовуються. Робочі моделі представлені різними формами традиційних одновимірних (скалярних) моделей, які отримуються, як правило, шляхом ідентифікації моделей всіх функціональних елементів у складі фізичних об'єктів системи. Запропоновано підхід до побудови робочої динамічної моделі фізичної частини системи полягає у виборі однієї із форм одновимірної моделі з урахуванням особливостей задачі, що моделюється, та допустимим спрощенням.

При вирішенні задачі формування робочої динамічної моделі принцип альтернативності моделей надає можливість широкого вибору однієї із форм можливих математичних залежностей, яку, не дивлячись на аналітичну еквівалентність, можуть суттєво розрізнятися за критерієм обчислювальної складності, оскільки реалізуються за допомогою різних за своєю якістю обчислювальних схем. При цьому вибір моделі здійснюється шляхом обчислювальних експериментів. Для застосування інтегральних динамічних моделей, які володіють згладжуючими властивостями при побудові моделей за експериментальними даними, запропоновані відповідні форми у вигляді

явних моделей, тобто інтегральних операторів, які мають однакову структуру для об'єктів із зосередженими і розподіленими параметрами. Моделі цього виду відносяться також до класу економічних макромоделей. Крім того, запропонована загальна форма інтегральних моделей у вигляді системи інтегральних рівнянь Вольтерри II роду для опису багатозв'язних динамічних систем, що забезпечує безпосередню структурну реалізацію програмними засобами.

Для отримання широкого кола моделюючих виразів запропонований узагальнений метод еквівалентного перетворення диференціальних рівнянь — у інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння, що включає відомі методи послідовного інтегрування. Для побудови спрощених динамічних моделей сформульовано відповідний принцип спрощення і корегування моделюючих залежностей, що базується на введенні функції узгодженості (критерію якості) математичної моделі та оптимізаційному пошуку необхідного результату. Наведені шляхи реалізації процесів спрощення моделей. У випадку об'єктів з розподіленими параметрами запропоновано метод структурного спрощення, який здійснює перехід від базових рівнянь з частинними похідними до спрощеної моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь на основі інтерполяційного підходу; метод забезпечує значну перевагу спрощеної моделі при обмежених часових ресурсах інформаційної частини комп'ютерно-інтегрованої системи.

Необхідність забезпечення процесів функціонування комп'ютерно-інтегрованих систем у реальному часі, а також відповідні вимоги до апаратної частини підсистем керування і контролю, обсягу пам'яті, надійності та безпеки суттєво впливають на рівень складності математичних описів динамічних процесів у системах. Це потребує застосування замість складних математичних описів більш простих моделей, призначених для задач побудови систем і моделювання. Виходячи з практичних міркувань задачу корегування динамічної моделі пропонується ставити як задачу уточнення або визначення параметрів моделі. Спираючись на ідею узгодження виду моделі з точністю вихідних даних, формулюється задача «точнісної» редукції як задача мінімізації функціоналу складності на класі моделей, які можна співставити за точністю зі спостереженнями. Конструктивність процедури спрощення моделі за принципом «точнісної» редукції забезпечується запропонованим визначенням коефіцієнта узгодженості α , як точнісної характеристики редукційної моделі. Застосування міри складності моделі при цьому дозволяє отримати практичний вираз для визначення оптимально спрощеної

моделі. У випадку ускладнень, пов'язаних з оцінкою сигнальних показників точності моделей, доцільне використання параметричного підходу до побудови спрощених моделей, сутність якого полягає у заміні значень певних параметрів вихідної моделі на такі значення, які зменшують значення міри обчислювальної складності спрощених моделей. Введені поняття дозволяють отримати суттєвий теоретичний результат для методів редукції моделей, а саме: для будь-якої моделі з неточно заданими параметрами, за умови, що похибка змінних на виході є зростаючою та обмеженою функцією від похибки параметрів, існує спрощена α -узгоджена модель, яка відрізняється від початкової значеннями деяких параметрів, що зменшують міру обчислювальної складності. Отримані результати забезпечують можливість алгоритмічної та програмної організації процесів математичної редукції.

Технічна частина силових енергетичних установок, як правило, представляє собою складний фізичний об'єкт з розподіленими параметрами, базовим математичним описом яких є диференціальні рівняння з частинними похідними. У зв'язку з принциповою складністю чисельних методів і програмної реалізації цих моделей суттєво актуальною стає задача розвитку методів математичного і комп'ютерного моделювання об'єктів з розподіленими параметрами шляхом розробки, дослідження і застосування методів побудови і числової реалізації структурно-спрощених динамічних моделей вказаного класу об'єктів, які мають необхідний рівень адекватності, найменшу складність серед альтернативних варіантів та орієнтованих на ефективну числову і комп'ютерну реалізацію. Ефективна числова реалізація числової реалізації структурно-спрощених математичних моделей динамічних об'єктів вказаного класу забезпечує створення вбудованих програмних засобів для розв'язання задач функціонування технічних систем при наявності часових і ресурсних обмежень. Аналіз результатів досліджень за тематикою, що досліджувалась, визначає основні підходи і особливості задач побудови спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами, основними серед яких є принцип розділення змінних, операційні методи і метод інтегральних перетворень; перспективним є інтерполяційний підхід, для прикладної реалізації якого необхідне здійснення відповідних досліджень і розробок; реалізація інтерполяційного підходу до спрощення математичних моделей передбачає формування відповідних математичних моделей і оціночних виразів, що дозволяють обґрунтувати можливість і доцільність спрощення математичних описів, а також оцінки якості математичних моделей і

можливі процедури виконання операцій спрощення. В роботі запропонований та досліджений інтерполяційний метод (метод опорних перерізів) отримання спрощених моделей об'єктів з розподіленими параметрами у вигляді скалярних диференціальних рівнянь на основі вихідних (базових) описів у формі диференціальних рівнянь з частинними похідними; отримані звичайні диференціальні рівняння визначаються залежностями для невеликої кількості перерізів об'єкта, що моделюється, а їх розв'язок дозволяє представити розв'язок вихідної задачі у вигляді простого полінома; метод практично інваріантний відносно форми базової моделі та ефективно алгоритмізується і забезпечує побудову економічних швидкодіючих програмних засобів, що підтверджуються обчислювальними експериментами. За допомогою методу опорних перерізів отримані спрощені моделі у вигляді звичайних диференціальних рівнянь об'єктів з розподіленими параметрами параболічного типу з симетричними і несиметричними граничними умовами, а також для аналогічних задач в циліндричній системі координат; апробація спрощених моделей шляхом тестових обчислювальних експериментів при розв'язуванні модельних задач підтверджує працездатність методу і ефективність програм, що його реалізують; порівняння отриманих результатів спрощеного моделювання з результатами реалізації базових (повних) моделей за допомогою типових різницевих алгоритмів свідчить про значну перевагу запропонованого методу як по простоті обчислювальних процедур, так і по часу, витраченому на розв'язування.

Вирішено важливу науково-технічну задачу, яка полягає у синтезі математичних моделей визначеного класу мобільних об'єктів та засобів керування цими об'єктами на основі застосування і удосконалення безпошукових самоналагоджуваних систем з еталонною моделлю, що забезпечує оптимізацію зазначених систем у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі для ефективного розв'язання прикладних задач. Проведено аналіз математичних моделей типових систем керування та виконано узагальнення їх математичного опису, внаслідок чого запропоновано узагальнену модель, яка, зокрема, визначає вид диференціальних рівнянь, їх коефіцієнти, їх розмірність тощо. Узагальнення математичного опису здійснено з метою уніфікації методів щодо синтезу стратегій адаптивного керування визначеним класом об'єктів. Виконано якісне дослідження узагальненої моделі, що показало можливість переходу до еквівалентних математичних формулювань у випадках апаратної або програмної реалізації законів

керування. Сформульовано мету та задачі керування об'єктів та обґрунтовано необхідність адаптації при керуванні ними. Виконано аналіз та порівняльну характеристику існуючих принципів побудови автоматичних систем керування з урахуванням особливостей об'єктів керування. В результаті проведеного аналізу виділено клас адаптивних систем з еталонною моделлю як такий, що забезпечує високу адекватність синтезованого управління (з точністю до відтворення моделлю динаміки реального об'єкта), високу швидкодію (управління формується в реальному масштабі часу) та просту апаратну реалізацію. Досліджено також можливість застосування програмних засобів (програмної платформи Matlab) для розв'язання задачі синтезу адаптивного управління об'єкту, зокрема, при математичній формалізації системи керування у просторі станів. Набув подальшого розвитку метод синтезу законів адаптивного керування визначеним класом об'єктів, а також структур систем керування з еталонною моделлю, що реалізують ці закони. В основу синтезу законів керування та вказаних структур покладено властивість виконання сталості процесу самоналагоджування (яка визначається за другим методом Ляпунова). Це дозволило врахувати обмеження на управляючий вплив. Задачу синтезу розв'язано для систем з параметричним настроюванням (тобто активним настроюванням, коли ефект самонастроювання досягається за рахунок зміни параметрів пристрою управління), з сигнальним настроюванням (тобто пасивним настроюванням, коли ефект самонастроювання забезпечується за рахунок компенсуючих сигналів), а також з комбінованим настроюванням, що забезпечує достатню динамічну точність при простій апаратній реалізації. Виконано оптимізацію синтезованих систем керування з еталонною моделлю у розумінні найкращого наближення характеристик об'єкта керування та еталонної моделі, що забезпечує мінімізацію часу узгодження вихідних координат об'єкту та еталонної моделі (системи, оптимальні за швидкодією).

В задачі ідентифікації і у задачі діагностики ми маємо справу з недовизначеними системами об'єкт-модель. Різниця полягає в тому, що в задачі ідентифікації недовизначеною є модель (у той час як об'єкт вважається в достатній мірі вивченим) і зусилля дослідників, спрямовані на довизначення моделі. У задачі ж діагностики недовизначеність, яку слід усувати, лежить в об'єкті. Але і в цьому випадку, як і при ідентифікації, зміни вносяться в модель із таким розрахунками, щоб властивості моделі виявилися ідентичними властивостям об'єкта. Ті зміни, які необхідно внести в модель для досягнення ідентичності з об'єктом при їх фізичній і інженерній інтерпретації, і

дають підстави для постановки діагнозу. Задача діагностики ставиться тоді, коли в об'єкті виникають відхилення від розрахункових режимів роботи і необхідно зрозуміти їх походження. Для цього вносяться певні зміни в модель об'єкта, мета яких — привести у відповідність поведінку моделі з поведінкою об'єкта. У більш простих випадках для цього досить змінити коефіцієнти рівнянь, не міняючи їх структури. У більш складних випадках доводиться змінювати і структуру моделі. Суттєву та визначальну роль у ефективному розв'язанні вказаних задач відіграє метод мінімізації функціоналу в оптимізаційному процесі досягнення результату діагностування чи ідентифікації. Ретельне дослідження методів мінімізації, що найбільш застосовуються в практиці, виконане шляхом обчислювальних експериментів. Результати вказують на явну перевагу методу найменших квадратів. Алгоритми мінімізації, за винятком методу найменших квадратів, мають важливий недолік, що обмежує їхнє застосування — наявність статистичних даних і маніпулювання випадковими процесами. Процедури модельного діагностування динамічних систем розглядаються як основні положення реалізації модельного підходу до діагностування систем при обмеженому доступі до їхніх внутрішніх точок. Розглядаються параметричні і структурні несправності, Підсистеми в лінійній системі при структурних несправностях можуть мати тільки дві з трьох діагностичних властивостей: незалежне спостереження й незалежне керування. Для підсистем з конкретною властивістю використовується відповідний метод діагностування.

Розглянуто задачу і методи адаптації обчислювальних алгоритмів при реалізації диференціальних та інтегральних динамічних моделей. Обмежені ресурси комп'ютерно інтегрованих систем визначають вимоги до швидкодії алгоритмів режимів функціонування обчислювально-керуючих систем, що свідчить про актуальність питання цільового вибору або адаптації чисельних методів розв'язання рівнянь динаміки об'єктів і велику історію розвитку цього питання процес вдосконалення чисельних методів не припиняється і зараз. Зростання складності досліджуваних динамічних об'єктів зумовила розвиток *неявних* методів чисельного аналізу динаміки, але проведені дослідження свідчать, що застосування неявних методів виправдано, коли можливий великий крок інтегрування вихідної системи або коли рівняння на кроці може бути розв'язане досить просто. Крім того, з'ясовано, що наявні результати по формалізації степеневих методів і адаптація їх при комп'ютерному використанні поки ще недостатні для вирішення питання про їх засто-

сування при дослідженні складних динамічних об'єктів. Обмеження кроку інтегрування зверху свідчить про недоцільність використання методів Рунге-Кутта високого порядку для цілей моделювання динаміки досліджуваних систем в реальному часі. Відповідно до квадратурних методів у загальному вигляді задача формалізації побудови не вирішена. Таким чином, задача оптимального вибору методу може бути сформульована так: потрібно визначити чисельний метод інтегрування рівнянь динаміки об'єкта, що моделюється, для якого необхідна швидкодія управляючої системи мінімальна, а похибка розв'язання рівнянь динаміки не перевищує заданого значення. Проведений аналіз властивостей різних груп чисельних методів дає змогу зробити висновок про те, що при виборі найкращого методу вихідну множину необхідних методів слід формувати на основі однокрокових методів типу Рунге-Кутта і квадратурних методів не вище четвертого порядку. При використанні стаціонарних режимів модельованих об'єктів в вихідну групу методів слід включати також багатокрокові методи — явні і типу «прогноз – корекція». При розв'язанні інтегральних рівнянь запропонований як найбільш ефективний метод виродженої резольвенти. Порівняння з іншими методами показало, що при розв'язанні тестової задачі на отримання результату методом квадратур знадобилося $0,2369 \cdot 10^{-2}$ с; резольвентним методом потрібно було 5 ітеративних ядер і $0,2567 \cdot 10^{-2}$ с; методом вироджених ядер — $0,1859 \cdot 10^{-2}$ с; методом виродженої резольвенти — 5 ітеративних ядер і $0,1659 \cdot 10^{-2}$ с.

При виборі середовища моделювання визначаються основні параметри програмного засобу: достатньо повні функціональні можливості, наявність засобів для реалізації структурного підходу при побудові моделей; відкритість та гнучкість системи з можливістю доповнення новими спеціалізованими модулями; наявність власної мови програмування з можливістю створення нових програмних модулів; Вказаним параметрам відповідають такі середовища моделювання як Matlab та SciLab. Системи інструментальних засобів для виконання перетворення моделей динамічних об'єктів на основі запропонованих алгоритмів складається з дванадцяти основних функцій, призначених безпосередньо для виконання еквівалентного та апроксимаційного перетворення моделей динамічних об'єктів, а також з семи допоміжних функцій. Засоби формування і реалізації моделей об'єктів із розподіленими параметрами складаються із підпрограм і функцій, які можуть у подальшому удосконалюватися і розвиватися. Вони включають три основні модулі, які

виконують структурне спрощення базових моделей та чисельно реалізують спрощені моделі. Програми для реалізації динамічних макромоделей організовані у вигляді комплексу, використовуючи модульний принцип організації, у відповідності з яким програми розбиваються на декілька підпрограм і функцій, що допускають їх подальший розвиток та корекцію. Розроблений комплекс складається із 10 основних модулів, призначених безпосередньо для числової реалізації видів макромоделей, що розглядаються. Комплекс програм для розв'язання інтегральних динамічних моделей виконано за принципом побудови типового ToolBox з урахуванням вимог згідно з інформацією, що розміщена компанією. Комплекс складається з 23 програм, які охоплюють всі основні види інтегральних рівнянь та методи розв'язання їх на основі розщеплених ядер, що є, по суті, завершеним інструментарієм для апробації і порівняння у повному обсязі алгоритмів, запропонованих у роботі, для розв'язування тестових прикладів і складних прикладних задач.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Аверіна Т. В., Кубрак Н. А. Динаміка елементів систем: навч. посібник Київ: ІЗМН, 1998. 224 с.
2. Башняков О. М., Пічкур В. В. Задача синтезу в теорії керування. Київ: Вид-во «Сталь», 2012. 116 с.
3. Бейко І. В., Зінько П. М., Наконечний О. Г. Задачі, методи і алгоритми оптимізації. Рівне: НУВГП, 2011. 624 с.
4. Белов Ю. А., Диденко В. П., Козлов Н. Н., Ляшко И. И., Макаров В. Л., Цитрицкий О. Е. Математическое обеспечение сложного эксперимента: в 5-ти томах. Т.2. Математические модели при измерениях. Киев: Наукова думка 1983. 264 с.
5. Бобух А. А., Ковалев Д. А. Компьютерно-интегрированная система автоматизации технологических объектов управления централизованным теплоснабжением: монография / под общ. ред. А. А. Бобуха. Харьков: ХНУГХ. 2013. 226 с.
6. Бублик Б. Н., Кириченко Н. Ф. Основы теории управления. Киев: Вища шк., 1975. 327 с.
7. Булавацький В. М., Кривонос Ю. Г., Скопечкий В. В. Некласичні математичні моделі процесів тепло- та масопереносу. Київ: Наук. думка. 2005. 284 с.
8. Верлань А. А., Гази А. Алгоритм идентификации непрерывных объектов на основе интегральных динамических моделей. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. пр. ПМЕ НАНУ. 2003. Вип. 25. С. 105-112.
9. Верлань А. Ф., Верлань А. А., Верлань, Положаенко С. А. Алгоритмизация методов точностной параметрической редукции математических моделей. *Информатика та математичні методи в моделюванні*. Одеса: Одеський національний політехнічний університет, 2017. Т. 7, № 1-2. С. 7-18.
10. Верлань А. А., Сагатов М. В., Федорчук В. А. Интегральные динамические модели электромеханических объектов: монография. Ташкент: IQTISOD-MOLYA, 2015. 328 с.
11. Верлань А. Ф., Владимиров В. М., Верлань А. А., Горошко И. О. та ін. Моделювання електромагнітних і теплофізичних процесів в надпровідникових системах енергозабезпечення із структурою, що змінюється. *Структурно-алгоритмические методы и средства компьютерного моделирования сложных энергетических объектов с распределенными и переменными параметрами*. Заключение. отчет. № г/р 0101U000024. Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. Киев, 2004. Разд. 8. С. 285-306.
12. Верлань А. А., Федорчук В. А. Підходи до побудови скалярних динамічних моделей розподілених ланок керованих електромеханічних систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2016. Вип. 13. С. 49-61.
13. Сытник А. А., Верлань А. А., Амид Гази. Построение математических моделей технологических процессов для решения задач оптимизации управления. *Вісник Черкаського державного технологічного університету Комп'ютеризовані інформаційні технології та системи*. 2003. №3. С. 31-37.

14. Гушель Т. П., Верлань А. А., Юзвенко В. Ф. Сравнение методов упрощения динамических моделей посредством модельных экспериментов. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2003. Вип. 20. С. 108-112.
15. Верлань А. А., Іванюк В. А. Спрощення математичних моделей об'єктів з розподіленими параметрами на основі методу розщеплення. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2017. Т. 7, № 4. С. 285-291.
16. Верлань А. Ф., Евдокимов В. Ф. Электронное моделирование передаточных функций. Київ: Техніка, 1970. 232 с.
17. Верлань А. Ф., Верлань А. А., Горошко И. О. та ін. Алгоритмические основы реализации интегрального метода идентификации динамических объектов. Интегральные методы и компьютерные средства решения задач моделирования сложных динамических систем. *Математические методы и компьютерные средства повышения разрешающей способности систем технологического контроля и управления энергогенерирующего оборудования*: Заключит. отчет. № г/р 0103U000218.– Ин-т проблем моделирования в энергетике им. Г. Е. Пухова НАН Украины. Киев, 2006. Разд. 3, 5. С. 120-146, 200-231.
18. Верлань А. А., Сытник А. А. Математические модели моментов трения в уравнениях динамики управляемого движения. *Зб. наук. праць. ІПМЕ НАНУ*. 2002. Вип. 15. С. 71-75.
19. Верлань А. Ф., Верлань А. А., Гушель Т. П. Модель системы защиты от емкостных токов утечки в шахтных электрических сетях. *Електронне моделювання. ІПМЭ НАНУ*. 2002. Том 24. №6: ноябрь-декабрь. С. 11-16.
20. Верлань А. А., Федорчук В. А., Махович А. И. Интегральные модели переходных процессов в электрических цепях, содержащих звенья с распределенными параметрами. *Проблемы энерго и ресурсосбережения. Доклады республиканской научно-технической конференции АНРУз*. Ташкент, 22-23 декабря, 2014.
21. Верлань А. А. Approach to mathematical simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storage. *Современное состояние и перспективы развития информационных технологий*: доклады республиканской научно-технической конференции. Ташкент, 2011. Т. 2. С. 8-18.
22. Верлань А. А., Митько Л. А., Руденко А. Б. Алгоритм моделирования нелинейных периодических процессов на основе решения уравнения Урысона. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Київ, 1999. Вип. 3. С. 3-7.
23. Верлань А. А. Анализ диагностируемости объектов с перестраиваемой структурой. *Моделювання та інформаційні технології*: збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Е. Пухова НАН України. Київ, 2008. Вип. 45. С. 3-9.
24. Верлань А. А. Анализ методов и алгоритмов моделирования сверхпроводниковых систем энергообеспечения с изменяющейся структурой. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2004. Вип. 28. С. 89-94.
25. Верлань А. А., Махович А. И. Аппроксимационные модели нестационарных тепловых процессов в неограниченной пластине с несимметричными граничными условиями. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2014. Вип. 10. С. 42-55.

26. Верлань А. А., Гушель Т. П., Борковец В. И. Вероятностно-физическое моделирование отказов радиоэлектронных устройств при воздействии мощных радиационных и электромагнитных излучений. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2001. Вип. 11. С. 99-105.
27. Верлань А. А., Верлань А. Ф., Федорчук В. А., Стертен Ю. Вибір та адаптація чисельних методів при створенні алгоритмічних основ реалізації задіяних математичних моделей. *Створення методів і засобів математичного та комп'ютерного моделювання динамічних процесів в автономних енергетичних силових установках при побудові сучасних систем керування, діагностики і випробування*: звіт про наукову роботу. Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є. Пухова НАН України. № Держреєстрації 0111U007792. Київ, 2017. С. 114-155.
28. Верлань А. А., Положаєнко С. А., Осман И. Х. Декомпозиционный метод локализации неисправных электронных подсистем. *Електромашинобудування та електрообладнання*. Київ: Техніка, 2007. Вип. 69. С. 72-76.
29. Верлань А. А., Стертен Ю. Диагностирование сложных электронных схем на основе метода обучающих и проверочных характеристик. *International Scientific and Technical Conference Electrotechnic and Computer Systems: Theory and Practice*: Scientific and Technical Journal Electrotechnic and Computer Systems. № 19 (95). P. 272-276.
30. Верлань А. А., Ключка К. Н. Достаточные условия сходимости рядов Вольтерра для определенных классов нелинейных цепей. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2008. Вип. 45. С. 8-16.
31. Верлань А. А., Палагин В. В., Носик Т. А. Идентификация динамического объекта с переменными параметрами на основе метода «формирующего фильтра». *IV міжнародна наукова конференція «Моделювання-2012 / Simulation-2012»*: зб. наук. праць. Київ: ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України, 2012. С. 318-321.
32. Сагатов М. В., Верлань А. А. Интегральные модели многопараметрических первичных преобразователей. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. 2001. Вип. 9. С. 30-34.
33. Сагатов М. В., Верлань А. А. Интегральные модели однопараметрических первичных преобразователей. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. 2001. Вип. 8. С. 38-43.
34. Верлань А. А. Интегральный метод моделирования и анализа автономных систем энергообеспечения на основе полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователей. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей V міжнар. наук. конф.* / [редкол.: І. В. Бейко та ін.]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2012. С. 20-21.
35. Верлань А. А., Сагатов М. В., Сітнік А. А. Квадратурные алгоритмы моделирования измерительных преобразователей с распределенными параметрами. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Київ, 2000. Вип. 6. С. 131-136.
36. Верлань А. А., Волощенко А. Б., Сагатов М. В. Коллокационный алгоритм решения уравнения Вольтерры I рода. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ*. Київ, 2001. Вип. 13. С. 97-100.
37. Верлань А. А., Положаєнко С. А., Осман И. Х. Локализация неисправных электронных подсистем методом обучающих и проверочных характеристик.

- Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2008. Вип. 1. С. 140-144.*
38. Верлань А. А., Гвоздева И. М., Митько Л. А. и др. Математические и компьютерные методы исследования нелинейных и многосвязных динамических систем, описываемых интегральными и интегро-дифференциальными моделями. *Математическое и компьютерное моделирование неоднородных динамических систем с сингулярными свойствами применительно к задачам управления и экологической безопасности в энергетике: отчет о НИР (заключительный)*. ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины. № ГР 0106U000622. Киев, 2009. С. 64-91.
 39. Ситник О. О., Верлань А. А., Ключка К. Н. Метод формування інтегральних рівнянь нелінійних електричних кіл. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. 2008. Вип. 47. С. 59-70.*
 40. Верлань А. А., Палагін В. В. Методы редукции математических моделей динамических систем. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 8-ї Міжнародної наукової конференції. Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. 18-20 квітня 2018 р. С. 18-19.*
 41. Верлань А. А. Модели нестационарных процессов в силовых криотронах систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. 2004. Вип. 27. С. 101-107.*
 42. Сытник А. А., Верлань А. А., Первунинский С. М. Моделирование динамики электропривода (линейные модели 1). *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Прилади і радіотехніка. 2002. № 1. С. 36-40.*
 43. Сытник А. А., Верлань А. А., Первунинский С. М. Моделирование динамики электропривода (линейные модели 2). *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Прилади і радіотехніка. 2002. № 2. С. 74-79.*
 44. Верлань А. А. Моделирование процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях. *Uzbek Journal of the problems of Informatics and Energetics. «Издательство «Фан», Институт математики и информационных технологий АН РУз. Ташкент, 2011. Т. 5. С. 15-23.*
 45. Верченев А. Д., Верлань А. А., Михайленко А. Г., и др. Моделирование техногенного риска для опасных производственных объектов газотранспортных предприятий с использованием ГИС технологий. *Вчені записки Таврійського національного університету ім. В. І. Вернадського. Серія: Географія. 2012. Т. 61, № 1. С. 38-47.*
 46. Верлань А. А. Моделирование электромагнитных процессов в сверхпроводниковых системах энергообеспечения. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2004. Вип. 26. С. 111-119.*
 47. Сытник А. А., Верлань А. А., Первунинский С. М. Некоторые варианты математических описаний электропривода (нелинейные модели 3). *Вісник Черкаського державного технологічного університету. Прилади і радіотехніка. 2002. № 3. С. 39-42.*
 48. Верлань А. А., Митько Л. А., Дячук А. А., Федорчук В. А. О выборе численных методов решения дифференциальных уравнений для систем моделирования и управления. *Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. Е. Пухова НАН України «Моделювання та інформаційні технології». Київ, 2007. Вип. 44. С. 90-95.*
 49. Верлань А. А. Об одном подходе к расчету переходных процессов в сложных полупроводниковых и сверхпроводниковых преобразователях. *Мате-*

- матичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2010. Вип. 3. С. 26-37.*
50. Верлань А. А. Об одном способе построения системы контроля вторичных источников электропитания. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2013. Вип. 8. С. 22-31.*
 51. Верлань А. А., Федорчук В. А., Бойко Ю. Д. Об одном способе синтеза нелинейных регуляторов управляемых динамических систем. *Електромашинобудування та електрообладнання. Киев: Техніка, 2008. Вип. 70. С. 132-137.*
 52. Верлань А. А. Об организации структуры источников электропитания с защитой и автоматизированной системой контроля. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2013. Вип. 9. С. 14-23.*
 53. Верлань А. А. Об энергоэффективности сверхпроводящих устройств для запитки магнитных систем. *Зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. Львів: Світ, 1998. Вип. 3. С. 173-184.*
 54. Борковец В. И., Верлань А. А., Гушель Т. П., Юзвенко В. Ф. Определение информативных признаков по сигналам акустической эмиссии при диагностике конструкций. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2001. Вип. 13. С. 58-70.*
 55. Верлань А. А., Дячук А. А., Палагина Е. А., Палагин В. В. Параметрическая редукция математических моделей динамических систем. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2018. Вип. 18. С. 39-55.*
 56. Верлань А. А. Подход к моделированию систем энергообеспечения сверхпроводниковых магнитных комплексов. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2003. Вип. 19. С. 149-160.*
 57. Сытник А. А., Верлань А. А., Гази А. Регуляризация линеаризованных систем уравнений при идентификации нелинейных объектов. *Вісник Черкаського державного технологічного університету, Математичне моделювання та обчислювальні методи. 2004. № 1. С. 25-27.*
 58. Волощенко А. Б., Верлань А. А., Контрерас Д. Е. Розв'язання систем інтегро-диференціальних рівнянь у системі Матлаб. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2001. Вип. 11. С. 78-82.*
 59. Нечипоренко О. В., Верлань А. А., Фуртат Ю. О. Семантична інформація та лінгвістичні змінні в інформаційних технологіях. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2009. Вип. 2. С. 128-136.*
 60. Верлань А. А., Бойко Ю. Специализированные алгоритмы и устройства для интегрированных систем защиты информации. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України. Київ, 2005. Вип. 31. С. 51-57.*
 61. Верлань А. А. Способ параметрического контроля численного моделирования динамических объектов. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський, 2011. Вип. 5. С. 21-26.*
 62. Верлань А. А., Сагатов М. В., Юзвенко В. Ф. Способ упрощения динамической модели. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ. 2001. Вип. 10. С. 98-101.*
 63. Верлань А. А., Сагатов М. В., Юзвенко В. Ф. Способ упрощения динамической модели. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України. Київ, 2001. Вип. 10. С. 98-101.*

64. Верлань А. А. Способы локализации и идентификации элементов электрических устройств в задачах диагностики. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський*, 2012. Вип. 7. С. 20-27.
65. Сагатов М. В., Верлань А. А. Способы получения интегральных динамических моделей измерительных преобразователей с распределенными параметрами. *Моделювання та інформаційні технології: зб. наук. пр. ІПМЕ НАНУ*. 2001. Вип. 12. С. 138-145.
66. Верлань А. А., Смаковский Д. С., Михайлова И. Ю. Численное решение двумерного уравнения теплопроводности с использованием технологии OPENMP. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Техн. науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський*, 2010. Вип. 4. С. 56-64.
67. Верлань А. А., Бойко Ю. Д. Метод декомпозиции структуры корпоративной сети. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2006. Вип. 32. С. 34-41.
68. Верлань А. А., Гази А. Интегральные динамические модели нестационарных непрерывных объектов. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ*. Київ, 2003. Вип. 22. С. 82-91.
69. Верлань А. А., Ключка К. М., Осман И. Х. Локализация неисправных под-схем в электронных устройствах в условиях разброса значений параметров шумов измерений. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 38. С. 94-101.
70. Верлань А. А., Контрерас Д. Э., Гази А. Интегральный алгоритм идентификации динамических объектов. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ*. Київ, 2004. Вип. 27. С. 114-120.
71. Верлань А. А., Митько Л. А., Дячук А. А., Федорчук В. А. О выборе численных методов решения дифференциальных уравнений для систем моделирования и управления. *Моделювання та інформаційні технології: збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 44. С. 90-95.
72. Верлань А. А., Одокиенко С. Н. Быстродействующие алгоритмы численной реализации неявных интегральных динамических моделей. *Тр. междунар. конф. «Информационные технологии в управлении энергетическими системами» ИТУЭС-2005*, 18-19 окт. 2005 г. Киев. С. 82.
73. Верлань А. А., Одокиенко С. Н., Тихоход В. А. Квадратурные алгоритмы численного моделирования нелинейных динамических объектов с обратными связями. *Моделювання та інформаційні технології: збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2006. Вип. 38. С. 89-95.
74. Верлань А. А., Осман И. Х. Метод идентификационных экспериментов для диагностирования электронных устройств. *Збірник наукових праць ІПМЕ ім. Г. Є. Пухова НАН України*. Київ, 2007. Вип. 42. С. 98-105.
75. Верлань А. А., Стерген Ю., Положаенко С. А. Формализация представления последовательности тестовых гипотез при диагностировании электронных схем. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. Одеський національний політехнічний університет. 2016. Т. 6. № 4. С. 315-321.
76. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Интегральное уравнение: Методы, алгоритмы, программы. Киев: Наукова думка, 1986. 542 с.
77. Верлань А. Ф., Москалюк С. С. Математическое моделирование непрерывных динамических систем. Киев: Наукова думка, 1988. 287 с.

78. Верлань А. А. Алгоритм моделирования периодических режимов схем преобразовательной техники. *Зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ*. 2002. Вип. 18. С. 77-87.
79. Верлань А. А., Тихоход В. А. Интегро-дифференциальные модели многосвязных динамических объектов. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації*: зб. наук праць. Київ; Кам'янець-Подільський, 2006. С. 120-125.
80. Верлань А. А., Стерген Ю., Положаєнко С. А. Алгоритм реализации интегральных макромоделей явного вида. *Електротехнічні та комп'ютерні системи*. Одеса: Астропринт: 2017. № 24 (100). С. 143-150.
81. Верлань А. Ф., Митько Л. О., Дячук О. А., Федорчук В. А. Математичне та комп'ютерне забезпечення розробок випробувальних стендів силових установок енергетичного і транспортного призначення. *Збірник наукових статей за результатами, отриманими в 2010-2012 рр.* Київ: Інститут електрозварювання ім. Є. О. Патона НАН України, 2012. С. 310-315.
82. Верлань Д. А. Метод вырожденных ядер при численной реализации интегральных динамических моделей. *Электронное моделирование*. Киев, 2014. Т. 36. № 3. С. 41-57.
83. Виклюк Я. І., Камінський Р. М., Пасічник В. В. Моделювання складних систем. Львів: Видавництво «Новий Світ-2000», 2020. 404 с.
84. Гарашенко Ф. Г., Крак Ю. В., Стоян В. А., Хусаїнов Д. Я. Розвиток методів математичного моделювання, аналізу та оптимізації динамічних систем. *Наукові записки КНУ ім. Т. Шевченка*. 2004. Вип. 7. С. 154-197.
85. Горбань А. В. Устойчивость и оценка погрешности параллельных одношаговых численных методов решения задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений. URL: <http://www.masters.donntu.edu.ua/2005/fvti/gorban/diss/index.htm>.
86. Гуревич О. С., Близиюков Л. Г., Трофімов А. С. Системи автоматичного керування авіаційними силовими установками. *Конверсія в машинобудуванні*. 2000. № 5. С. 50-61.
87. Гуревич О. С. Стан і перспективи розвитку систем автоматичного керування авіаційними газотурбінними двигунами. *ЦИАМ 2001-2005. Основні результати науково-технічної діяльності*. Москва: ЦИАМ, 2005. С. 267-270.
88. Демиденко Н. Д., Потапов В. И., Шокин Ю. И. Моделирование и оптимизация систем с распределенными параметрами. Новосибирск: Наука, 2006. 551 с.
89. Дмитриенко В. Д., Заполовский Н. И., Мезенцев Н. В. Аналитическое конструирование регуляторов для дизель-поезда с асинхронным тяговым приводом. *Проблемы информатики и моделирования*: тез. докл. междунар. научн.-техн. конф., 27-29 сент. 2010 г. Харьков: НТУ «ХП», 2010. С. 13.
90. Дубовой В. М. Ідентифікація та моделювання технологічних об'єктів і систем керування. Вінниця, 2012. 308 с.
91. Дубовой В. М. Моделювання систем контролю та керування. Вінниця, 2005. 174 с.
92. Дячук О. А. Метод отримання спрощеної макромоделі динамічної системи засобами середовища SIMULINK-MATLAB. *Математичні машини і системи*. 2008. № 2. С. 81-89.
93. Дячук О. А. Про порівняння деяких методів спрощення динамічних моделей шляхом чисельного експерименту. *Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України «Моделювання та інформаційні технології»*. Київ, 2007. Вип. 40. С. 48-54.

94. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи: навчальний посібник / [М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков, Б. М. Мацко та ін.]; під ред. М. Г. Поповича та О. Ю. Лозинського. Київ: Либідь, 2005. 680 с.
95. Електромеханічні системи автоматичного керування та електроприводи: навчальний посібник / [М. Г. Попович, О. Ю. Лозинський, В. Б. Клепиков, Б. М. Мацко та ін.]; під ред. М. Г. Поповича та О. Ю. Лозинського. Київ: Либідь, 2005. 680 с.
96. Епифанов С. В., Кузнецов Б. И., Богаенко И. И. и др. Синтез систем управления и диагностирования газо-турбинных двигателей. Киев: Техника, 1998. 312 с.
97. Епифанов С. В. Регуляризовани алгоритми параметричної ідентифікації математичних моделей ГТД, засновані на використанні апріорної інформації. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2001. Вип. 26. С. 205-209.
98. Жученко А. И., Кубрак Н. А., Голинько И. М. Динамика объектов с распределенными параметрами: учебное пособие. Киев: Екмо, 2005. 121с.
99. Жученко А. И., Кваско М. З., Кубрак Н. А. Идентификация динамических характеристик. Компьютерные методы. Київ: Вир. відділ КЛТКМ та М, 2000. 182 с.
100. Жученко О. А., Цапар В. С. Метод спрощення математичних моделей об'єктів керування із розподіленими параметрами. *Автоматизація технологічних і бізнес-процесів*. Херсон: Гринь Д. С., 2015. Вип. 7. 2015. С. 15-25.
101. Забара С. та ін. Моделювання систем у середовищі MATLAB. Київ: Університет Україна, 2011. 137 с.
102. Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. и др. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества. *Кибернетика и систем. анализ*. 2006. Вып. 42. № 5. С. 33-41.
103. Задирака В. К., Мельникова С. С. Тестирование качества программ решения одной задачи численного интегрирования. *Проблемы управления и информатики*. 2000. № 2. С. 91-101.
104. Иванов В. В. Методы вычислений на ЭВМ. Справочное пособие. Киев: Наук. думка, 1986. 584 с.
105. Карпенко В. М., Федорчук В. А. Побудова структурних апроксимаційних моделей розподілених ланок електромеханічних систем на прикладі бурильної колони бурової установки. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2010. Вип. 3. С. 78-95.
106. Кваско М. З., Кубрак А. И., Жученко А.И. Числові методи комп'ютерного моделювання автоматичних систем. Алгоритми і програми: навч. посібник. Київ: Політехніка, 2003. 360 с.
107. Клепиков В. Б., Асмолова Л. В., Обруч О. В. Срывные функциональные автоколебания в электромеханических системах и их устранение. *Технічна електродинаміка*. 2007. №2. С. 35-41.
108. Клименко В. П., Ляхов А. Л. Прикладная математическая задача как объект компьютерной алгебры. *Мат. машини і системи*. 2003. № 3-4. С. 103-123.
109. Ковалюк Д. О., Москвіна С. М. Моделювання теплотехнологічних об'єктів з розподіленими параметрами: монографія. Вінниця: ВНТУ, 2010. 182 с.
110. Колодницький Н. М., Левицкий В. Г. Программные средства моделирования систем автоматического управления: проблема выбора. *Системний аналіз*,

- управління і інформаційні технології. *Вісник Хакрив. держ. політ. унів.-ту.* Харків: ХДПУ, 2000. № 97. С. 54-59.
111. Костенко Ю. Т., Любчик Л. М. Системы управления с динамическими моделями. Харьков: Основа, 1996. 212 с.
 112. Костинюк Л. Д., Мороз В. І., Паранчук Я. С. Моделювання електроприводів: навч. посібник. Львів, 2004. 404 с.
 113. Ладиев Р. Я., Остапенко Ю. А., Кубрак А. И., Кваско М. З. Математическое описание объектов с распределенными параметрами: учеб. пособие. Киев: КПИ, 1973. 108 с.
 114. Лазарев Ю. Ф. Моделювання динамічних систем у Matlab. Київ, 2011. 421 с.
 115. Лозинський О. Ю., Мороз В. І. Синтез і моделювання цифрових електромеханічних систем на основі апроксимацій інтегралу згортки. *Моделювання-2006 (Simulation-2006)*: сб. тр. конф. Киев: ИПМЕ НАНУ, 2006. С. 309-313.
 116. Ляшко С. І., Семенов В. В. Алгоритми векторної оптимізації лінійних систем з узагальненим керуванням. *Доп. НАН України*. 2010. № 4. С. 35-41.
 117. Макаров В. Л., Хлобистов В. В., Янович Л. А. Интерполирование операторов. Киев: Наукова думка, 2000. 407 с.
 118. Матвійчук Я. М. Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія і практика. Львів: Видавничий центр ЛНУ ім. І. Франка, 2000. 215 с.
 119. Матвійчук Я. М. Математичне макромоделювання динамічних систем: теорія та практика. Львів, 2000. 236 с.
 120. Меньшиков Ю. Л. Метод обеспечения адекватности динамических моделей. *Электронное моделирование*. 2014. Т. 36, № 3. С. 31-40.
 121. Миргород В. Ф., Грудинкин В. М. Імітаційне моделювання і керування температурним режимом ГТД АИ-25 ТЛШ. *Авіаційно-космічна техніка і технологія*. 2006. № 8 (34). С. 42-45.
 122. Мороз В. І. Інтегральні рівняння в моделюванні керованих електромеханічних систем. *Електротехніка і електромеханіка*. 2007. № 3. С. 39-43.
 123. Положаєнко С. А., Контрерас Д. Е. Реалізація моделей динамічних об'єктів, представлених у вигляді нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь з крайовими умовами. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2014. № 3. Т. 4. С. 250-255.
 124. Приказчиков В. Г., Химич А. Н. Асимптотическая оценка точности собственных чисел эллиптического оператора четвертого порядка со смешанными краевыми условиями. *Кибернетика и системный анализ*. 2017. Т. 53, № 3. С. 32-40.
 125. Протасов С. Ю. Інтегральні макромоделі об'єктів із розподіленими параметрами. *III Міжнародна наук.-практ. конф. присвячена пам'яті професора Ю. П. Кунченка*, 24-27 травня 2011 р.: тези допов. Черкаси: ЧДТУ, 2011. С. 60-61.
 126. Пухов Г. Е. Дифференциальные преобразования и математическое моделирование физических процессов. Киев: Наукова думка, 1986. 160 с.
 127. Самойленко В. Г., Конет І. М. Рівняння математичної фізики: навч. посіб. Київ, 2014, 283 с.
 128. Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. и др. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными значениями характеристик качества. *Кибернетика и сист. анализ*. 2006. Вып. 42, №5. С. 33-41.
 129. Сергиенко И. В., Задирака В. К., Бабич М. Д. и др. Компьютерные технологии решения задач прикладной и вычислительной математики с заданными

- значениями характеристик качества. *Кибернетика и системный анализ*. 2006. № 5. С. 33-42.
130. Скопецкий В. В., Стоян В. А., Зваридчук В. Б. К построению интегральных моделей распределенных пространственно временных процессов. *Проблемы управления и информатики*. 2006. № 1-2. С. 171-183.
131. Стахів П. Г., Козак Ю. Я. Побудова макромоделей електромеханічних компонентів із використанням оптимізації. *Технічна електродинаміка*. 2001. № 4. С. 33-36.
132. Стоян В. А. Моделювання та ідентифікація динаміки систем із розподіленими параметрами: [навч. посібник]. Київ: ВПЦ «Київський університет», 2004. 184 с.
133. Суздаль В. С., Епифанов Ю. М. Редукция модели при синтезе регуляторов для управления кристаллизацией. *Восточно-Европейский журнал передовых технологий*. Харьков: ЧП Технологический Центр, 2011. Вып. № 3 (50). Т. 2. 2011. С. 31-34.
134. Толочко О. І. Моделювання електромеханічних систем. Математичне моделювання систем асинхронного електроприводу. Київ: НТУУ «КПІ», 2016. 150 с.
135. Тошинський В. І., Литвиненко І. І., Шутинський О. Г. та ін. Апаратно-програмні засоби комп'ютерно-інтегрованих систем управління: навч.-метод. посіб. Харків: НТУ «ХПІ», 2009. 102 с.
136. Трегуб В. П. Проектування систем автоматизації: навч. посіб. Київ: Вид-во Ліра-К, 2014. 344 с.
137. Федорчук В. А., Махович О. І. Дослідження динаміки нестационарних теплових процесів із симетричними граничними умовами методом перерізів. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський нац. ун-т ім. Івана Огієнка, 2014. Вип. 10. С. 182-191.
138. Федорчук В. А., Контрерас Д. Э., Дячук А. А. Организация средств идентификации динамических объектов в среде MATLAB. *Зб. наук. праць ІПМЕ ім. Г. С. Пухова НАН України «Моделювання та інформаційні технології»*. Київ, 2007. Вип. 41. С. 75-83.
139. Федоткин И. М., Бурляй И. Ю., Рюмшин Н. А., Бурляй Ю. И. Математическое моделирование технологических процессов. *Тепловые процессы, плавление, замораживание, теплопроводность, регулярный режим*. Київ, 2004. 388 с.
140. Федоткін І. М., Бурляй І. Ю., Рюмшин М. О. Математичне моделювання технологічних процесів: Методи математичного моделювання і розв'язання процесних задач. Київ: Техніка, 2002. 407 с.
141. Химич А. Н., Декрет В. А., Попов А. В., Числяков А. В. Численное исследование устойчивости композитных материалов на компьютерах гибридной архитектуры. *Проблемы управления и информатики*. 2018. № 4. С. 73-88.
142. Aizerman M. A., Freeman E. A. *Theory of Automatic Control*: Adiwes International Series. Amsterdam: Elsevier Science, 2016. 532 p.
143. Verlan Andriy, Sterten Jo, Furtat Yurii. Method of Regularizing the problem of recovery of input signals of dynamic objects. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2016. Vol. 6. № 2. P. 113-116.
144. Verlan Andriy, Sterten Jo. Advanced Structural Organization of the Signal Recovery Processes in Measuring Systems. *7TH International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Econ-*

- omy and Education (ICAICTSEE 2017). University of National and World Economy (UNWE). Sofia, Bulgaria. November 3-4. 2017.
145. Baker C. T. Volterra Equations and their Numerical Treatment. *MCCM Technical Report*. 2000. № 3. 66 p.
 146. Bird J. *Engineering Mathematics*. Oxford: Newnes, 2003. 531 p.
 147. Brunner H., Houwen P. J. van der The Numerical Solution of Volterra Equation. Amsterdam: North-Holland, 1986. 588 p.
 148. Brunner H. *Volterra integral equations: an introduction to theory and applications*. Cambridge, 2017. 387 p.
 149. Carslaw H. S., Jaeger J. C. *Conduction of Heat in Solids* (Oxford Science Publications). [2 edition (April 10, 1986)]. Oxford University Press, 1986. 520 p.
 150. Cinlar E., Vanderbei R. J. *Mathematical methods of engineering analysis*. 2000. 115 p.
 151. Close Charles M., Frederick Dean K. Newell Jonathan C. *Modeling and Analysis of Dynamic Systems*. 3th ed. Wiley. 2001. 592 p.
 152. Doyle F. J., Pearson R. K., Ogunnaike B. A. *Identification and control using Volterra models*. Germany, 2002. P. 314.
 153. Fedorchuk V., Ivanyuk V. Application of the correlation method for the identification of linear dynamic systems models. *7th International Conference on Application of Information and Communication Technology and Statistics in Economy and Education (ICAICTSEE — 2017)*. November 3-4th, 2017, UNWE, Sofia, Bulgaria.
 154. Fedorchuk V. A. Modelling of typical distributed elements of the mechanical system of the drilling rig. *Electronic modelling*. 2010. Vol. 32. № 3. P. 95-110.
 155. Feldmann L., Resch M., Svjatnyj V., Zeitz M. Softwarearchitektur für parallele Simulationsumgebungen (Forschungsgebiet: parallele Simulationstechnik). Plenarvortrag, Berlin, Tagungsband 1, Argesim, 43, Wien 2014, S. 3-7.
 156. Harvill Lawrence R., Pipes Louis A. *Applied Mathematics for Engineers and Physicists*. Courier Corporation, 2014. 1040 p.
 157. Helie T., Laroche B. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear analytic single-input systems. *IEEE Trans. Autom. Control*. 2011. № 56. P. 2062-2072.
 158. Higuera I., Roldan T., Torrens J. J. *Numerical Simulation in Physics and Engineering*. 2016, IX, 251 p.
 159. Hoffman J. D. *Numerical Methods for Engineers and Scientists*. New York: Marcel Dekker, 2001. 823 p.
 160. Isermann R., Munchhof M. *Identification of Dynamic Systems. An Introduction with Applications*. Springer-Verlag, 2011. 711 p.
 161. Kelly L. G. *Handbook of numerical methods and applications*. Addison-Wesley Pub. Co, 1967. 354 p.
 162. Khimich A. N., Popov A. V., Chistyakov O. V. Hybrid algorithms for solving the algebraic eigenvalue problem with sparse matrix. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2017. Vol. 53. P. 132-146.
 163. Kress R. *Linear Integral Equations*. 3rd ed. 2014, XVI, 412 p.
 164. Kreyszig E. *Advanced Engineering Mathematics*. 10th edition. John Wiley & Sons, Inc., 2010. 1280 p.
 165. Kvyetnyy R. N., Sofina O. Y., Bunyak Y. A. The conjugated null space method of blind deconvolution. *Information Technology in Medical Diagnostics: monograph*. CRC Press/Balkema, London, UK, 2017. Chapter 8. P. 147-167.

166. Liu Y. On Model Reduction of Distributed Parameter Models. Stockholm: Department of Signals, Sensors and Systems. Royal Institute of Technology, 2002. 148 p.
167. Lyshchevski S. E. Engineering and Scientific Computations Using MATLAB. Hoboken, New Jersey: John Wiley & Sons, Inc., 2003. 240 p.
168. Mahadevan N., Hoo K. A. Wavelet-based model reduction of distributed parameter systems. *Chemical Engineering Science*. 2000. Vol. 55. Issue 19. P. 4271-4290.
169. MATLAB — Simulink. URL: https://www.tutorialspoint.com/matlab/matlab_simulink.htm.
170. Moon F. C. Applied dynamics: with applications to multi body and mechatronic systems. New York: John Wiley & Sons, Inc., 1998. 501 p.
171. Navarro-López, E. Bit-sticking phenomena in a multi-degree-of-freedom controlled drill string. Exploration and Production. *Oil and Gas Review*. 2010. Vol. 8 (2). P. 70-75.
172. Orava P. J. On the concepts of input-output model, causality, and state in the theory of dynamical systems and control. *Acta polytechn. scand. Math. and Comput. Sci*. 1979. № 31. P. 120-127.
173. Prenter P. M. Lagrange and Hermite interpolation in Banach space. *J. Approxim. Theory*. 1971. Vol. 4. № 4. P. 419-432.
174. PSPICE and MATLAB for Electronics: An Integrated Approach. Boca Raton: CRC Press, 2010. 382 c.
175. Kvyetnyy R. N., Sofina O. Yu., Maslii R. and other. Development of segment classification criteria based on the features of compression algorithms. *Chapter in monograph «Information Technology in Mecial Diagnostics II»*. London: CRC Press, 2018. P. 219-231. URL: <https://www.routledge.com/Information-Technology-in-Mecial-Diagnostics-II-Proceedings-of-the-International/Wojcik-Pavlov-Kalimoldayev/p/book/9780367177690>
176. Kvyetnyy R., Sofina O., Olesenko A. and other. Method of image texture segmentation using Laws' energy measures. *Proc. SPIE 10445, Photonics Applications in Astronomy, Communications, Industry, and High Energy Physics Experiments*. 2017, 1044561 (7 August 2017); doi:10.1117/12.2280891.
177. Schmitz T. L., Smith K. S. Machining Dynamics: Frequency Response to Improved Productivity. New York: Springer Science-Business Media, 2009. 309 p.
178. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. Edition 4.42. München, 2008. 59 p.
179. Steinhaus S. Comparison of mathematical programs for data analysis. Munich, 2008. 64 p. URL: <http://www.scientificweb.com/ncrunch/>.
180. Svyatnyy V. A., Kushnarenko V. G., Resch M., Miroshkin O. M., Wesner S. Problematik der parallelen Simulationstechnik. *Наукові праці ДонНТУ. Серія «Інформатика, кібернетика та обчислювальна техніка»*. Покровськ, 2016. № 2 (23). С. 5-20.
181. Svyatnyy V. A., Kushnarenko V. G., Miroshkin O. M., Resch M., Wesner S. Virtuelle parallele Simulationsmodelle und ein Devirtualisierungsvorgang der Entwicklung von MIMD-Simulatoren für dynamische Netzobjekte mit verteilten Parametern. *Tagungsband der Konferenz SIMULATION-2018*. Kyiv. S. 55-66 (Plenarvortrag).
182. Ustun O., Ali-Zade P., Mamedov G. and other. Computer-assisted electrodynamic modelling system for oil and gas industry electric drives study. *Електронне моделювання*. 2008. № 3. Т. 30. С. 73-86.

183. Verlan A. A., Sterten Jo, Furtat Yu. O. Algorithms for Dynamic Correction of the Thermal Flows' Measuring Systems. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2016. Вип. 14. С. 36-48.
184. Verlan A. A. An approach to the precision parametric reduction of mathematical models. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2016. Вип. 14. С. 26-36.
185. Verlan A. A., Abdusatarov B. B., Sagatov Miraziz, Sytnik A. A. Analysis of power circuits' dynamics using generalized state-space model. *Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006*. Tashkent, 2006. P. 168-176.
186. Verlan A. A., Abdusatarov B. B., Kontreras D. E. Application of singular systems theory in power systems dynamics simulation. *Fourth World Conference on Intelligent Systems for Industrial Automation WCIS-2006*. Tashkent, 2006. P. 163-167.
187. Verlan A. A. Method of construction of specialized algorithms for solving differential equations. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2017. Вип. 16. С. 30-35.
188. Verlan A. A., Sterten Jo Models of Dynamic Objects with Distributed Parameters. *Proceeding of the XXII International Scientific and Practical Conference «Innovation-2017»*. Tashkent, 2017. P. 252-254.
189. Verlan A. A., Fedorchuk V. A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2017. Вип. 15. С. 37-43.
190. Verlan A. A., Fedorchuk V. A. On the choice of numerical methods for solving dynamic equations for control systems with embedded calculating tools. *Міжнародна наукова конференція. Питання оптимізації обчислень ISCOPT-2017*. Київ, 2017. С. 8.
191. Verlan A. F., Verlan A. A., Gushel T. P. Singular systems theory application in power systems dynamics simulation. *6th International Conference Control of Power System*. Slovakia, 2004. P. 1-4.
192. Verlan Andrey, Sterten Jo. Implementation of Integral Explicit Macromodels by Means of Quick-Acting Algorithms. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2018. Вип. 18. С. 26-33.
193. Oletsky Alexey, Goroshko Ivan, Verlan Andrey. Model support of technical diagnostics systems design. *Моделювання та інформаційні технології*: зб. наук. праць ІПМЕ НАНУ. Київ, 2003. Вип. 20. С. 108-112.
194. Verlan Anatoliy, Verlan Andrey, Goroshko Ivan, Gushel Tatyana. Power Circuits Dynamic Analysis using Generalized State-Space Model. *NEU-CEE-2004, Second International Symposium on Electrical, Electronic & Computer Engineering. IEEE. TRNC*. Lefkosa, 2004. P. 323-327 (IEEE).
195. Sterten Jo, Verlan Andriy, Verlan Dmitriy. Inverse method of restoring distributed signals in surveillance systems. *XX International Scientific Practical Conference «Innovation-2015»*. Tashkent, 2015. P. 32-39.
196. Verlan Andriy, Sterten Jo, Furtat Yurii Method of Regularizing the problem of recovery of input signals of dynamic objects. *Computational Problems of Electrical Engineering*. 2016. Vol. 6. № 2. P. 113-116 (фахове видання включене до міжнародних наукометричних баз Google Scholar, Ulrich's Web та Index Copernicus).

197. Verlan Andriy, Verlan Anatoliy, Sytnik Aleksand Simulation of electrical systems for supplying superconducting magnetic energy storageю. *ISEECE 2006, 3rd International Symposium on Electrical, Electronic and Engineering. IEEE*. Nicosia, 2016. P. 214-220 (*IEEE*).
198. Verlan A. A., Sterten Jo. Mathematical modeling of mixing micro jets of gas applied to the flaw detection problems. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2015. Вип. 12. С. 5-14.*
199. Verlan A. A., Sterten Jo. On the Representation of Non-Linear Functions by Fractional-Power Series. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2014. Вип. 11. С. 194-199.*
200. Verlan A. A., Sterten Jo. Power energy units dynamic models development and program implementation. *5th International Scientific Conference «Signal and non-Gaussian noise processing»*. 2015. P. 140-142.
201. Verlan A. A., Sterten Jo, Ogorodnyk O. Principles of Precision Parametric Reduction for Mathematical Models. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: К-ПНУ, 2015. Вип. 12. С. 15-23.*
202. Verlan A. A., Sterten J., Ogorodnyk O. Mathematical Modelling of Complex Singular Power Systems' Dynamics. *The 11th International Conference on Multimedia Information Technology and Applications*. Tashkent, 2015. P. 43-46 (*IEEE*).
203. Verlan A. F., Sagatov M. V., Sytnik A. A., Djachuk A. A. The method of identification of controlled dynamic objects on the basis of integral models. *Intelligent systems for industrial automation: fourth world conference*. Tashkent, Uzbekistan, 2006. P. 28-40.
204. Verlan Andriy, Fedorchuk V. A. Computer modelling of drill string of an oilwell drilling rig. *IEEE Proceedings of 14th International Conference on Advanced Trends in Radioelectronics, Telecommunications and Computer Engineering (TCSET)*. Lviv, 2018. P. 346-350 (*IEEE*, видання включене до міжнародної наукометричної бази SCOPUS).
205. Sterten Jo, Nordskogeb Kari, Verlan' A. A. Adaptation and Implementation of Modern Learning Techniques in Master of Sustainable Manufacturing: Cultural Challenges, Effects and Potential for Improvement. *The 6th Conference on Learning Factories. Norwegian University of Science and Technology*. 2016. Vol. 54. P. 170-174. (*Published by Elsevier, ScienceDirect® and Scopus® are registered trademarks of Elsevier, Web of Science*).
206. Verlan' A. A., Verlan' A. F. Moving Objects' Full-Scale Simulators' Composition. *Ninth World Conference «Intelligent systems for industrial automation»*. Tashkent, 2016. P. 144-146.
207. Verlan' A. A., Sterten Jo. Algorithm for Modelling a Dynamic Object by Means of the Convolution Operation. *Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації: тези доповідей 7-ї Міжнародної наукової конференції OPTIMA*. 2016. С. 32-33.
208. Yaparova N. M. Numerical methods for solving a boundary value inverse heat conduction problem. *Inverse Problems in Science and Engineering*. 2014. Vol. 22. № 5. P. 832-847.

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

ВЕРЛАНЬ Андрій Анатолійович,
доктор технічних наук, старший науковий співробітник,
професор кафедри інженерії програмного забезпечення в енергетиці
Національного технічного університету України «Київський політехнічний
інститут імені Ігоря Сікорського», Associate Professor, Norwegian University of
Science and Technology (Королівство Норвегія)

ФЕДОРЧУК Володимир Анатолійович,
доктор технічних наук, професор, професор кафедри комп'ютерних наук
Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

МОДЕЛЮВАННЯ КОМП'ЮТЕРНО- ІНТЕГРОВАНИХ СИЛОВИХ ЕНЕРГЕТИЧНИХ УСТАНОВОК

МОНОГРАФІЯ

Підписано до друку 31.08.2023 р. Гарнітура «Таймс».
Папір офісний. Друк цифровий.
Формат 60x84/16. Умовн. друк. арк. 17,2. Обл.-вид. арк. 18,1.
Тираж 200. Зам. № 1052.

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка,
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Віддруковано згідно з наданим оригінал-макетом
у друкарні ТОВ «Друкарня "Рута"»,
свід. Серія ДК № 4060 від 29.04.2011 р.
вул. Руслана Коношенка, 1, м. Кам'янець-Подільський, 32305.