Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН У ПРОСТОРІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 10 КЛАСУ НА РІВНІ СТАНДАРТУ»**

Виконав: студент 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Ватаманюк Артур Олександрович

Керівник: **Сморжевський Ю.Л.,** кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: **Моцик Р.В.,** кандидат педагогічних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність дослідження. Наприкінці XX століття середня загальноосвітня школа вступила в принципово новий етап свого розвитку, характерними рисами якого є розбудова освіти на нових прогресивних концепціях, запровадження у навчально-виховний процес сучасних педагогічних та інформаційних технологій, науково-методичних досягнень.

Разом з тим на сучасному етапі розвитку суспільства стало зрозумілим, що вся система знань про світ, людину і суспільство має бути переглянута в напрямку повернення до цілісного знання єдиної картини світу. Учні мають усвідомити, що математика має своїм предметом цілком реальний матеріал, але, розглядаючи його, повністю відволікається від конкретного змісту і якісних особливостей. Учні мають зрозуміти, що можливість широких застосувань математики до досліджень реального світу ґрунтується саме на тому, що її взято з цього самого світу і вона виражає частину притаманних йому форм зв’язків і власне тільки тому взагалі може застосовуватись. В проекції на шкільну математичну освіту вимога «знати небагато про все» має забезпечуватися державними освітніми стандартами, а тим, хто навчається на достатньому і високому рівнях, – знати більше. Саме стандарт виділяє мінімум змісту математичної освіти і мінімальні вимоги до цього змісту та стає основою диференціації навчання.

Вчителі математики в основному оволоділи ідеями і змістом нової реформи. Зусилля методистів і вчителів тепер слід спрямувати на розробку методики вивчення матеріалу, яка орієнтована на чотири рівні навчання, на вдосконалення методів і форм навчання математики, зокрема курсу стереометрії, і реалізацію принципу гуманізації математичної освіти. Постає проблема також навчання математики у звичайних (без поглибленого вивчення математики) класах, в яких одні учні збираються вивчати математику і після закінчення школи, а для інших вимоги шкільної програми з математики завищені.

Незважаючи на наявність значної кількості публікацій, окремих досліджень, в яких у тій чи іншій мірі розглядалась проблема паралельності прямих і площин в просторі, необхідно зазначити, що існуючі дидактичні матеріали по даній темі, які має вчитель в своєму розпорядженні в даний час, не є достатньо насиченими відповідним матеріалом.

Все це зумовило вибір теми нашого дослідження «Методика вивчення паралельності прямих і площин в курсі математики 10 класу на рівні стандарту».

Тема «Паралельність прямих і площин в просторі» в курсі стереометрії має важливе значення в загальному розвитку учня. При вивченні цієї теми узагальнюються та систематизуються знання учнів про прямі та площини, поглиблюються історичні знання з математики, продовжують формуватись навички роботи над теоремою.

В учнів формується: здатність самостійно аналізувати ситуацію, швидко адаптуватись до нових умов, уміння використовувати набуті знання, графічні навички (правильно і гарно виконувати малюнок); розвивається: інтерес до геометрії, геометрична і просторова уява, здатність аналізувати і робити обґрунтовані висновки, культура усної і письмової математичної мови.

Загалом, вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі» в курсі математики робить суттєвий внесок у розвиток логічної культури учнів.

<u>Об'єктом дослідження</u> є процес навчання математики в закладі загальної середньої освіти.

<u>Предметом дослідження</u> є методика вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі» в курсі математики 10 класу на рівні стандарту.

<u>Мета дослідження</u> полягає в тому, щоб розробити методику вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі» в курсі математики 10 класу на рівні стандарту.

Для досягнення мети планується розв'язати така завдання:

– визначити основні теоретичні основи теми;

– з’ясувати, в якій мірі методична література, підручники з математики підготовлені до навчання по темі;
– розробити методику вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі»;
– експериментально перевірити розроблену методику.

Практичне значення дослідження полягає в тому, що розроблена методика допоможе вчителям при навчанні теми «Паралельність прямих і площин в просторі» в курсі стереометрії, в підборі та складанні відповідних завдань для цієї теми, для кращого засвоєння учнями навчального матеріалу.

РОЗДІЛ 1. АНАЛІЗ ЛІТЕРАТУРИ ПО ТЕМІ ДОСЛІДЖЕННЯ

1.1. Дидактична суть рівня стандарту змісту освіти

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв'язання практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв'язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним з головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності [22].

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об'єктів, процесів і явищ, задач, пов'язаних з ними, за допомогою математичних об'єктів, відповідних математичних задач;
- вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв'язання задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв'язки між ними, складати план розв'язання задачі; вибирати засоби розв'язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв'язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв'язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;
- вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;

- вміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т. п.);
- вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- вміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- вміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій, міру ризику при прийнятті того чи іншого рішення, вибирати оптимальне рішення [22].

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Реалізація у навчанні прикладної спрямованості навчання математики означає:

1) створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;

2) формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;

3) навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Рівень стандарту передбачає як сумісне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Перший підхід в умовах вивчення предмету на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом курсу «Математика» на два курси «Геометрія» і «Алгебра і початки аналізу». Він дозволяє забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з врахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутрішні і міжпредметні зв'язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики. Другий підхід запобігає великим перервам у вивченні окремих предметів.

Як і в основній школі, геометрія у старшій школі повинна навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але для цього стереометрія має більше можливостей. Йдеться про розвиток логічного мислення, формування просторових уявлень, формування навичок застосування геометрії до розв’язання практичних завдань. Розв’язання цих завдань розпочинається з розгляду теми «Паралельність прямих і площин у просторі». У ній закладається фундамент для вивчення стереометрії – геометрії простору. Особливу увагу необхідно приділити реалізації прикладної спрямованості теми. Головним внеском у розв’язання зазначеної проблеми є формування чітких уявлень про взаємовідношення геометричних об'єктів (прямих, площин) і відношень між ними з об'єктами навколишнього світу. Важливе місце в темі необхідно відвести навчанню учнів зображенню просторових фігур на площині і застосуванню цих зображень при розв’язанні задач.

Завершується навчання геометрії у 10-му класі розглядом теми «Перпендикулярність прямих і площин у просторі», в якій закладається фундамент для вимірювань у стереометрії. Значної уваги вимагає формування таких фундаментальних понять, як загальне поняття відстані, поняття кута як міри розміщення прямих і площин і двогранного кута як геометричної фігури. З уведенням відношення перпендикулярності прямих і площин (математичної моделі поняття вертикальності), перпендикулярності площин, а також відстаней і кутів моделюючі можливості курсу стереометрії значно зростають.

Таким чином, послідовність тем – головних структурних елементів навчального матеріалу курсу «Математика» – забезпечує розгляд усіх змістових ліній курсу у відповідності до Державного стандарту, створює умови для реалізації рівневої диференціації навчання.

Навчальний процес у старшій школі потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена віковими особливостями старшокласників, набутими в основній школі навичками самостійної роботи, рівнем розвинення загальнонавчальних і пізнавальних видів діяльності [23].

У старших класах може широко застосовуватися лекційно-семінарська форма проведення занять, причому не час від часу, а досить регулярно.

Реалізація рівневої диференціації на практичних заняттях є однією з головних умов ефективності навчання.

Особливістю практичних занять має бути постійне залучення учнів до самостійної роботи. Доцільно спільно обговорити ідею та алгоритм розв’язання певного класу задач. Після цього кожен учень може виконувати запропоновану систему вправ, спілкуючись із вчителем.

Важливе місце в організації навчання математики повинно посісти вдосконалення, у порівнянні з основною школою, системи самостійної роботи учнів. Формуванню відповідних мотивів до самостійної роботи сприяє застосування завдань на рисунках, контрольних запитань, зокрема прикладного характеру, домашніх контрольних робіт по дослідженню конкретних класів функцій, геометричних конструкцій.

Важливим засобом навчання можуть стати контрольні запитання і тестові завдання, які спрямовані не на відтворення означень, фактів, формул, а на з’ясування елементів та структури означень математичних об’єктів; їх місця в системі інших понять; операцій, які можна виконувати з об'єктом; його особливостей та властивостей; окремих винятків та тонкощів. Подібні контрольні запитання стимулюють продуктивне мислення учнів, сприяють неформальному засвоєнню теоретичного матеріалу, формують навички порівняння, класифікації, узагальнення, застосування математичних понять і об'єктів [23].

Обов'язковим елементом технології навчання має бути постійна діагностика навчальних досягнень учнів. Вивчення кожної теми слід починати з виконання діагностичної роботи, що дає змогу встановити залишковий рівень володіння матеріалом попередньої теми. За результатами діагностичної роботи виявляються прогалини у підготовці учня, його досягнення, що допомагає спрямувати зусилля його та викладача на поліпшення стану справ.

Значне місце у технології навчання повинен посідати тематичний контроль навчальних досягнень як засіб управління навчальним процесом. До кожної теми система контролю може складатися з тематичної контрольної роботи, яка, як правило, має сюжетний характер, специфічного навчально-контролюючого засобу – теоретичної контрольної роботи, виконання тесту.

Варто планувати виконання індивідуальних завдань, які передбачають ознайомлення як з розвитком математики в історичному аспекті (наприклад, з теми «Скільки існує геометрій?») так і змістовних («Перспектива», «Математика і соціологія») [22].

Отже, програма рівня стандарту передбачає насамперед оволодіння загальною математичною культурою, вироблення математичного стилю мислення, тобто вміння класифікувати об'єкти, встановлювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами, приймати рішення тощо.

1.2. *Аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури по темі дослідження*

В наш час математика як наука пронизує всю сферу наукової і практичної діяльності. Тому і при підготовці учнів на рівні сучасних потреб важливу роль відводиться математиці.

При вивченні математики виникають труднощі, пов’язані з специфікою самого предмету, вони обумовлюються необхідністю психологічного мислення, індивідуальною особливістю пізнавальної діяльності учнів.

Аналіз сучасної психолого-педагогічної літератури з проблем даної теми, по-перше, дає можливість зробити висновок про те, що існують різні підходи цієї проблеми; по-друге, в історичному аспекті він надає можливість простежити діалектику розробки проблеми від окремих ідей, окремого, комплексного або системного підходів до системно-технологічного підходу, до її розв'язання на сучасному етапі.

Результати вивчення показали, що при правильній організації навчання і, особливо, при знятті жорстких часових рамок, близько 95% учнів можуть цілком засвоювати всю тему дослідження і в загальному весь зміст навчання шкільного курсу.

На даний час існує багато методичних розробок уроків по темі: «Паралельність прямих і площин в просторі», опублікована велика кількість статтей, присвячених даній темі. Наприклад, журнал «Математика в школі» реалізує на своїх сторінках висвітлення питань, пов’язаних з методикою викладання даної теми на уроках геометрії, розробкою конспектів уроків і конспектів відкритих уроків.

Знання рівня сформованості в школярів вміння розв’язувати задачі по даній темі, дозволяє вчителю при підготовці до уроку наперед підібрати відповідні задачі і продумати форми підготовки для кожної групи учнів, орієнтуючись на зону найближчого розвитку.

В педагогічній літературі [2], [5], [28] дуже часто зустрічаються терміни – «активність учня», «активізація навчання», «пізнавальна активність школяра».

Завдання активізації навчання ставили перед собою багато педагогів. Проте відносно суті активного навчання не було єдиної думки.

Активізувати учня можна за допомогою покарання, заохочення, пробудження інтересу тощо. І саме інтерес й емоційність завжди були головними чинниками активізації розумової діяльності учнів.

З метою забезпечення ефективних вимірників якості навчальних досягнень та об'єктивного їх оцінювання вводиться 12-бальна шкала оцінювання, побудована з урахуванням підвищення рівня особистих досягнень учня. Оцінювання навчальних досягнень учнів сприяє повторенню і систематизації навчального матеріалу; своєчасному виявленню труднощів, з якими стикається учень у навчальній діяльності, прогалини у його знаннях і вміннях; встановленню рівня готовності до засвоєння нового матеріалу; формуванню вміння відповідально й зосереджено працювати, застосовуючи прийоми самоперевірки і самоконтролю; стимулюванню відповідальності та бажанню змагатися учнів.

К. Власенко у своїй статті [9] пропонує створювати евристичну навчальну ситуацію. Евристична навчальна ситуація є тоді, коли учневі як культурний аналог його творчого продукту надається можливість ознайомитися не з одним, а з кількома аналогічними зразками. Її мета – викликати мотивацію і забезпечити діяльність учня в напрямі пізнання фундаментальних навчальних об’єктів і рішення пов’язаних з ними проблем. Щоб учень створив свої спроби розв’язування задач і доведення теорем, йому необхідно зацікавитися цією проблемою; далі школяреві потрібно допомогти з'ясувати зміст геометричних понять, їх зв'язок, дати змогу відчути взаємозв’язок у задачах; потім запропонувати скласти свої задачі, навчитися виявляти закономірності в доведеннях теорем, продумати кілька своїх доведень.

Основний елемент евристичної ситуації – евристична задача, яку ми розглядаємо як основу для введення учня в ситуацію прояву його евристичних позицій у навчальному процесі, як суб’єктивно евристичну задачу. К. Власенко пропонує евристичні задачі з великим ступенем визначеності змісту, по темі дослідження.

Навчальний посібник [3] структурований на дедуктивній основі. Він містить загальні питання методики математики, які реалізуються в методиках викладання арифметики, алгебри, початків аналізу та геометрії. Методика викладання математики розглядається як наука про різні способи і форми передачі учням математичних знань, мету, зміст і засоби навчання та нерозривно пов'язані з ними питання виховання учнів у процесі викладання математики. Серед завдань що ставляться методикою викладання математики, виділяється створення методики, зорієнтованої на виховання і розвиток учнів під час навчання математики, передусім на розвиток логічного мислення. Головною метою викладання математики в школі визнається забезпечення міцного і свідомого оволодіння системою математичних знань, умінь і навичок, які потрібні для загального розвитку учнів, для їх практичної діяльності в умовах виробництва, для вивчення на досить високому рівні споріднених шкільних предметів і для продовження освіти.

А у статті [15] І. Корнейчук говорить про метод аналогії у вивченні паралельності прямих і площин в просторі, як один із напрямків удосконалення теорії і практики навчання математики.

Відомо, що аналогія є одним із найбільш розповсюджених методів пізнання, застосування якого є досить результативним у наукових дослідженнях. Результатом досліджень стало усвідомлення деяких фактів. По-перше, було встановлено, що аналогія вивчає особливу форму думки д-висновок за аналогією, - відмінною рисою якої є перенесення інформації з одного складного об'єкта (моделі) на другий (оригінал). По-друге, було доведено, що використання аналогії в навчанні є цілеспрямованим: вона може бути корисна при повторенні матеріалу для встановлення зв'язків різних тем шкільного курсу математики. По-третє, було усвідомлено, що застосування аналогії в навчанні розвиває творчі здібності учнів, а стан оволодіння аналогією характеризує рівень творчого розвитку людини.

Однак питання про широке і систематичне застосування аналогії в навчанні геометрії не отримало свого подальшого розвитку в методичних дослідженнях: в літературі недостатньо описано діяльність учителі і учнів, пов'язану із застосуванням аналогії в різних випадках, не з'ясовано загальні закономірності такого застосування. Отже, розробка подібної методики є досить актуальною.

В даний час є досить актуальною проблема диференціації навчання. Проблеми рівневої диференціації навчання висвітлювали відомі дидактики і методисти: Голік Л. [10], Ісак Н. [11], Ковчин Н. [13], Сікорський П. [24], Сісецький П. [25], Слєпкань З. [26], Яценко С. [30] та ін.

Проте, незважаючи на велику кількість робіт про диференціацію навчання, це питання залишається актуальним.

Рівнева диференціація виражається в тому, що навчаючись в одному класі, по одній програмі і підручнику, школярі можуть засвоювати матеріал на різних рівнях.

Отже, виходячи з цього, можна говорити про те, що існує багато думок щодо застосування різних методів для викладу даної теми у школі. Тому з'являється потреба створити такі методи і форми навчання, за допомогою яких учні краще б засвоювали матеріал теми «Паралельність прямих і площин в просторі». А оскільки в курсі математики провідна роль належить задачам, то існує необхідність створення методики розробки і використання різнорівневих завдань до кожної теми курсу математики.

1.3. Аналіз викладу даного матеріалу в діючих підручниках з математики

На сьогодні, зміст підручників, які використовуються в школі достатньо спрямований на набуття школярами життєвих компетентностей, орієнтує на потреби часу, на майбутнє здобуття професії та подальшої освіти. Крім того, всі шкільні підручники є привабливими для дітей як за формою укладання матеріалу, так і за зовнішніми характеристиками. Це свідчить про високу якість підручників.

В останнє десятиліття відбулось оновлення підручників. Це пов'язано з тим, що вперше почалося створення українського комплекту. Громадська думка доводить, що ці зміни відбулися переважно на користь якості навчальної книги.

Геометрія, зокрема стереометрія, займає значне місце у шкільній математиці. Ми зосередимо увагу на розділі «Паралельність прямих і площин».

Починаючи з 2010-2011 навчального року середня школа «перейшла» на навчання по нових підручниках. Розглянемо підручник з математики для 10 класу [4]. Ми будемо аналізувати розділ 3 «Паралельність прямих і площин у просторі». Цей розділ містить такі параграфи:

§ 22 «Прямі в просторі»

§ 23 «Паралельне проектування»

§ 24 «Зображення фігур в стереометрії»

§ 25 «Паралельність прямої і площини»

§ 26 «Паралельність площин»

У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом. Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити їх приклади. Щоб перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Перевірте себе», які є після кожного параграфа. У рубриці «Виконаємо разом» наводяться задачі з розв'язаннями. Перш ніж виконувати домашнє завдання, краще переглянути їх.

Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділені кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». В загальному, цей підручник не розрахований на чотири рівні складності.

У кожному розділі є задачі за готовими малюнками. Умови таких задач подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу подано «Головне в розділі».

А зараз, безпосередньо, перейдемо до матеріалу, який міститься в цих параграфах.

§ 22 «Прямі в просторі» містить означення мимобіжності двох прямих і паралельності двох прямих. А також дві таких теореми, з доведенням:

Теорема 3 (ознака мимобіжності прямих). Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі дві прямі мимобіжні.

Теорема 4. Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній і до того ж тільки одну.

А також сказано, що для паралельних прямих виконується властивість транзитивності: дві прямі, паралельні третій, паралельні.

У § 23 «Паралельне проектування» сказано, що властивості паралельного проектування випливають з такої теореми.

Теорема 5. Якщо відрізки, які проектуються, не паралельні проектуючій прямій, то при паралельному проектуванні:

1) відрізки фігури зображаються відрізками;

2) паралельні відрізки - паралельними відрізками або відрізками однієї прямої;

3) довжини проекцій паралельних відрізків або відрізків однієї прямої відносяться, як довжини проектованих відрізків.

В § 24 «Зображення фігур в стереометрії» вводиться таке означення: зображенням фігури називається будь-яка фігура, подібна паралельній проекції даної фігури. А далі наводяться алгоритми побудови спряжених діаметрів еліпса, побудови піраміди і призми.

§ 25 «Паралельність прямої і площини» містить таке означення: пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок, і дві теореми.

Теорема 6 (ознака паралельності прямої і площини). Якщо пряма паралельна якій-небудь прямій площини, то вона паралельна і самій площині.

Теорема 7. Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.

Ці дві теореми доводяться в підручнику.

Далі ще є таке означення: відрізок називається паралельним площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

У § 26 «Паралельність площин» доведено три такі теореми:

Теорема 8 (ознака паралельності площин). Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать в одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні.

Теорема 9. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

Теорема 10. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відгинають від них рівні відрізки.

Крім того, тут сформульоване таке означення: дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

В кінці цього параграфа дається самостійна робота №6. Вона розрахована на два варіанти.

Отже, можна зробити висновок, що шкільні підручники відіграють важливу роль у навчальному процесі в середній освіті та є одним із основних засобів передавання знань. Зважаючи на це, слід звернути особливу увагу на дотримання в них вимог стандартів. На цьому аспекті ґрунтується дане дослідження.

Отже, значущість даного питання є очевидною, а усвідомлення – необхідною передумовою утвердження високої видавничої культури.

Отже, проаналізувавши підручник, ми бачимо, що він не повністю орієнтований на різнорівневе навчання, тому виникає необхідність у розробленні методики вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі».

РОЗДІЛ 2. МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ ПАРАЛЕЛЬНОСТІ ПРЯМИХ І ПЛОЩИН В ПРОСТОРІ В КУРСІ СТЕРЕОМЕТРІЇ

2.1. Методика вивчення паралельності прямих

Як і в основній школі, геометрія у старшій школі повинна навчати учнів правильному сприйманню навколишнього світу. Але для цього стереометрія має більше можливостей. Йдеться про розвиток логічного мислення, формування просторових уявлень, формування навичок застосування геометрії до розв'язування практичних завдань.

У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

За діючою програмою рівня стандарту [22], на курс геометрії у 10 класі припадає 51 год. (І семестр – 32 год., 2 год. на тиждень; ІІ семестр – 19 год., 1 год. на тиждень; резервний час – 6 год.). На вивчення теми «Паралельність прямих і площин у просторі» відводиться 22 години. Матеріал вивчається за підручником [4].

Спочатку наведемо фрагмент тематичного плану розділу «Паралельність прямих і площин в просторі» для 10-го класу.

№ уроку	Зміст навчального матеріалу (тема уроку)	Кількість годин
	Паралельність прямих і площин в просторі	**22**
1-2.	Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Прямі, що перетинаються, паралельні, мимобіжні прямі.	2
3-4.	Ознака мимобіжності прямих.	2
5-7.	Ознака паралельності прямих.	3
8-9.	Взаємне розміщення прямої і площини у просторі. Пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина.	2
10-11.	Ознака паралельності прямої і площини.	2
12-13.	Розв’язування вправ. Самостійна робота.	2
14-15.	Взаємне розміщення двох площин у просторі. Площини, що перетинаються, паралельні площини.	2
16-18.	Ознака паралельності площин.	3
19.	Властивості паралельних площин.	1
20-21.	Розв’язування вправ.	2
22.	Контрольна робота № 1.	1

Сучасні комп’ютерні технології дозволяють більш ефективно вивчати окремі теми шкільного курсу математики.

Головними завданнями цього навчального модуля є формування:

- критеріїв, за якими класифікується взаємне розміщення прямих;
- поняття паралельних і мимобіжних прямих;
- уміння встановлювати взаємне розміщення прямих;
- умінь розв’язувати найпростіші задачі на побудову, зокрема на побудову точки перетину прямої з площиною.

Знання та вміння, отримані учнями під час засвоєння матеріалу цього навчального модуля, стануть базою для введення поняття зображення у стереометрії.

Забезпечення готовності до навчання

Готовність до навчання забезпечується актуалізацією навчального матеріалу попереднього блока, а також повторенням і систематизацією відповідного планіметричного матеріалу. Для цього доцільно виконати такі завдання.

1. Наведіть аксіоми стереометрії та їх фізичні тлумачення.

2. Наведіть приклади ситуацій, коли один і той самий реальний об'єкт доцільно моделювати плоскою або просторовою фігурою.

3. Як треба розуміти розв'язування задачі на побудову в стереометрії?

4. Як можна задати площину в просторі?

5. Як можуть розміщуватися дві прямі на площині?

6. Які ознаки паралельності двох прямих на площині?

7. Як на площині через точку поза прямою провести пряму, паралельну даній прямій? Скільки таких прямих можна провести?

8. Через середину сторони трикутника провести пряму, паралельну іншій стороні трикутника. Що можна сказати про трикутники, які утворилися?

Розкриємо методику вивчення теми ***«Взаємне розміщення двох прямих у просторі. Прямі що перетинаються, паралельні, мимобіжні прямі».***

Для того, щоб розпочати вивчення паралельності двох прямих у просторі, потрібно спочатку на першому уроці повторити з учнями відомий їм матеріал з планіметрії по темі «Паралельність двох прямих на площині».

<u>Вчитель:</u> Із курсу планіметрії відомо, що дві прямі, які лежать у площині можуть перетинатися або не мати спільних точок. Сформулюйте означення паралельних прямих на площині.

<u>Учні:</u> Якщо дві прямі лежать в одній площині і не мають спільних точок, то вони називаються паралельними.

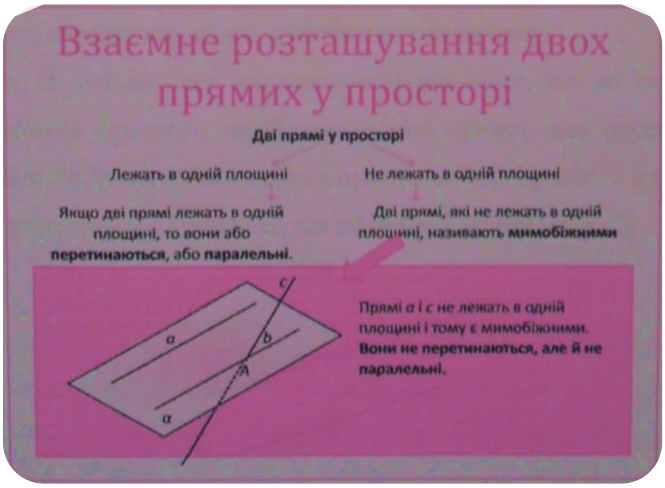
<u>Вчитель:</u> У просторі дві різні прямі або перетинаються, або не перетинаються. Перший випадок дає зрозуміти, що прямі лежать в одній площині. Проте другий випадок допускає дві можливості: прямі лежать в одній площині або ж вони належать різним площинам.

Означення. Прямі, які лежать в одній площині і не перетинаються, називаються *паралельними*. А дві прямі, які не лежать в одній площині, і не перетинаються, називаються мимобіжними.

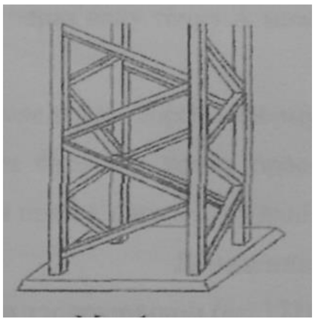
(Випадки взаємного розташування двох прямих у просторі доцільно демонструвати за допомогою каркасної моделі куба, ребра якого вважаючи прямими у просторі).

Вчитель: Отже, дві прямі a і b у просторі можуть: перетинатися, бути паралельними, бути мимобіжними (схема 1«Взаємне розміщення двох прямих у просторі»).

Схема 1



Вчитель: Погляньте будь-ласка на малюнок 1. Що ви бачите на ньому?



Мал. 1

Учні: На цьому малюнку зображено десятки пар матеріальних моделей мимобіжних прямих.

Вчитель: Які ще предмети є моделями мимобіжних прямих?

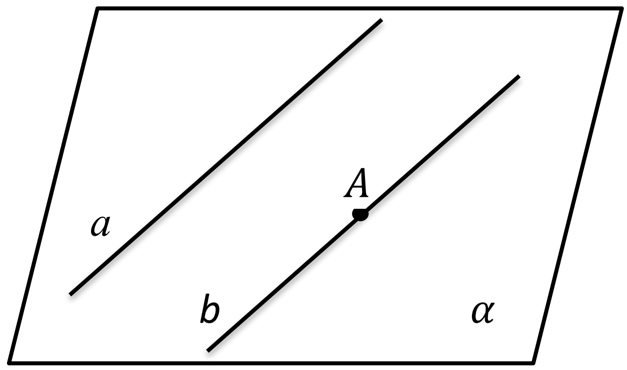
Учні: Моделями мимобіжних прямих є також колія залізниці та перила переходу над нею і багато інших матеріальних моделей прямих.

Вчитель: Далі пригадаємо аксіому *IX* з курсу планіметрії, яка вважається основною властивістю паралельних прямих.

Учні: Через точку, що не лежить на даній прямій, можна провести на площині пряму, паралельну даній, і до того ж тільки одну.

Вчитель: З цієї аксіоми паралельності випливає, що на площині через дану точку можна провести не більше однієї прямої, яка паралельна даній прямій. Давайте з'ясуємо, скільки таких прямих можна провести в просторі.

Нехай дано пряму a і точкуA, що не лежить на ній (мал. 2).



Мал. 2

Через них можна провести площину α (за теоремою 1). У цій площині можна провести пряму b, яка буде паралельною до даної прямої a.

Отже у просторі через дану точку A можна провести пряму, паралельну даній a.

Таким чином, справедлива теорема (формулюють учні):

Теорема 4. Через будь-яку точку простору, яка не лежить на даній прямій, можна провести пряму, паралельну даній і до того ж тільки одну.

Доведення.

Учні самостійно опрацьовують доведення даної теореми по підручнику.

Запитання до класу

1. Як треба розуміти, що дві прямі у просторі не паралельні?
2. Що можна сказати про прямі у просторі, якщо відомо, що вони не мимобіжні?
3. Як формулюється теорема 4?

Для закріплення набутих знань, розв'язуємо задачі. Спочатку розглянемо такі вправи.

Задача 1.

Прямі AB і CD паралельні. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? А чи можуть вони перетинатись?

Розв'язання

Якщо $AB \parallel CD$, то прямі AB і CD лежать в одній площині, значить, і точки A, B, C, D лежать в одній площині. Отже, прямі AC і BD також лежать в одній площині, а значить, можуть перетинатися, але не можуть бути мимобіжними.

Задача 2.

Прямі AB і CD мимобіжні. Чи можуть бути паралельними прямі AC і BD? А чи можуть вони перетинатись?

Розв'язання

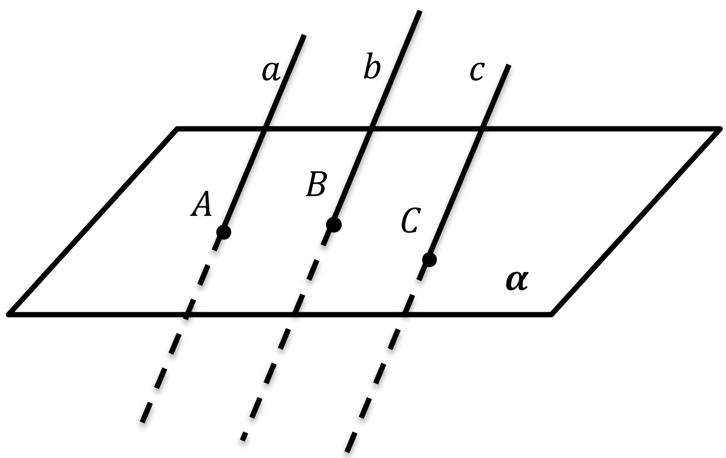
Якщо б могло бути, що $AC \parallel BD$ або AC перетинала BD, то точки A, B, C, D лежали б в одній площині, а цього бути не може, тому що суперечить умові задачі.

Отже, прямі AC і BD не можуть бути ні паралельними, ні перетинатись.

Задача 800. (усно)

У просторі дано пряму a і поза нею точку A. Скільки можна провести через точку A прямих, паралельних a? А мимобіжних з a?

Задача 811. (Рівень А)

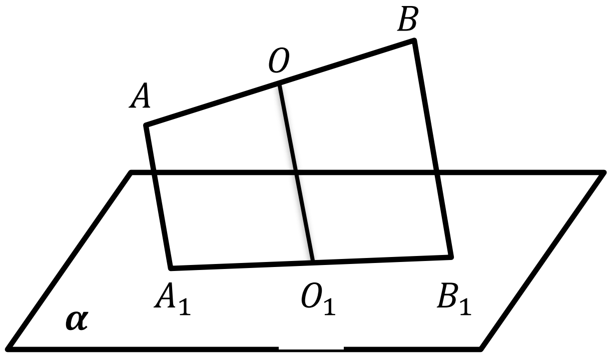


Мал. 3

Попарно паралельні прямі a, b і c перетинають площину α і точках A, B і C так, як показано на малюнку 3. Чи належать дані прямі одній площині?

Задача 818. (Рівень А)

Через кінці відрізка AB і його середину O проведено паралельні прямі, які перетинають площину а в точках A_1, B_1 і O_1. Знайдіть довжину відрізка OO_1, якщо $AA_1 = 11$м, $BB_1 = 33$м і відрізок AB не перетинає площину α. (мал. 4).



Мал. 4

Розв'язання

Учні: Оскільки, нам дано, що відрізок AB не перетинає площину α. Тоді $AA_1 \parallel OO_1 \parallel BB_1$ (за умовою).

Вчитель: Так. Тому, де вони всі лежать?

Учні: Вони всі лежать в одній площині.

Вчитель: Розглянемо ABB_1A_1

Учні: ABB_1A_1 – це трапеція з основами AA_1 і BB_1 та бічними сторонами AB і A_1B_1 (мал. 4).

Вчитель: За умовою $AO = OB$.

Учні: Тоді за теоремою Фалеса $A_1O_1 = O_1B_1$.

Вчитель: Чим є відрізок OO_1?

Учні: OO_1 – середня лінія трапеції ABB_1A_1.

Вчитель: А чому дорівнює середня лінія трапеції?

Учні: Середня лінія трапеції дорівнює півсумі її основ, тобто

$$OO_1 = \frac{a+b}{2} = \frac{11+33}{2} = 22(\text{м}).$$

Відповідь: $OO_1 = 22$ м.

Задача 819. (Рівень Б)

Точка P не лежить у площині трикутника ABC. Яке взаємне розташування прямих PC і AB, прямих EF і PK, якщо точки E і P лежать на прямій PC, а точки P і K – на прямій AB?

Задача 825. (Рівень Б)

Через кінці відрізка AB і внутрішню його точку М проведено паралельні прямі, які перетинають площину α в точках A_1, B_1, M_1. Знайдіть довжину відрізка MM_1., якщо відрізок AB не перетинає площину α і $AA_1 = 10$см, $BB_1 = 30$см, $AB: MB = 1: 3$.

На домашнє завдання дається опрацювати матеріал параграфа 22, і виконати такі завдання 814, 823.

А також розв’язати таку задачу, хто вчиться на високому рівні.

Задача.

Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які сполучають середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

Підводячи підсумки уроку, можна задати учням такі запитання:

1. Як можуть розташовуватися дві прямі у просторі?
2. Які прямі називаються паралельними?
3. Мимобіжними називаються прямі...
4. Скільки прямих, паралельних даній прямій, можна провести:
   а) через точку, що належить цій прямій;
   б) через точку, що не належить цій прямій.

Отже, в даному параграфі ми з учнями вивчили взаємне розміщення двох прямих у просторі. Розроблена методика допомогла їм краще зрозуміти та засвоїти матеріал.

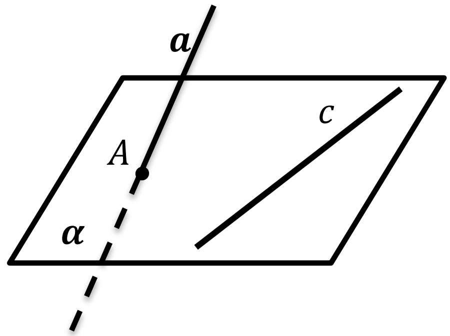
Далі розглядаємо методику викладання теми: ***«Ознака мимобіжності прямих».***

Вчитель: Часто при розв’язуваннях задач необхідно з'ясувати: чи мимобіжні дані прямі? Користуючись означенням мимобіжності прямих, важко відповісти на це питання. Тому на практиці важливу роль відіграє ознака мимобіжності прямих.

Формулюється і доводиться наступна теорема.

Теорема 3. Якщо одна пряма лежить у деякій площині, а друга перетинає цю площину в точці, що не належить першій прямій, то такі дві прямі мимобіжні.

Доведення.



Мал. 5

Вчитель разом з учнями доводять цю теорему.

Учні по черзі доводять біля дошки, а решта в себе в зошитах.

Вчитель: Нехай пряма a перетинає площину α в точці A і не перетинає пряму c, що лежить у площині α (мал. 5). Що потрібно довести?

Учні: Доведемо, що прямі a і c мимобіжні.

Вчитель: Доведення проводимо методом від супротивного.

Учні: Припустимо, що прямі a і c не мимобіжні. Це означає, що вони лежать в якійсь площині β.

Вчитель: Цій площині належать пряма c і точка A, які належать також і площині α.

Учні: Оскільки пряма і точка, яка не належить їй, визначають єдину площину, то площина β – це та сама площина α.

Вчитель: То що звідси випливає?

Учні: Таким чином, пряма c лежить у площині α, що суперечить умові задачі. Отже, прямі a і c не можуть лежати в одній площині.

Учні: Таким чином, вони мимобіжні.

Теорема доведена.

Учні роблять скорочений запис умови та кроків виконання доведення у своїх зошитах.

Далі переходять до розв’язування вправ.

Задача 806. (усно)

Чи можна вважати правильним таке означення: «Прямі називаються мимобіжними, якщо вони не перетинаються і не паралельні»? А таке: «Прямі називаються мимобіжними, якщо вони не лежать в одній площині і не перетинаються»?

Задача 910. (Рівень А)

Точки A, B, C, D, розташовані так, що $AB \parallel CD$. Чи можуть бути мимобіжними прямі AC і BD? Чому?

Задача 820. (Рівень Б)

Через вершину A паралелограма $ABCD$ проведено пряму a, яка не лежить у площині паралелограма, а через точку C – пряму b, яка паралельна BD. Доведіть, що a і b – мимобіжні.

Задача 822. (Рівень Б)

Дві трапеції $ABCD$, $ABMN$ мають спільну основу,але не лежать в одній площині. Доведіть:

а) AB і MN – паралельні;

б) AB і CN – мимобіжні.

На домашнє завдання задаються такі задачі.

Задача 1. (для учнів які навчаються на початковому рівні).

Дано дві мимобіжні прямі a і b. Чи існує площина, в якій лежатимуть ці прямі? Чому?

Задача 2. (для учнів які навчаються на середньому рівні).

Точки A і B лежать на прямій a, а точки C і D – на прямій b, яка мимобіжна з прямою a. Як розміщені прямі AC і BD? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3. (для учнів, які навчаються на достатньому і високому рівнях).

Доведіть, що якщо площина і пряма, яка не лежить в цій площині, паралельні даній площині, то вони паралельні між собою.

Отже, в даному параграфі ми з учнями вивчили ознаку мимобіжності прямих. Розроблена методика допомогла їм краще зрозуміти та засвоїти матеріал.

Далі розглядаємо методику викладання теми: ***«Ознака паралельності прямих»***.

Проводимо тест на визначення істинності математичних тверджень.

Тест

У просторі дано дві різні прямі a і b, які:

варіант 1 – лежать у деякій площині;

варіант 2 – не лежать в одній площині.

Позначте символом «+» правильні твердження, символом «–» – неправильні.

1) Прямі a і b можуть перетинатись.
2) Прямі a і b можуть бути паралельними.
3) Прямі a і b можуть бути мимобіжними.
4) Через пряму a обов'язково можна провести площину, яка перетинає пряму b.
5) Існує деяка пряма c, яка перетинає і пряму a, і пряму c.
6) Обов'язково існує пряма c, яка перетинає пряму a і паралельна прямій b.

Відповідь

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Варіант 1	+	+	-	-	+	-
Варіант 2	-	-	+	+	+	+

А далі переходимо до пояснення нового матеріалу.

Вчитель: В планіметрії вивчались три ознаки паралельності прямих на площині. Сформулюйте їх будь-ласка.

Учні:

– Якщо внутрішні різносторонні кути рівні, то прямі паралельні;

– Якщо сума внутрішніх односторонніх кутів дорівнює 180°, то прямі паралельні;

– Дві прямі, які паралельні третій, паралельні одна одній.

Вчитель: перші дві ознаки паралельності не справджуються для прямих у просторі. Остання ж ознака справедлива і в стереометрії.

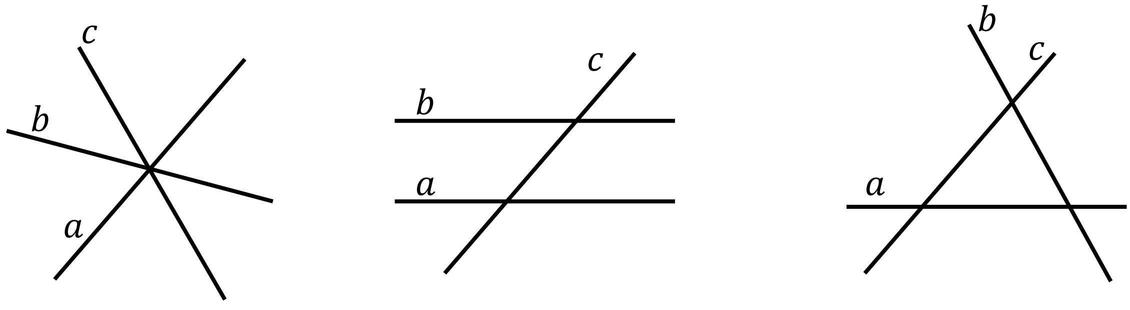
Сформулюємо її.

Учні: *Дві прямі, паралельній третій, паралельні між собою.*

Вчитель: У стереометрії ця ознака називається теоремою про транзитивність паралельних прямих, оскільки в ній говориться про перехід паралельності прямих двох пар на третю.

Вчитель: Як можна розташувати три прямі в просторі так щоб вони перетиналися?

Учні: Три прямі в просторі можна розташувати багатьма різними способами. Усі вони можуть перетинатися в одній точці, одна з них може перетинати дві інші, що не мають спільних точок, можуть перетинатися попарно в трьох різних точках (мал. 6).



Мал. 6

Вчитель: У перших двох випадках усі три прямі можуть лежати або не лежати в одній площині; у третьому випадку всі три прямі належать одній площині.

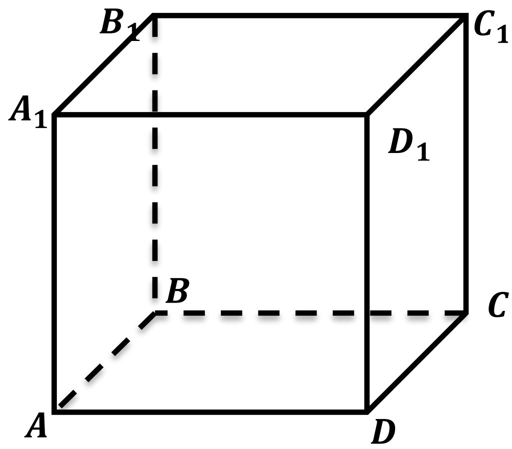
Для закріплення матеріалу, виконуємо вправи.

Дано зображення куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$.

а) чи перетинаються прямі AA_1 та BB_1? Як називаються ці прямі?

б) чи перетинаються прямі AD і BB_1? Як називаються ці прямі?

в) чи можна провести площину через прямі AD і DB_1? A_1D_1 і C_1D_1? AD і BB_1? AA_1 і DD_1?



Мал. 7

Задача 1.

Дано зображення куба. Доведіть, що $AA_1 \parallel CC_1$

Доведення.

Вчитель: Зобразимо даний куб і позначимо його вершини (мал. 7).

Учні: Розглянемо квадрат AA_1B_1B: його сторони AA_1 і BB_1 паралельні.

Вчитель: Аналогічно, у квадрата BB_1C_1C паралельними будуть сторони B_1B і CC_1

Учні: З того, що $AA_1 \parallel BB_1$ та $B_1B \parallel CC_1$ випливає, що $AA_1 \parallel CC_1$ (за транзитивною властивістю).

Задача 2. Прямі a і b перетинаються. Через точку A, яка належить прямій a, проведена пряма c, паралельна прямій b. Скільки різних площин можна провести через прямі a, b і c? Відповідь обґрунтуйте.

На домашнє завдання дається опрацювати матеріал параграфа 22, виконати задачі.

Задача 1. (для учнів які навчаються на початковому рівні).

Відомо, що прямі a і b паралельні прямій c. Як розміщені прямі a і b?

Задача 2. (для учнів які навчаються на середньому рівні).

Прямі a і b не лежать в одній площині. Чи існує пряма c, паралельна прямим a і b? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3. (для учнів, які навчаються на достатньому рівні).

Площини α і β перетинаються по прямій AB. Пряма a паралельна до кожної з площин α і β. Доведіть, що прямі a і AB паралельні.

Задача 4. (для учнів, які навчаються на високому рівні).

Пряма b лежить в площині α і паралельна прямій a, яка не лежить в цій площині. Через точку M площини α (M не належить b) проведена пряма c, паралельна прямій a. Доведіть, що пряма c лежить в площині α.

Для підведення підсумків уроків, задаються такі питання учням:

1. Сформулюйте ознаки паралельності прямих на площині.
2. Сформулюйте ознаки паралельності у просторі.

А також проводиться аналіз тесту, що виконувався на початку уроку.

Отже, поставлена мета усіх уроків була досягнута, учні добре засвоїли матеріал теми: «Ознака паралельності прямих», навчилися розв’язувати задачі на дану тему, тому можна зробити висновок, що розроблена нами методика є ефективною.

2.2. *Методика вивчення паралельності прямих і площин*

Головними завданнями цього навчального модуля є:

- систематизація уявлень учнів про взаємне розміщення прямої та площини;
- формування понять паралельності прямої та площини;
- формування вмінь встановлювати взаємне розміщення прямих і площин;
- розвиток навичок побудови просторових фігур та їх зображень;
- застосування стереометричних понять і фактів про моделювання просторових форм і відношень навколишнього середовища.

Знання та вміння, набуті учнями під час засвоєння матеріалу цього навчального модуля, широко використовуються при подальшому вивченні відношень між прямими і площинами в просторі, а також під час побудови і вивчення складніших геометричних фігур. Крім цього, вони мають неабияке прикладне значення у різних ефірах діяльності людини.

Забезпечення готовності до навчання

Базовим для засвоєння основних понять і результатів цього навчального модуля є, звичайно, поняття паралельності прямих у просторі. На цьому ґрунтуються ознаки паралельності прямої та площини, двох площин, а також доведення більшості фактів, які наводяться у підручниках. Тому доцільно згадати означення й основні властивості відношення паралельності прямих у просторі. Заслуговують на обговорення такі питання, які стосуються означення і властивостей паралельності прямих.

1. Чи правильно, що прямі простору паралельні, якщо вони не мають спільних точок?
2. Чи завжди в площині можна знайти пряму, паралельну деякій прямій?
3. Нехай площини α і β перетинаються по прямій a. Де лежить точка перетину прямої b, що лежить у площині β, з площиною α (якщо вона існує)?
4. Коли дві прямі визначають площину?

5. Скільки прямих, що не мають спільних точок з прямою a, можна провести через точку A, яка лежить поза прямою a? А скільки з них паралельні прямій a?

Розгляд теми ***«Взаємне розміщення прямої і площини у просторі Пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина»*** за вказаною вище схемою дає змогу вивчати взаємне розміщення прямої і площини на основі встановлення кількості спільних точок цих фігур. При цьому можливий як «лінійний» варіант вивчення спочатку всього матеріалу про взаємне розміщення прямої і площини, а потім – про взаємне розміщення двох площин, так і «змішаний»: паралельне вивчення і взаємного розміщення прямої та площини, і взаємного розміщення двох площин на основі аналогій та відмінностей.

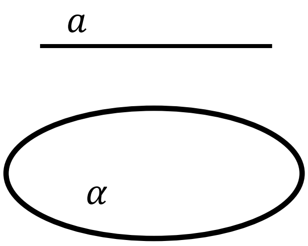
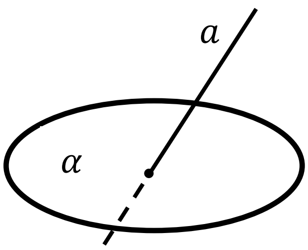
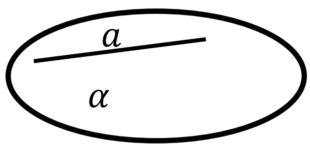
Обговорення питання про взаємне розміщення прямої та площини слід розпочати зі звернення до наочних уявлень учнів про взаємне розміщення прямих і площин.

Вчитель: Як можуть бути розміщені пряма і площина?

Учні, спираючись на власний досвід та інтуїцію, в змозі дати відповідь на таке запитання.

Аналізуючи відповіді учнів, легко переконати їх у тому, що за аналогією з взаємним розміщенням прямих у просторі класифікацію взаємного розміщення прямої і площини доцільно проводити за кількістю спільних точок.

Схема 2

Взаємне розміщення прямої і площини		
		
(1)	(2)	(3)

За частиною (1) схеми 2 можемо сказати, якщо пряма і площина не мають спільних точок, то вони паралельні.

Тоді необхідно сформулювати означення паралельності прямої і площини і подати класифікацію взаємного розміщення прямої та площини у вигляді таблиці.

Означення. Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Вчитель: Паралельність прямої a і площини α позначається так: $a \parallel \alpha$.

Вчитель: Що є наочним представленням прямої, яка паралельна площині?

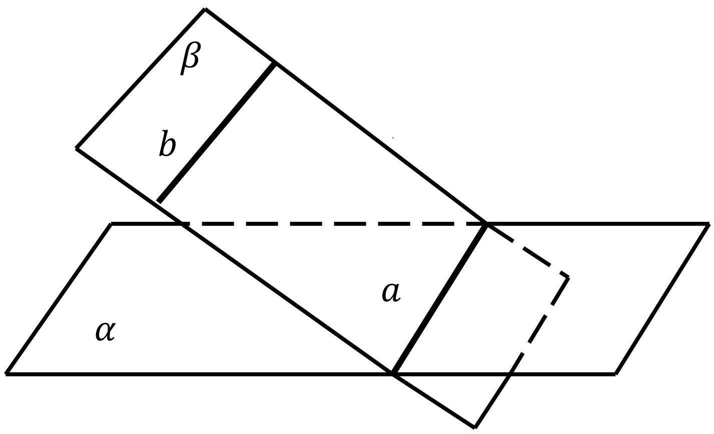
Учні: Наприклад, лінії перетину стіни і стелі – ці лінії паралельні площині підлоги.

Вчитель: Кожне ребро паралелепіпеда паралельне площинам двох його граней (показати на моделі паралелепіпеда).

Означення. Відрізок називається *паралельним площині*, якщо він є частиною прямої, паралельної площині.

Вчитель: Зараз сформулюємо і доведемо теорему, яка широко застосовується на практиці, зокрема під час побудови перерізів.

Теорема 7. *Якщо площина проходить через пряму, паралельну другій площині, і перетинається з цією площиною, то пряма їх перетину паралельна даній прямій.*



Мал. 8

Доведення.

Вчитель: Нехай пряма b не лежить у площині α: $b \parallel \alpha$, $b \subset \beta$, $\alpha \cap \beta = a$ (мал. 8). Що будемо доводити?

Учні: Доведемо, що $a \parallel b$.

Вчитель: Дивимося, прямі a і b перетинаються?

Учні: Ні, тому що $b \parallel \alpha$. Але якби вони перетиналися, то точка їх перетину була б спільною для прямої и і площини α.

Вчитель: Оскільки, прямі a і b не перетинаються, то де вони лежать?

Учні: Вони лежать в одній площині β. Тому $a \parallel b$.

Важливість відношення паралельності прямих пов'язана з тим, що при зміні прямої на паралельну їй пряму збігається багато геометричних відношень і величин. Серед цих найважливіших для подальшого викладу матеріалу тверджень є твердження про те, що кути з однаково напрямленими сторонами рівні Відповідний матеріал у підручнику висвітлений досить детально.

Далі переходять до розв'язування задач.

Якщо задачам на побудову точки перетину прямої з площиною із самого початку не приділити достатньої уваги, то під час розв'язування задач на побудову перерізів многогранників учні матимуть певні труднощі.

Задача 904. (усно).

Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі прямої і площини, які: а) паралельні; б) не паралельні.

Задача 911. (ст. 191)

Скільки площин, паралельних даній прямій, можна провести через дану точку?

Задача 921. (Рівень А)

Через середини двох ребер основи і вершину тетраедра проведено площину. Доведіть, що ця площина паралельна третьому ребру тетраедра.

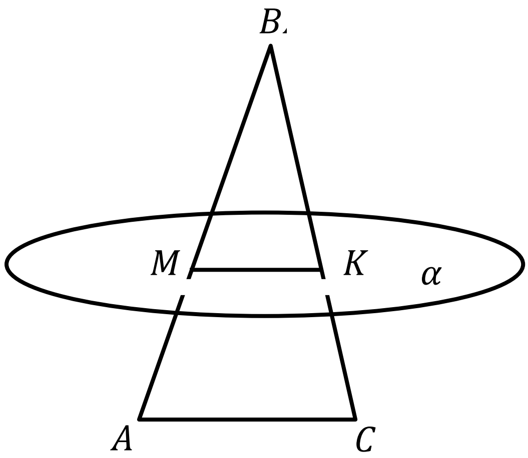
Задача 1. (Середній рівень)

Площина α перетинає сторони $\Delta\, ABC$ у точках M і K ($M \in AB$ і $K \in BC$) так, що: $AC \parallel \alpha$, $AM : MB = 2 : 5$ (мал. 3). Знайдіть AC, якщо $MK = a$.

Розв’язання

Вчитель: Для початку виконаємо малюнок 9.

Один учень виходить до дошки і малює малюнок. Всі інші, тим часом, перемальовують собі в зошити.



Мал. 9

Вчитель: Для того, щоб розв’язати цю задачу, потрібно використати теорему:

Учні: Оскільки $AC \parallel \alpha$ і$AC \subset (ABC)$, то площина $\triangle ABC$ перетинає площину α По прямій, яка паралельна AC (за теоремою 7).

Вчитель: Правильно. Тоді якими є $\triangle MBK$ і $\triangle ABC$?

Учні: $\triangle MBK \sim \triangle ABC$.

Вчитель: А звідси ми можемо отримати співвідношення. Яке саме?

Учні: $\frac{MK}{AC} = \frac{MB}{AB}$

Вчитель: Оскільки, за умовою задачі $AM : MB = 2:5$, звідки $AB = 2 + 5 = 7$.

Учні: Тобто, $\frac{MK}{AC} = \frac{5}{7}$

Вчитель: Тоді звідси, чому дорівнює AC і MK?

Учні: $AC = 1{,}4$, а $MK = 1{,}4a$.

Задача 923. (Рівень Б)

Площина α, паралельна основі трапеції, перетинає її бічні сторони AB і CD у точках M і N. Знайдіть MN, якщо $AD = 7$см, $BC = 3$см, а $AM = BM$.

Для закріплення навичок побудови точок перетину прямої та площини можна запропонувати учням удома побудувати точку перетину прямої MN з площиною верхньої грані куба, а також побудувати точку перетину прямої MN з площинами верхньої, нижньої і задньої граней, якщо точка N лежить у правій грані куба (наприклад, у її центр).

І виконати такі задачі:

Задача 1. (для учнів які навчаються на початковому рівні).

Через точку M, що не лежить в площині α, проведіть пряму, паралельну площині α.

Задача 2. (для учнів які навчаються на середньому рівні).

Точка M не лежить в площині трапеції $ABCD$ з основою AD. Яке взаємне Розміщення прямої AD з площиною BMC? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3. (для учнів, які навчаються на достатньому рівні).

Через кінець A відрізка AB проведена площина. Через кінець B і точку c Цього відрізка проведені паралельні прямі, які перетинають дану площину в точках B_1 і C_1 відповідно. Знайдіть BB_1 якщо $CC_1 = 8{,}1$см, а $AB{:}AC = 11{:}9$.

Задача 4. (для учнів, які навчаються на високому рівні).

Дано чотири точки A, B, C, D, які не лежать в одній площині. Доведіть, до будь-які дві з трьох прямих, які з'єднують середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, лежать в одній площині.

Отже, ми бачимо, що розроблена нами методика вивчення взаємного розміщення прямої і площини у просторі є ефективною. Учні добре засвоїли матеріал.

Далі проводиться урок на тему: ***«Ознака паралельності прямої і площини».***

Цей урок слід розпочати з повторення, того, що вивчали на минулих уроках.

Вчитель: Як можуть бути розташовані в просторі пряма і площина?

Учні: Вони можуть: 1) перетинатися, тобто мати тільки одну спільну точку; 2) кожна точка прямої може лежати в площині; 3) не мати жодної спільної точки.

Вчитель: Сформулюйте означення паралельності прямої і площини.

Учні: Пряма і площина називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Вчитель: Чи може бути відрізок або промінь паралельний площині?

Учні: Може.

Вчитель: Який відрізок називають паралельним площині?

Учні: Відрізок називається паралельним площині, якщо він є частиною прямої, паралельної площині

Доведемо ознаку паралельності прямої і площини.

Теорема 6. Якщо пряма, яка не належить площині, паралельна якій-небудь прямій у цій площині, то вона паралельна і самій площині.

Доведення

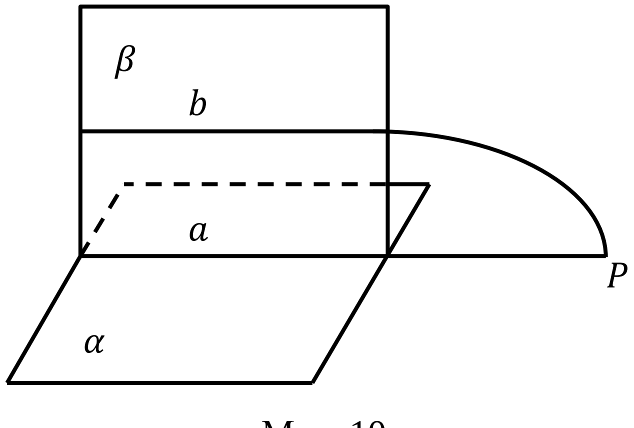
Доведення проводиться у вигляді діалогу з учнями:

Вчитель: Що відомо і що потрібно довести?

Учні: Нехай прима $b \parallel a$. Доведемо, що $b \parallel \alpha$.

Вчитель: Доведення проводимо від супротивного.

Учні: Припускаємо, що пряма b не паралельна α, а перетинає площину α у деякій точці P (мал. 10).



Мал. 10

Вчитель: Ця точка лежить у площині α і в площині β, яка проходить через паралельні прямі a і b.

Учні: Отже, точка P лежить на прямій a, по якій перетинаються площини α і β. Прийшли до суперечності: паралельні прямі a і b мають спільну точку P.

Вчитель: Що звідси випливає?

Учні: Звідси випливає, що пряма b не може перетинати площину α.

Вчитель: Вона взагалі не лежить у площині α.

Учні: Отже, $b \parallel \alpha$. Що і треба було довести.

Переходять до закріплення нових знань.

Задача 905. (усно)

Пряма a паралельна площині α.

а) Чи кожна пряма площини α паралельна прямій a?

б) Скільки в площині α можна провести прямих, паралельних прямій a?

в) Чи існують у площині α прямі, мимобіжні з прямою a?

Задача 1.

Доведіть, що через будь-яку з двох мимобіжних прямих a і b можна провести площину α, паралельну іншій прямій.

Доведення.

Вчитель: Що дано з умови задачі?

Учні: Дано, що прямі a і b мимобіжні.

Вчитель: Візьмемо на прямій a точку A і проведемо через неї пряму c, паралельну прямій b.

Учні: А через прямі a і c, що перетинаються, проведемо площину α.

Вчитель: Це і є шукана величина.

Учні: Оскільки $b \parallel c$, тому $b \parallel a$.

Задача 929. (Рівень Б)

Через дану точку проведіть пряму, паралельну даній площині.

Розв'язання

Вчитель: Що нам дано в умові задачі?

Учні: Нехай дано площину α і точку A поза нею.

Вчитель: Які етапи розв'язання задачі на побудову?

Учні: Аналіз, побудова, доведення, дослідження.

АНАЛІЗ

За умовою $A \in \alpha$. Щоб пряма a, яка проходить через точку A, була паралельна площині α, достатньо, щоб вона була паралельна прямій b, яка належить площині α.

ПОБУДОВА

1. В площині α проводимо довільну пряму b.
2. Через пряму b і точку A проводимо площину β
3. Через точку A проводимо пряму a таку, що $a \parallel b$.

ДОВЕДЕННЯ

Згідно з ознакою паралельності прямої і площини маємо: $a \parallel \alpha$.

ДОСЛІДЖЕННЯ

Пряма b проводиться в площині α довільно, таких ирямих нескінченна множина. Отже, задача має нескінченну кількість розв'язків.

Задача 930. (Рівень Б)

Дано площину і паралельну їй пряму. Через точку, взяту на площині,проведіть у цій самій площині пряму, паралельну даній прямій.

Самостійна робота

Варіант 1

I рівень

1. Як можуть розміщуватися дві прямі?
2. Прямі a і b паралельні і пряма b лежить в площині α. Чи перетинає пряма a площину α?

II рівень

1. Пряма a паралельна прямій b, а пряма b паралельна площині γ. Яке взаємне розміщення прямої a і площини γ. Відповідь обгрунтуйте.

III рівень

1. З точки K, що не лежить в площині α, проведено прямі KM і KN, які перетинають площину α в точках M і N. Доведіть, що пряма, яка проходить через середини відрізків KM і KN, паралельна площині α.

IV рівень

1. Трикутник APD і трапеція $ABCD$ мають спільну точку AD і лежать в різних площинах. Через основу BC трапеції і середину відрізка PD – точку K проведена площина, яка перетинає пряму AP в точці M, $AD = 2BC$. Доведіть, що підрізки MC і BK перетинаються і в точці перетину діляться пополам.

Варіант 2

I рівень

1. Яка пряма називається паралельною площині?
2. Скільки можна провести прямих через точку, що не належить прямій a, паралельних цій прямій? Чому?

II рівень

1. Площина α паралельна основі AD трапеції $ABCD$ і перетинає сторони AB і CD в точках M і N відповідно. M – середина AB, $AD = 10$см, $BC = 145$см. Знайдіть довжину відрізка MN.

III рівень

1. Сторони AB і BC паралелограма $ABCD$ перетинають площину α. Доведіть, що прямі AD і DC теж перетинають площину α.

IV рівень

1. Побудуйте трапецію $ABCD$ і точку K, яка не лежить в площині (ABC). Відмітьте точки E і P – середини діагоналей AC і BD відповідно. Побудуйте лінію перетину площин EPK і ADK.

Отже, у ході розв’язування задач до цієї теми в учнів формуються навички використання ознаки паралельності прямої і площини та теореми, оберненої до неї, для встановлення взаємного розміщення прямих і площин та для виконання геометричних побудов.

Отже, поставлена мета всіх уроків була досягнута, учні добре засвоїли матеріал, навчилися розв'язувати задачі по даній темі, гарно написали самостійну роботу, тому можна зробити висновок, що розроблена нами методика є ефективною.

2.3. Методика вивчення паралельності площин

Головними завданнями цього навчального модуля є:

- систематизація уявлень учнів про взаємне розміщення двох площин;
- формування понять паралельності двох площин;
- розвиток навичок побудови просторових фігур та їх зображень;
- застосування стереометричних понять і фактів про моделювання просторових форм і відношень навколишнього середовища.

Розгляд теми ***«Взаємного розміщення площин в просторі. Пряма і площина, що перетинаються, паралельні пряма і площина»*** традиційно починаємо із звернення до наочних уявлень учнів.

<u>Вчитель:</u> Як можуть розміщуватися дві площини одна відносно одної? Аналізуючи їх відповіді, а також використовуючи їх попередній досвід класифікації випадків взаємного розміщення прямих, прямої та площини.

<u>Учні:</u> Ми знаємо, якщо дві різні площини мають спільну точку, то вони перетинаються по прямій, що проходить через цю точку (за аксіомою C_2). Звідси випливає, що дві площини або перетинаються по прямій, або не перетинаються, тобто не мають спільних точок.

Означення. Дві площини називаються *паралельними*, якщо вони не мають спільних точок.

<u>Вчитель:</u> Що в класі є моделлю паралельних площин?

<u>Учні:</u> Уявлення про паралельні площини дають підлога і стеля кімнати, і протилежних стіни тощо.

<u>Вчитель:</u> Якщо площини α і β паралельні, то як це позначається?

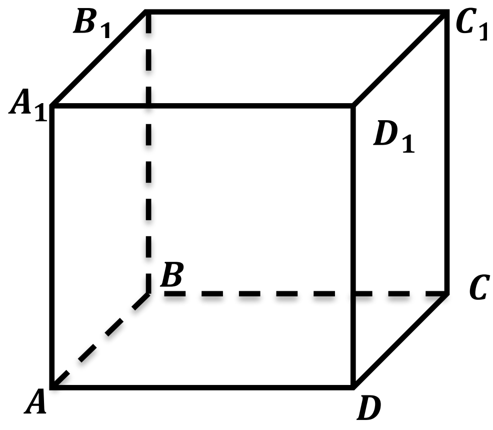
<u>Учні:</u> Це буде виглядати так: $\alpha \parallel \beta$.

Завдання. (усно)

1. На моделях куба і прямокутного паралелепіпеда покажіть паралельні площини і площини, що перетинаються.
2. Користуючись зображенням прямокутного паралелепіпеда (мал. 11), вкажіть:

а) грані, які перетинають грань $ABCD$;

б) площини, які паралельні площині (ABC).



Мал. 11

Задача 939. (усно)

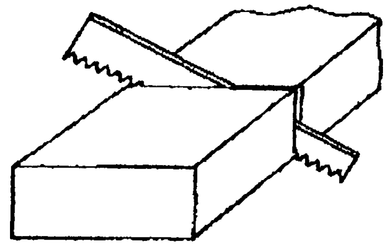
Серед речей, які ви бачите в класі, покажіть або назвіть матеріальні моделі площин:

а) паралельні;

б) не паралельні.

Задача 942. (усно)

Кожна грань дошки – прямокутник (мал. 12).



Мал. 12

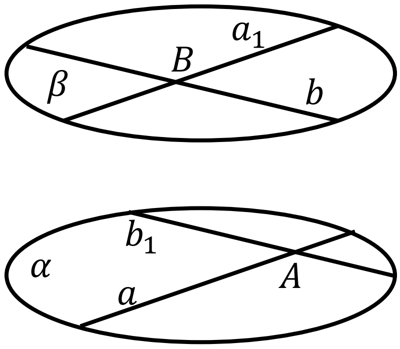
Доведіть, що в якому б напрямі не розпилювали дошку, перетинаючи її всі поздовжні ребра, у перерізі завжди буде паралелограм.

Один учень виходить до дошки і розв'язує задачу, всі інші розв'язують в себе в зошитах.

Задача 1.

Доведіть, що через дві будь-які мимобіжні прямі можна провести пару паралельних площин.

Вчитель: Малюємо малюнок. Нехай дано мимобіжні прямі a і b (мал. 13)



Мал. 13

Учні: Через довільну точку A прямої a проведемо пряму b_1 паралельну b, а через пересічні прямі a і b_1 - площину α.

І так само, через довільну точку B прямої b проведемо пряму a_1 паралельну a, а через прямі b і a_1 – площину β.

Вчитель: Що звідси випливає?

Учні: За ознакою паралельності площини α і β паралельні.

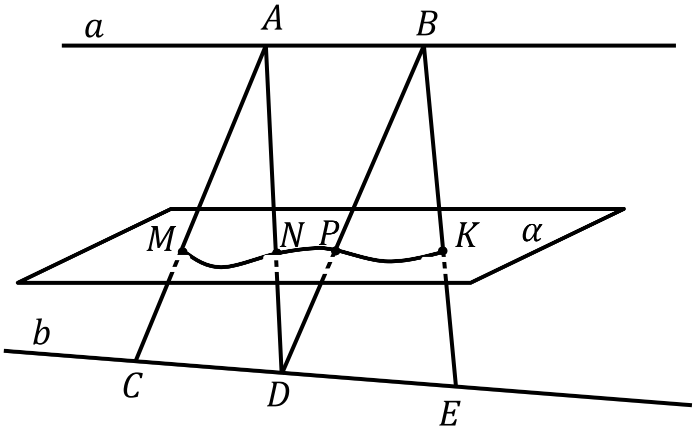
Задача 949.(рівень А)

Площини α і β паралельні. Доведіть, що кожна пряма площини α паралельна площині β.

Задача 2.

Доведіть, що геометричне місце середини відрізків з кінцями на двох мимобіжних прямих є площина, паралельна цим прямим.

Розв’язання.



Мал. 14

Вчитель: Нехай a і b – мимобіжні прямі.

Учні: Проведемо відрізки AC, AD, BD, BE, кінці яких знаходяться на прямих a і b.

Вчитель: Чим є точки M, N, P, K?

Учні: Точки M, N, P, K є серединами проведених відрізків відповідно.

Вчитель: Сполучимо середини цих відрізків.

Учні: Очевидно, що MN середня лінія $\triangle ACD$, NP – середня лінія $\triangle ABD$, PK – середня лінія $\triangle BDE$.

Вчитель: Застосуємо властивість середньої лінії трикутника.

Учні: То буде так: $MN \parallel CD$, $NP \parallel AB$, $PK \parallel DE$ або $MN \parallel b$, $NP \parallel a$, $PK \parallel b$.

Вчитель: Оскільки прямі MN і NP мають спільну точку N, то вони перетинаються.

Учні: А якщо вони перетинаються, то через них можна провести площину.

Вчитель: Прямі NP і PK, мають спільну точку P.

Учні: Через них можна також провести площину.

Вчитель: $MN \parallel PK$ за ознакою паралельності прямих.

Учні: З цього випливає, що через них можна провести площину. Таким чином прямі MN, NP, PK лежать в одній площині.

Вчитель: Аналогічно доводиться, що середини інших відрізків, які сполучають точки на прямих a і b, лежать в одній площині.

Учні: Оскільки, $MN \parallel b$, то можна стверджувати, що $b \parallel \alpha$ (за ознакою паралельності прямої і площини).

Вчитель: Аналогічно, $a \parallel \alpha$.

Учні: Таким чином, площина α паралельна водночас двом мимобіжним прямим a і b.

Вчитель: Це означає, що геометричним місцем середини відрізків з кінцями на двох мимобіжних прямих є площина, паралельна цим двом прямим, що і треба було довести.

Задача 959. (рівень Б)

Доведіть, що коли перерізом паралелепіпеда є шестикутник, то його протилежні сторони паралельні.

Розв'язуючи задачі до теми «Паралельність площин», необхідно сформувати навички використання ознак паралельності для встановлення взаємного розміщення площин в просторі, а також використання ознак і властивостей паралельності площин під час розв'язування задач на побудову.

На домашнє завдання доцільно дати виконати такі задачі:

Задача 1. (для учнів які навчаються на початковому рівні).

Дві паралельні площини α і β перетинає площина γ по прямих a і b. Як розміщені ці прямі? Чому?

Задача 2. (для учнів які навчаються на середньому рівні).

Площини α і β паралельні площині γ. Як розміщені площини α і β? Відповідь обґрунтуйте.

Задача 3. (для учнів, які навчаються на достатньому рівні).

Через точку S, що лежить між паралельними площинами α і β, проведемо прямі l і m, які перетинають дані площини відповідно в точках A_1, A_2 і B_1, B_2. Обчисліть A_2S і B_2S, якщо $A_1A_2 = A_1S$, $A_1A_2 = 2$ см, $B_2S = 8$ см.

Задача 4. (для учнів, які навчаються на високому рівні).

На паралельних площинах α і β вибрано по парі точок A_1, A_2 і B_1, B_2 відповідно так, що прямі A_1B_1 і A_2B_2 перетинаються в точці S. Знайдіть SA_1 і SA_2, якщо $A_1B_1 = 6$ см, $SA_2 - 2{,}5$ см, $SB_2 : SA_2 = 3$.

Отже, учні навчились розв'язувати задачі на тему «Паралельність площин». Розроблена методика допомогла їм краще зрозуміти та засвоїти матеріал.

Далі будемо розглядати тему ***«Ознака паралельності площин»***.

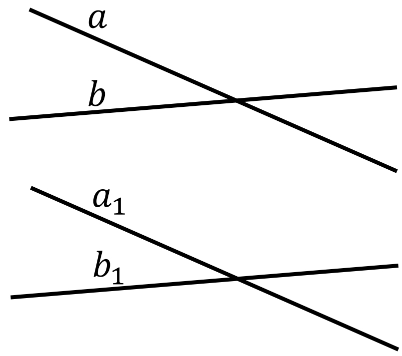
Ця тема розпочинається з такого питання:

<u>Вчитель:</u> Які дві площини називаються паралельними?

Учень: Дві площини називаються паралельними, якщо вони не мають спільних точок.

Вчитель: На практиці для встановлення паралельності площин використовують наступну теорему .

Теорема 8. Якщо дві прямі, які перетинаються і лежать п одній площині, паралельні двом прямим другої площини, то такі площини паралельні (мал. 15).

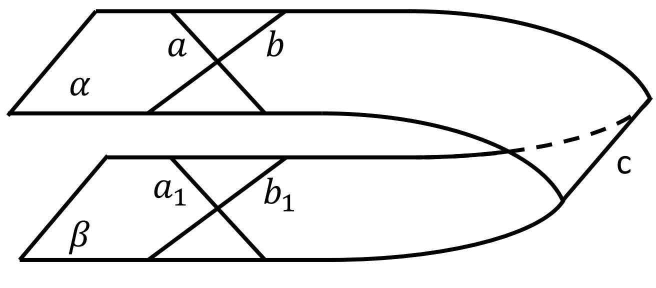


Мал. 15

Розглядаючи доведення ознаки паралельності двох прямих, важливо підкреслити, що так доводиться існування паралельних площин.

Доведення.

Нехай прямі a і b, що перетинаються, лежать у площині α, а паралельні їм прямі a_1 і b_1 у площині β (мал. 16).



Мал. 16

Вчитель: Що потрібно довести?

Учні: Потрібно довести, що $\alpha \parallel \beta$.

Вчитель: Доведення знову ж таки проводяться від супротивного.

Учні: Припустимо, що α і β не паралельні, тобто перетинаються по деякій прямій c.

Вчитель: Ми бачимо,що прямі a і b паралельні прямим a_1 і b_1 площини β.

Учні: Це означає, що $a \parallel \beta$ і $b \parallel \beta$.

Вчитель: прямі a і b не перетинають пряму c,оскільки c лежить у площині β, з якою a і b не мають спільних точок.

Учні: Усі ці прямі лежать у одній площині α. То виходить, що $a \parallel c$ і $b \parallel c$.

Вчитель: Тобто, дві прямі, які перетинаються, паралельні третій прямій.

Учні: А це суперечить аксіомі паралельності. Отже, площини α і β не можуть перетинатися, тобто $\alpha \parallel \beta$.

Переходять до розв'язування вправ.

Задача 947. (усно)

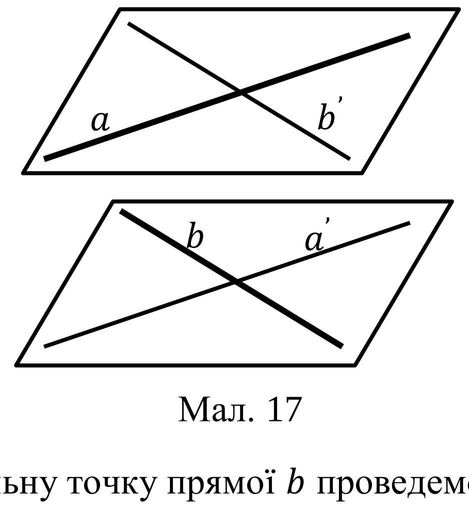
Чи можуть перетинатися площини α і β, якщо кожна з них паралельна площині γ?

Задача 1.

Доведіть, що через дві мимобіжні прямі можна провести паралельні площини.

Доведення.

Вчитель: Нехай a і b – дані мимобіжні прямі (мал. 17.). Через довільну точку прямої a проведемо пряму b', паралельну b.



Мал. 17

Учні: А через довільну точку прямої b проведемо пряму a', паралельну a.

Вчитель: Тепер проведемо дві площини – одну через прямі a і b', а другу – через b і a'.

Учні: За ознакою паралельності площин ці площини паралельні. У першій з них лежить пряма a, а у другій – пряма b.

Задача 952. (Рівень А)

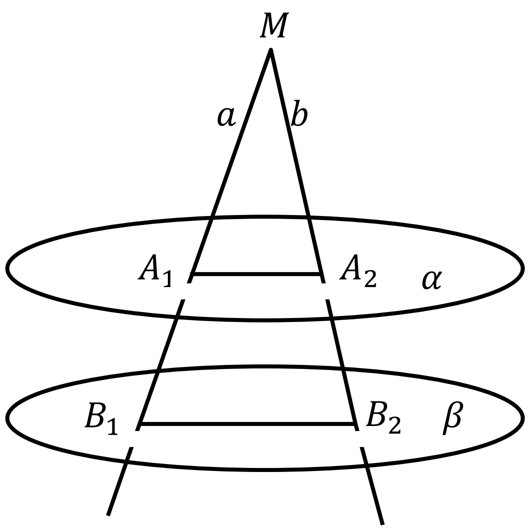
Пряма a паралельна площині α. Як через пряму a провести площину, паралельну α?

Задача 953. (Рівень А)

Доведіть, що коли пряма або площина перетинає одну з двох паралельних площин, то вона перетинає і другу площину.

Задача 962. (Рівень Б)

Через точку M проведено дві прямі a і b, що перетинають дві паралельні площини α і β (див. мал. 18). Першу в точках A_1 і A_2, другу в точках B_1 і B_2. Обчисліть MA_1 і MB_2, якщо $A_1A_2 : B_1B_2 = 3:4$, $A_1B_1 = 3{,}5$ м, $MA_2 = 1{,}2$ м.



Мал. 18

Задача 2 (додаткова).

Доведіть, що коли чотири прямі проходять через точку A і перетинають площину α у вершинах паралелограма, то вони перетинають будь-яку площину, яка паралельна α і не проходить через точку A, також у вершинах паралелограма.

На домашнє завдання дається опрацювати матеріал параграфа 26, і виконати такі завдання 950, 958.

Ми будемо розглядати методику теми: ***«Властивості паралельних площин»***.

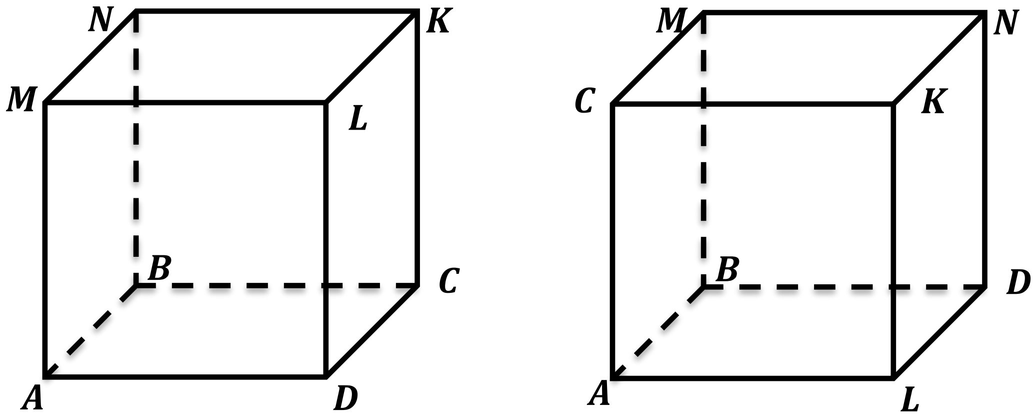
Перш за все, вчитель дає учням математичний диктант.

Математичний диктант

Дано зображення куба (мал. 19.)

варіант 1 – зліва;

варіант 2 – справа.



Мал. 19

Користуючись зображенням, запишіть:

1) площину, яка паралельна площині (ABC);
2) площину, яка паралельна площині (CNL)
3) площину, яка паралельна площині (MKD);
4) паралельні площини, які містять мимобіжні прямі MK і AB;
5) паралельні площини, які проходять через мимобіжні прямі AB і KD;
6) площину, яка паралельна площині (MKL) і містить пряму AD.

Відповіді до тесту

	1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
Варіант 1	MNK	BDM	ACN	ABC, KLM	ABM, CKD	ABC
Варіант 2	LNK	ADM	BCL	ABD, CKM	ABC, DKL	ABD

Вчитель: У кожного з вас, є своя модель двох паралельних площин, які перетинаються третьою площиною. Покажіть лінії перетину цих площин. Що можна сказати про взаємне розташування цих прямих?

Учні: Лінії перетину паралельних площин третьою площиною паралельні між собою.

Теорема 9. Паралельні площини перетинаються січною площиною по паралельних прямих.

Доведення.

Працюючи із підручником, учні самостійно розбирають доведення. Роблять відповідні записи в зошитах.

Теорема 10. Паралельні площини, перетинаючи паралельні прямі, відтинають від них рівні відрізки.

Доведення.

Працюючи із підручником, учні самостійно розбирають доведення. Роблять відповідні записи в зошитах.

Після цього переходять до розв'язування вправ.

Задача 945. (усно)

Чи можуть дві паралельних площини відтинати рівні відрізки від трьох непаралельних прямих?

Задача 946. (усно)

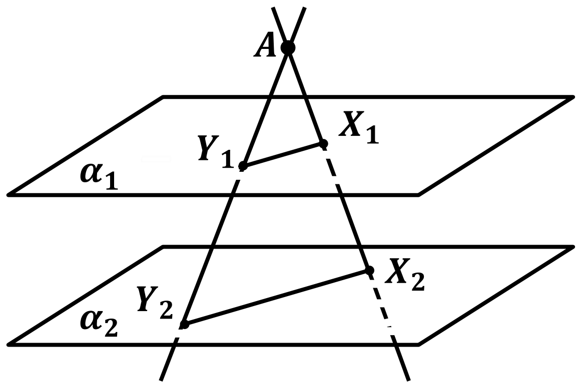
Площина γ перетинає площини α і β по паралельних прямих. Чи випливає з цього, що площини α і β паралельні?

Задача 1.

Дано дві паралельні площини α_1, α_2 і точка A, яка не лежить у жодній з цих площин. Через точку A проведено довільну пряму. Нехай X_1 і X_2 – точки перетину її з площинами α_1 і α_2. Доведіть, що відношення довжин відрізків $AX_1 : AX_2$ не залежить від узятої прямої.

Розв'язання.

Вчитель: Проведемо через точку A іншу пряму і позначимо через Y_1 і Y_2 точки перетину її з площинами α_1 і α_2 (мал. 20.).



Мал. 20

<u>Учні:</u> Проведемо через прямі AX_1 і AY_1 площину.

<u>Вчитель:</u> Вона перетне площини α_1 і α_2 по паралельних прямих X_1Y_1 і X_2Y_2.

<u>Учні:</u> Звідси випливає подібність трикутників AX_1Y_1 і AX_2Y_2.

<u>Вчитель:</u> А з подібності трикутників випливає пропорція, а яка саме?

<u>Учні:</u> $\frac{AX_1}{AX_2} = \frac{AY_1}{AY_2}$ тобто відношення $AX_1 : AX_2$ і $AY_1 : AY_2$ однакові для обох прямих.

Задача 955. (Рівень А)

$ABCDA_1B_1C_1D_1$ – куб K, P, T – середини ребер, що виходять з вершини B. Доведіть, що площини (KPT) і (AB_1C) паралельні.

Задача 966. (Рівень Б)

Дано три паралельні площини α, α_1, α_2, прямі a і b перетинають їх відповідно в точках A, A_1, A_2, і B, B_1, B_2. Доведіть, що $AA_1 : A_1A_2 = BB_1 : B_1B_2$.

Отже, учні добре засвоїли матеріал, навчилися розв'язувати задачі застосовуючи властивість паралельності двох площин. Можемо сказати, що розроблена нами методика є ефективною.

Як відомо, обов'язковими видами оцінювання навчальних досягнень учнів є тематичне і підсумкове. Основною одиницею оцінювання є навчальна тема. Однак, для успішного його проведення необхідно здійснювати рівневі навчання математики.

Тематична перевірочна робота призначена для перевірки знань і вмінь учнів. Отже, в ній має міститися така кількість завдань, що охоплювала б весь теоретичний матеріал теми, яка перевіряється. Кількість завдань для тематичного оцінювання кожного рівня і критерії оцінювання навчальних досягнень учнів з їх розв'язання подано в наведеній нижче таблиці.

Рівні навчальних досягнень	Кількість завдань	Кількість вірно розв'язаних завдань	Бали
I	10	5-6 7-8 9-10	1 2 3
II	6	4 5 6	4 5 6
III	5	3 4 5	7 8 9
IV	4	2 3 4	10 11 12

Для того, щоб задачний матеріал, який призначений для засвоєння і закріплення знань учнів, охоплював весь теоретичний матеріал даної теми, то його кількість має мати таке процентне співвідношення: задач початкового рівня – 40%, середнього рівня – 24%, достатнього – 20% і високого лише 16%.

Отже, для того, щоб здійснити контроль знань і вмінь учнів з конкретної теми, потрібно щоб в тематичній перевірочній роботі кількість завдань кожного рівня мала відповідне відсоткове співвідношення.

Контрольна робота №1[27]

I рівень	Кількість завдань	9-10	7-8	5-6
	Бали	«3»	«2»	«1»

1. Прямі a і b не лежать в одній площині. Які це прямі? Чому?

2. Прямі a і b паралельні і пряма b паралельна прямій c. Чи будуть паралельними прямі a і c? Чому?

3. Сторона AB паралелограма належить площині α, а сторона CD не належить цій площині. Як розміщена пряма CD відносно площини α? Чому?

4. Точка M не лежить в площині трикутника ABC. Якими є прямі MA і BC? Чому?

5. Пряма a паралельна площині α. Як розміщена площина α відносно прямих, паралельних даній прямій?

6. Два трикутники ABC і $A_1B_1C_1$ лежать в різних площинах, причому $AB \parallel A_1B_1$, $BC \parallel B_1C_1$. Як розміщені ці площини? Чому?

7. Прямокутник $ABCD$ і паралелограм $ADMN$ не лежать в одній площині. Як розміщені прямі MN і BC? Чому?

8. Точка C не належить площині α. Скільки площин можна провести через точку C паралельно площині α? Чому?

9. Дві паралельні прямі a і b перетинають дві паралельні площини α і β відповідно в точках A і C, B і D. Якими будуть відрізки AC і BD? Чому?

10. Чи може паралельною проекцією квадрата бути трапеція? Чому?

II рівень	Кількість завдань	6	5	4
	Бали	«6»	«5»	«4»

1. Точки A, B, C і D не лежать в одній площині. Яке взаємне розміщення прямих AB і CD? Відповідь обґрунтуйте.

2. Пряма a паралельна прямій b, а пряма b перетинає площину α. Яке взаємне розміщення прямої a і площини α? Відповідь обґрунтуйте.

3. Площина α паралельна стороні трикутника ABC і перетинає його сторони AC і BC в точках M і N, причому M – середина AC. Знайдіть довжину відрізка MN, якщо $AB = 20$ см.

4. Площина α перетинає площину трапеції по прямій, яка містить її середню лінію. Яке взаємне розміщення основ трапеції і площини α? Відповідь обґрунтуйте.

5. Точка S знаходиться поза площиною трикутника ABC. Точки A_1, B_1 і C_1 є відповідно серединами відрізків SA, SB, SC. Яке взаємне розміщення площин ABC і $A_1B_1C_1$? Відповідь обґрунтуйте.

6. Трикутник $A_1B_1C_1$ є паралельною проекцією правильного трикутника ABC. Побудуйте проекцію бісектриси, проведеної до сторони AC.

III рівень	Кількість завдань	5	4	3
	Бали	«9»	«8»	«7»

1. Доведіть, що прямі, які перетинають одну з двох мимобіжних прямих і паралельні другій прямій, лежать в одній площині.

2. Дві різні площини α і β паралельні площині γ. Доведіть, що площини α і β паралельні.

3. Через дану точку проведіть площину, паралельну даній площині.

4. Через точку A, що лежить між паралельними площинами α і β, проведемо прямі a і b, які перетинають ці площини відповідно в точках A_1, A_2 і B_1, B_2. Обчисліть AB_1 якщо $B_1B_2 = 42$ см, $A_1B_1 = 5$ см, $A_2B_2 = 9$ см.

5. Побудуйте паралельну проекцію квадрата $ABCD$, знаючи проекції його вершин A і B та точки перетину діагоналей.

IV рівень	Кількість завдань	4	3	2
	Бали	«12»	«11»	«10»

1. Дано чотири точки A, B, C і D, які не лежать в одній площині. Доведіть, що прямі, які з'єднують середини відрізків AB і CD, AC і BD, AD і BC, перетинаються в одній точці.

2. Трикутники ABC і DBC не лежать в одній площині і мають спільну сторону. Точки M, H і K – середини відповідно відрізків BD, CD, AC. Площина MKH перетинає відрізок AB в точці P. Доведіть, що відрізки PH і MK перетинаються і в точці перетину діляться пополам.

3. Побудуйте паралелограм $ABCD$ і точку P, яка не лежить в площині цього паралелограма. Відмітьте точки E, K, M і Р – середини сторін AB, CB, CD і AD відповідно. Побудуйте лінію перетину площин PEH і PKM.

4. Через точку K проведено дві прямі a і b, які перетинають дві паралельні площини α і β: першу в точках A_1 і A_2, другу в точка B_1 і B_2 відповідно. Знайдіть KA_1 і KB_2, якщо $A_1A_2 : B_1B_2 = 3:4$, $A_1B_1 = 7$ см, $KA_2 = 12$ см.

Отже, ми дійшли до висновку, що розроблена нами методика допоможе вчителям, досягти кращих результатів. Контрольна робота показала, що учні засвоїли вивчений матеріал, що видно в експериментальній частині.

2.4. Експериментальна перевірка розробленої методики

Аналіз сучасної психолого-педагогічної літератури та підручників показує, що їх орієнтування на «середнього учня» призводить до того, що в процесі навчання математика не повністю враховує різнорівневого засвоєння учнями матеріалу. В результаті – відсутність зацікавленості у вивченні матеріалу, низькі знання учнів з математики.

Під час проходження практики на 1 курсі ми зустрілися з цими проблемами. Тому було поставлено завдання провести дослідження використання методики викладу матеріалу пов’язаного з вивченням паралельності прямих і площин в просторі, та проаналізувати, як її впровадження впливає на навчальний процес та засвоєння учнями матеріалу.

На уроках математики здійснювалось пояснення нового матеріалу, розв'язання задач. Результатом було зростання в учнів інтересу до уроків математики, збільшилась їхня активність на уроках, заповнилися прогалини в знаннях. Все це підтвердило ефективність впровадження даної методики при вивченні геометрії.

При підборі матеріалу ми виявили, що сьогодні різнорівневе навчання скоріше є теоретичною моделлю розвиваючого навчання, ніж цілісним процесом у шкільній практиці. Основна частина цього полягає в тому, що теоретичні розробки питань щодо доцільного застосування різних ситуацій у навчанні, способів розв'язання задач не доведені до рівня конкретних педагогічних технологій. Про це свідчить аналіз сучасної психолого-педагогічної літератури та дидактичних матеріалів. Тому ми розробили методичну систему вивчення паралельності прямих і площин в просторі в курсі геометрії.

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилась в Кам’янець-Подільському ліцеї № 5 протягом 2022 – 2023 навчального року.

За експериментальну групу було взято учнів 10-А класу. Середній бал успішності в даному класі за минулий навчальний рік становив 7,8. В контрольній групі в 10-Б класі середній бал успішності складав 8,1.

Вчителям було пояснено, в чому полягає суть експерименту та особливості навчання за розробленою методикою. Учні контрольної групи працювали за шкільною програмою та підручниками, а учні експериментального класу працювали за розробленою нами методикою. В кінці вивчення теми «Паралельність прямих і площин в просторі» учням як експериментальної групи, так і контрольного класу було запропоновано перевірочні контрольні роботи (при оцінюванні навчальних досягнень учнів користувалися схемою).

Контрольна робота №1 (див. с. 55).

Учні цих класів отримали такі оцінки:

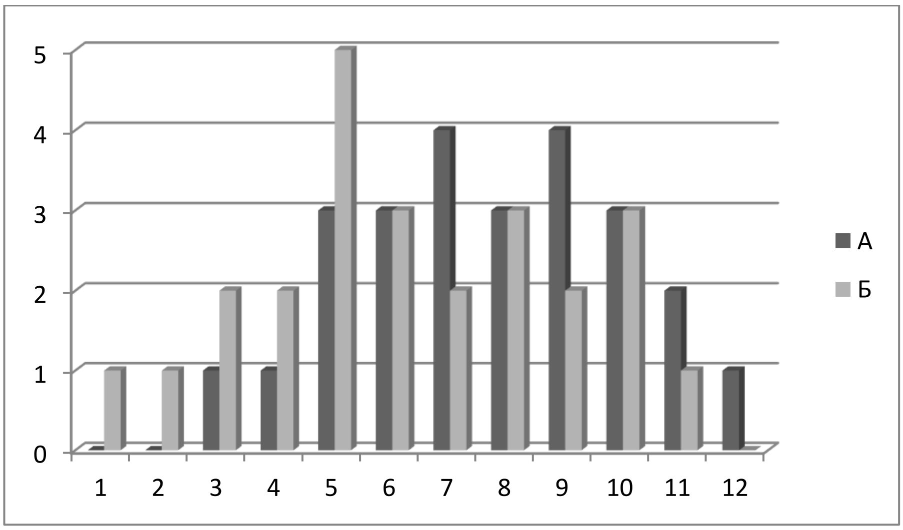
Бали	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
А	0	0	1	1	3	3	4	3	4	3	2	1
Б	1	1	2	2	5	3	2	3	2	3	1	0

А – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в експериментальному класі);

Б – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в контрольному класі);

Результати роботи в графічному зображенні: (діаграма 1)

Діаграма 1



Як видно з одержаної гістограми, в експериментальному класі спостерігається ріст балів достатнього і високого рівня, причому кількість їх більша ніж в контрольному класі. Це говорить про те, що розроблена методика є ефективною.

Для того, щоб з’ясувати точно, як впливає застосування даного методу у навчанні геометрії на формування та засвоєння математичних знань, застосуємо метод кореляції на прикладі даних класів. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції, який є мірою цілісності розглянутого зв’язку. Чим ближчий коефіцієнт до 1, тим ближча залежність між застосуванням розробленої методики та підтвердження відповідних рівнів знань. Якщо зв’язок між ознаками відсутній, то коефіцієнт кореляції буде рівний або близький до 0 [14].

Обчислимо коефіцієнт по даних контрольної роботи.

Коефіцієнт визначається за формулою: $r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x \cdot SS_y}}$,

де SS_x – сума квадратів відхилень: $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

аналогічно для SS_y – сума квадратів відхилень: $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

де N – кількість учнів.

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
N	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum x \cdot y$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
25	157	192	3507	4758	3171

1. Знаходимо суму квадратів відхилень:

$$SS_x = 4758 - \frac{192^2}{25} = 4758 - 1475 = 3283$$

$$SS_y = 3171 - \frac{157^2}{25} = 3171 - 986 = 2185$$

2. Сума скоректованих добутків:

$$SP_{xy} = 3507 - \frac{157 \cdot 192}{25} = 3507 - 1206 = 2301$$

3. Коефіцієнт:

$$r = \frac{2301}{\sqrt{3283 \cdot 2185}} = \frac{2301}{4179} = 0{,}87$$

Бачимо, що одержаний коефіцієнт кореляції близький до одиниці. Це свідчить про існування тісного зв’язку між застосованою методикою та досягненням учнями відповідних рівнів знань. Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методичної системи в навчальний процес.

Її використання в шкільній практиці забезпечує засвоєння учнями навчального матеріалу, сприяє розвитку в учнів стійкого інтересу до поглибленого вивчення математики, веде до формування даних рівнів знань, їх об’єктивної перевірки.

ВИСНОВКИ І РЕКОМЕНДАЦІЇ

Провідним завданням шкільної освіти в умовах реалізації «Національної доктрини розвитку освіти України в ХХ ст.» і Концепції 12-річної освіти є формування компетентної особистості, що передбачає створення та підтримку відповідних психолого-педагогічних умов для всебічного розвитку учнів.

Процес навчання – це процес цілеспрямованої взаємодії вчителя та учнів, під час якого учні оволодівають знаннями, уміннями, у них розвиваються здібності, формується світогляд, моральні переконання, естетичні смаки, тобто відбувається освіта, розвиток і виховання школярів.

Успішність навчальної діяльності залежить від багатьох психологічних і педагогічних чинників, між тим велике значення має структура та зміст мотивів, що спонукають та спрямовують.

Наукові дослідження та апробація розробленої методики свідчать, що демонстрація, ілюстрація навчального матеріалу найдієвіші тоді, коли вони точні, коли той, хто навчається, може бачити і розуміти все, що відбувається. Всього цього не можливо втілювати в навчально-виховних процесах без засобів унаочнення.

Основний шлях включення учнів у творчу навчальну працю проходить через застосування різних педагогічних ситуацій, причому зростаючої трудності, масштабності і діалогічності. Це водночас і реальний спосіб оптимізації навчально-виховного процесу в комплексі його основних функцій – освітньої, розвиваючої, виховної, які в цьому разі нероздільно поєднуються між собою.

Основою активного пізнавального діяльнісного навчання є певним чином організована взаємодія учителя та учнів, яка передбачає:

- створення активного пізнавального діяльнісного середовища;
- застосування методів теоретичного й творчого мислення;
- оволодіння учнями контрольно-оціночними діями;
- вдосконалення вмінь добувати знання, працювати з інформацією;
- розвиток комунікативних якостей;

- створення умов для самопізнання, саморозвитку, самореалізації.

Проведений аналіз психологічної, дидактичної та методичної літератури показав необхідність створення такої методичної системи, яка б охоплювала всі аспекти використання засобів наочності на уроках геометрії старшої школи. Вивчаючи дану методику, ми зробили висновок, що вона використовується в структурах інших методів. Найпростіше її вважати особливим підходом до організації навчання, що виявляється перш за все в характері організації пізнавальної діяльності учнів.

Запропонована методика дозволяє вчителю здійснювати навчання учнів і допомагає виділити той спосіб організації навчального процесу, який є оптимальним для учнів даного класу, школи.

Проведена експериментальна перевірка методики свідчить про існування тісного зв'язку між застосуванням даної методики до пояснення теоретичного матеріалу та розробку дидактичних матеріалів для перевірки навчальних досягнень учнів для досягнення учнями відповідного рівня знань.

Одержані результати дослідження дають можливість зробити такі висновки:

- після застосування даної методики відбувалося зростання в учнів інтересу до уроків математики, збільшилась їхня активність на уроках, заповнилися прогалини в знаннях;
- запропоновані методи дозволяють вчителю здійснювати навчання учнів і поглибити їхні знання по темі «Паралельність прямих і площин в просторі»;
- методика дає змогу підвищити рівень засвоєння учнями даного матеріалу та підвищити інтерес до математики і покращує успішність учнів.

Виходячи з даного дослідження, рекомендуємо вчителям математики використовувати дану методику, оскільки:

- як свідчать результати дослідження, розроблена методика допоможе вчителям навчати учнів теми «Паралельність прямих і площин в просторі» в підборі та складанні відповідних завдань до кожного уроку з даної теми, підвищить ефективність навчання;

- розроблені завдання тематичних перевірочних робіт відповідають вимогам чотирьохрівневого навчання;
- дана методична система дає можливість вчителю об’єктивно оцінити досягнення учнів, розвинути в учнів самооцінку.

Тому можна говорити про доцільність впровадження такої методики у навчальний процес.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьева О.М. Геометрія 10-11 : Пробний підручник для учнів загальноосвітніх навчальних закладів технічного профілю / О.М. Афанасьева, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2004. – 263 с.
2. Афанасьева О.М. Дидактичні матеріали з геометрії. 10-11 класи : Навчальний посібник / О.М. Афанасьева, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2003. – 136 с.
3. Бевз Г.П. Методика викладання математики / Г.П. Бевз. – К. : Вища школа, 1989. – 367 с.
4. Бевз Г.П. Геометрія, 10 клас. Стандартний рівень / Г.П. Бевз, В.Г. Бевз, Н.Г. Владімірова, В.М. Владіміров – К. : Генеза, 2010. – 237 с.
5. Богданович М.В. Математичні джерельця / М.В. Богданович. – К. : Веселка, 1988. – 168 с.
6. Бродський Я.С. Про навчання стереометрії за новим навчальним комплектом / Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко // Математика в школах України – 2004. – № 13. – С. 5 – 7.
7. Бродський Я.С. Стереометрія в старшій школі / Я.С. Бродський, В.Ю. Гречук, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2005. – 67 с.
8. Вишенський В.А. Вибрані задачі з алгебри і геометрії / В.А. Вишенський, М. Й. Ядренко. – К. : Вища школа, 1978. – 72 с.
9. Власенко К.Р. Управління евристичною діяльністю учнів під час вивчення теми: «Паралельність і перпендикулярність прямих і площин» / К.Р. Власенко // Математика в школі. – 2003. – №5. – С. 25 – 27.
10. Голік Л.Т. До питання про диференціацію навчання старшокласників математики / Л.Т. Голік // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 11 – 13.
11. Ісак Н.І. Диференціація та індивідуалізація навчання (з досвіду) / Н.І. Ісак // Диво слово. – 1998. – № 3. – С. 45 – 49.

12. Кисельов А.П. Геометрія. Частина друга. Стереометрія.: Підручник для 10-11 класів середньої школи / А. П. Киселев. – К. : Рад. шк., 1956. – 89 с.
13. Ковчин Н.А. Диференціація учнів за здібностями у старших класах / Н.А. Ковчин // Практична психологія та соціальна робота. – 1998. – №6 – 7. – С. 89 – 92.
14. Конет І.М. Практикум з математичної статистики / І.М. Конет, В.А. Недокіс. – Кам’янець-Подільський : Видавництво Абетка-Світ, 2009. – 216 с.
15. Корнейчук І.В. Метод аналогії у вивченні паралельності і перпендикулярності у просторі / І.В. Корнейчук // Математика в школі. — 2008. – №4. – С. 31 – 33.
16. Коротка Н.І. Думки з приводу оцінювання / Н.І. Коротка // Математика. – 2003. – №13. – С. 1 – 3.
17. Критерії оцінювання навчальних досягнень учнів у системі загально середньої освіти // Математика в школі. – 2001. – №4. – С. 7 – 9.
18. Кушнір І.А. Методика розв’язання задач з геометрії / І.А. Кушнір. – К. : Абрис. – 1994. – 96 с.
19. Михайловський В.І. Практикум з розв’язування задач з математики / В.І. Михайловський. – К. : Вища школа, 1975. – 427 с.
20. Плінський І.В. Ігрові та проблемні ситуації на уроках математики / І.В. Плінський // Математика. – 2003. – №25. – С. 16 – 17.
21. Прилуцька П. Урок, якому аплодували. / Поліна Прилуцька // Математика в школі. – 2003. – №2. – С. 24 – 27.
22. Навчальна програма з математики для учнів 10–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту [Електронний ресурс] // МОН України. – Режим доступу до ресурсу. : http://old.mon.gov.ua/images/education/average/prog12/matem_st.pdf
23. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-12 класи. – К.: Ірпінь: Перун, 2005. – 65 с.

24. Сікорський П.І. Теоретико-методологічні основи диференційованого навчання / П.І. Сікорський. – Львів, 1998. – 110 с.
25. Сісецький І.П. Диференційовані завдання для учнів / І.П. Сісецький. – Радянська школа. – 1975. – №7. – С. 34 – 38.
26. Слєпкань З.І. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту / З.І. Слєпкань // Математика в школі. – 2002. – №2. – С. 29 – 30.
27. Сморжевський Л.О. Стереометрія. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський. – Кам'янець-Подільський : «Абетка-НОВА», 2002. – 68 с.
28. Тихомиров В. Математична освіта (мета, концепція, структура, перспективи) // Математика в школі. – 2003. – №4. – С. 2 – 5.
29. Яремчик Ф.П. Збірник геометричних задач / Ф.П. Яремчик. – К. : Рад. шк., 1966. – 135 с.
30. Яценко С.Н. Рівнева диференціація в класах з поглибленим вивчення математики в основній школі / С.Н. Яценко // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 13 – 15.