Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: “МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ ОРІЄНТОВАНІ ГРАФИ”

Виконала: студентка 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22 спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Вендичанська Надія

Керівник: **Зеленський О. В.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Кріль С. О.,** кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Дипломна робота присвячена матрицям показників та їх допустимим сагайдакам. Черепичні порядки – це кільця з складними властивостями, які зручно досліджувати використовуючи теорію графів та комбінаторні методи дослідження. Матриці показників з'являються при дослідженні черепичних порядків з допомогою теорії графів. Орієнтований граф побудований по матриці показників співпадає з сагайдаком черепичного порядку. Вагомі результати в цьому напрямі належать відомим українським алгебраїстам В.В. Кириченко та Ю. А. Дрозду.

В науковій роботі досліджуються допустимі орієнтовані графи з одиничними ваговими функціями та матриці показників з яких вони одержуються. В дипломній роботі також досліджуються цикли допустимих сагайдаків. Знайдено ряд властивостей для таких сагайдаків.

РОЗДІЛ І.
КІЛЬЦЯ ТА ГРАФИ

Графи застосовуються для зображення алгоритмів, схем роботи пристроїв і систем, зокрема обчислювальної техніки, електротехніки, теорії надійності, оброблення даних, структури сполук, зокрема хімії, біохімії а також застосовуються в теорії груп та теорії кілець .

Наведемо деякі твердження, що використовуються в теорії кілець та теорії графів

Твердження 1. Кільце M_n всіх матриць n-го порядку над полем є простим. Доведення. Щоб довести це, треба показати, що коли I – деякий ненульовий ідеал кільця $M_n = I$. Оскільки $I \subset M_n$, то залишається довести, що всяка матриця із M_n належить I. Внаслідок того, що всяку матрицю n-го порядку можна подати у вигляді суми n^2матриць, в яких хіба що тільки один елемент не дорівнює 0, і всякий ідеал є підкільцем, тобто, разом із скінченною кількістю своїх елементів містить і їх суму, для доведення включення досить показати, що ідеалу I належать всі матриці із M_n , в яких тільки один елемент не дорівнює 0.

Отже, нехай A – деяка матриця n –го порядку, в якої всі елементи, крім a_1, дорівнюють 0, а $G_H = a \neq 0$. Оскільки $I \neq \{0\}$, то вI існує матриця $B \neq 0$, в котрій деякий елемент $B_H \neq 0$. Розглянемо матрицю A_1, в якої всі елементи, крім G''_{ft}, дорівнюють теж 0, а елементи a'_{1k} і a_{ft} підібрані так, що

$$G'_{jk} \cdot G''_{ft} = \frac{\propto}{\beta}$$

Легко бачити, що тоді $k(A = A_1B/A_2$ В силу другої умови з означення ідеалу $A_1B \in I$ і $(A_1B)A_2 \in I$. Тому матриця$A \in I$. Як вже відзначалося, з цього виходить, що$M_n \in I$.

2) Всяке поле P є простим кільцем.

Справді, нехай $I \neq \{0\}$ – довільний ідеал поля P і $a \neq 0$ — довільний його елемент. Тоді існує $a^{-1} \in P$ і згідно з другою властивістю з означення ідеалу:

Звідси на підставі цієї ж другої умови

$\forall a \in P): G \cdot I = a \in P$

тобто $P \subset I$ і, значить, $P = I$.

Відсутність нетривіальних ідеалів — характерна властивість полів.

Означення 1.2. Область цілісності K з 1 , кожен ідеал якої є головним називається кільцем головних ідеалів.

Приклад. Кільце Z цілих чисел є кільцем головних ідеалів. Дійсно, нехай I— довільний ідеал кільця Z. Якщо $I = \{0\}$ то $I = (0)$. Тому вважатимемо, що $I \neq 0$. Тоді $\exists m \in I: m \neq 0$.

Внаслідок того, що I— підкільце, то $I^{-m} \in I$. Це означає, в кожному ідеалі є натуральне число. Нехай m_0 – найменше з усіх натуральних чисел ідеалу I. За теоремою про ділення з остачею

$(\forall a \in I)(\exists q, r \in Z): a = m_0 q + r, \quad 0 \leq r < m_0,$

Згідно з другою умовою з означення ідеалу $m_0 q \in I$, а згідно з першою $Z = a = m_0 q \in I$. Це означає, що коли було б $I \neq 0$ то в I існувало б натуральне число r , менше за m_0.Тому $z = 0$ і, отже, $a = m_0 q$. Таким чином,

$(\forall a \in I)(\exists q \in Z)$: $a = m_0 q,$

тобто ідеал I – головний, $I = (m_0)$.

Означення 1.4. Область цілісності K з 1 називається евклідовим кільцем, якщо всякому її елементу $a \neq 0$ поставлено у відповідність натуральне число n_a так, що

$(\forall a \in K), (\forall b \in K, b \neq 0)(\exists q, r \in K): a = bq + r,$

причому $(r = 0) \vee (n_2 < n_0)$.

Приклад. Кільце Z цілих чисел є евклідовим кільцем.

Справді, за теоремою про ділення з остачею

$(\forall a \in Z)(\forall b \in Z, b > 0)(\exists q, r \in Z): a = bq + r, 0 \leq r_1 < b$ (1)

якщо $b < 0$ то $|b| > 0$ і значить,

$\exists q, r \in Z: a = |b| q_1 + r_1,\ 0 \leq q_1 < |b|.$

Останні співвідношення можна переписати так:

$a = (-b) q_1 + r_1,\ 0 \leq q_1 < |b|$ (2)

Із формул (1) і (2) виходить:

$(\forall a \in Z)(\forall b \in Z, b \neq 0)(\exists q, r \in Z): G = bq + r, 0 \leq r < b$

Це означає, що коли кожному ненульовому цілому числу a поставити у відповідність його абсолютну величину, тобто покласти n_a, то кільце Z стає евклідовим кільцем.

Теорема 1.5. Всяке евклідове кільце K є кільцем головних ідеалів.

Доведення. Треба довести, що всякий ідеал I є головним, якщо $I = \{0\}$, то I— головний ідеал, породжений нулем. Якщо $I \neq \{0\}$, то кожному його ненулевому елементові a поставлено у відповідність натуральне число n_a, тобто ідеал I співвіднесений з підмножиною $\lambda_i = \{n_a | a \in I\}$ множини натуральних чисел. В λ_i є найменше число n_{a_0}. Інакше кажучи, в I існує елемент $\mathrm{a}_0 \neq 0$ такий, що

$\forall a \in I, a \neq 0: n_{\mathrm{a}_0} \leq n_a$

Очевидно, що $(\mathrm{a}_0) \subset I$. Покажемо: що і навпаки $I \subset (\mathrm{a}_0)$, звідси випливатиме потрібна рівність $I = (\mathrm{a}_0)$.

За означенням евклідового кільця

$(\forall a \in I)(\exists q, r \in K): a \neq 0): a = I \subset a_0 q + q_1(q = 0) \cup \left(n_r \leq n_{a_0}\right).$

На підставі другої умови з означення ідеалу $a_0 q \in I$, а на підставі першої – елемент $r = a - a_0 q \in I$. Якби $r \neq 0$, то $n_r < n_{a_0}$, що суперечить вибору елемента a_0. Тому $r = 0$ і, значить, $a = a_0 q$, тобто, $I \subset (\mathrm{a}_0)$. Теорема доведена.

Пошук маршруту у графі

При розв’язанні широкого кола прикладних задач нерідко виникає необхідність знайти маршрут, що зв’язує задані вершини в графі G. Наведемо алгоритм розв’язання такої задачі. В ньому задача зводиться до пошуку маршруту у зв’язаному графі G = (V, E), який з’єднує задані вершини v, u ∈ V, де v≠u.

Алгоритм Террі знаходження маршруту

У зв’язаному графі завжди можна знайти такий маршрут, що зв’язує дві задані вершини v та u, якщо, виходячи з вершини v і здійснюючи послідовний перехід від кожної досягнутої вершини до суміжної з нею, керуватися такими правилами:

1) йдучи по довільному ребру, кожний раз відмічати напрямок, в якому воно було пройдене;
2) виходячи з деякої вершини v_1, завжди рухатися тільки по тому ребру, яке не було пройдене або було пройдене у зворотному напрямку;
3) для кожної вершини v_1, відмінної від v, відмічати те ребро, яке першим заходить у v_1, якщо вершина v_1, зустрічається вперше;
4) виходячи з деякої вершини v_1, відмінної від v, по першому ребру, яке заходить у v_1, рухатися лише тоді, коли немає інших можливостей.

Обґрунтування алгоритму. Припустимо, що, керуючись цим алгоритмом, зупинимося в деякій вершині w (не досягши вершини u), а всі ребра, інцидентні w, вже пройдено в напрямку з w (тоді внаслідок правила 2 вже не можна вийти з w). Покажемо, що в цьому випадку: а) вершина w збігається з v; б) всі вершини графа G пройдено.

Доведемо спочатку твердження а). Якщо вершина w не збігається з v, то нехай у вершині w ми побували k разів (включаючи останній). Тоді ребра, інцидентні w, були пройдені k разів у напрямку до w, k – 1 разів у напрямку з w (оскільки кількість заходів в w, за винятком останнього, відповідає кількості виходів із цієї вершини). Таким чином, використовуючи те, що за припущенням були пройдені всі ребра, інцидентні вершині w, в напрямку з w, а також те, що з урахуванням правила 2 по кожному ребру, інцидентному w, маємо $d(w) = k - 1$, а це суперечить тому, що у напрямку до w були пройдені k різних ребер (згідно з правилом 2); отже $d(w) \geq k$. Одержана суперечність підтверджує, що $w = v$.

Доведемо тепер правильність б). Нехай (за твердженням а)): $v_1, v_2, \ldots, v_k$, де $v_1 = v_k = v$ – послідовність вершин, розташованих у тому самому порядку, в якому ми рухалися, діючи згідно з алгоритмом. Очевидно, ця послідовність є маршрутом у графі G. Покажемо, що цей маршрут містить усі вершини графа G. Спочатку доведемо, що кожне ребро, інцидентне будь-якій вершині v_j, $1 \leq j \leq k$, було пройдене по одному разу в обох напрямках. Доведення проведемо індукцією за кількістю вершин j.

Оскільки в замкненому маршруті для кожної вершини, яка міститься в ньому, кількість виходів з неї дорівнює кількості заходів у неї, внаслідок того, що згідно з твердженням а) і правилом 2 всі ребра, інцидентні вершині $v = v_1$, були пройдені по одному разу в напрямку з v (тобто ми d(v) разів виходили з v), встановлюємо, що рівно d(v) разів ми заходили у v, а оскільки внаслідок правила 2 кожний такий захід у v здійснювався по новому ребру, всі ребра, інцидентні вершині $v = v_1$, були пройдені по разу в обох напрямках.

Припустимо, що при деякому j, $2 \leq j \leq k$, твердження, яке доводиться, справджується для всіх вершин $v_1, \ldots, v_{j-1}$. Доведемо його для вершини v_j. Якщо при деякому $i<j$ виконується рівність $v_i = v_j$, то правильність твердження, що доводиться для вершини v_j, випливає з того, що за індуктивним припущенням воно випливає з v_i. Нехай тепер для всіх $i \in \{1, 2, \ldots, j-1\}$ $v_i \neq v_j$, тобто вершина v_i зустрілася вперше. Тоді (v_{j-1}, v_j) – перше ребро, яке заходить у вершину v_j, за індуктивним припущенням воно буде пройдене в обох напрямках, що з урахуванням правила 4 можливо лише тоді, коли всі інші ребра, інцидентні v_j, будуть пройдені в напрямку з v_j. Далі, оскільки в замкненому маршруті, як уже зазначалося, для кожної вершини, яка міститься в цьому маршруті, кількість виходів із неї дорівнює кількості заходів в неї, використовуючи правило 2, встановлюємо, що всі ребра, інцидентні v_j, будуть пройдені по разу в обох напрямках.

Отже, кожну вершину в маршруті $v_1, v_2, \ldots, v_k$ проходимо разом з усіма суміжними їй вершинами, звідки внаслідок зв’язності графа G випливає, що цей маршрут проходить через усі вершини графа G, а це суперечить початковому припущенню, за яким вершин u не була досягнута. ►

Наведемо приклад використання алгоритму Террі. Необхідно знайти у графі G (рис. 1.1, а) маршрут, який з’єднує вершини v_1 та v_5.

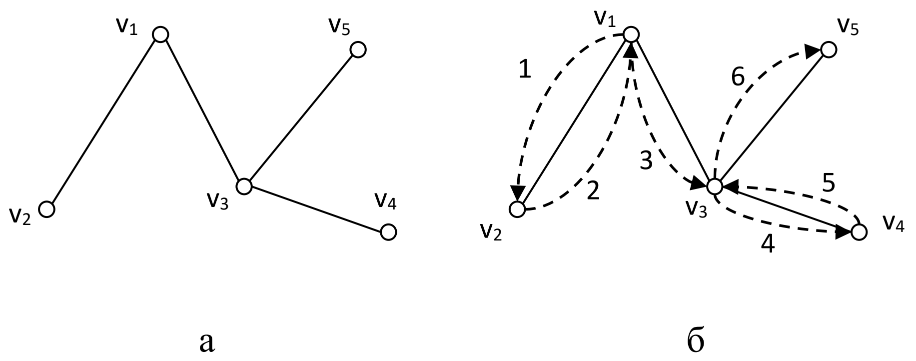


Рис. 1.1.

Пошук вершини v_5 у G будемо здійснювати так, неначе нічого невідомо про цей граф (це можна порівняти з тим, що G – це лабіринт, v_1 та v_5 – вхід та вихід лабіиринту. На рис. 1.1, б показаний один із можливих варіантів руху по графу G згідно з алгоритмом Террі. Пронумерованими штриховими дугами зображено схему руху по графу G. Знаками помічено перші ребра, які заходять у вершини. Ця схема руху відповідає маршруту (v_1, v_2, v_1, v_3, v_4, v_3, v_5). Зазначимо, що після того, як із вершини v_1 зайшли у вершину v_3 (дуга 3), внаслідок правила 4 не можна повернутися у v_1, оскільки існують інші можливості, а (v_1, v_3) є першим ребром, що заходить у v_3. Далі, після того, як із вершини v_4 зайшли у вершину v_3 (дуга 5), внаслідок правила 2 не можна рухатися до вершини v_1, і, таким чином, залишається єдина можливість – рухатися до вершини v_5.

Пошук відстані між вершинами графа

Розглянемо деякі властивості мінімальних (шляхів) маршрутів.

Означення 1.6. Назвемо **образом вершини** x в орієнтованому графі G множину кінців дуг, початком яких є вершина x (позначається D(x)), а множину початків дуг, кінцем яких є вершина x, назвемо **прообразом вершини** x (позначається $D^{-1}(x)$).

Зрозуміло, що $D(x) \cup D^{-1}(x) = \Gamma(x)$, де $\Gamma(x)$ – множина суміжності вершини x.

Нехай G = (V, E) – орієнтований граф з n вершинами ($n \geq 2$), а v, u - задані вершини з V, де $v \neq u$. Опишемо алгоритм пошуку відстані та відповідного їй мінімального шляху з v до u в орієнтованому графі G. Цей алгоритм також має назву хвильового.

Алгоритм (хвильовий)

1. Позначаємо вершину v індексом 0, а вершини, що належать образу вершини v, - індексом 1. Множину вершин з індексом k позначаємо $F_k(v)$. Вважаємо k=1.
2. Якщо $F_k(v) = \varnothing$ або виконується $k = n - 1$ і $u \notin F_k(v)$, то вершина u є незв'язаною з v і робота алгоритму на цьому завершується. В іншому випадку перейти до пункту 3.
3. Якщо $u \notin F_k(v)$, то переходимо до пункту 4. В іншому випадку існує шлях із v до u завдовжки k, причому цей шлях є мінімальним. Послідовність вершин v, $u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}$, u, де

$$u_{k-1} \in F_{k-1}(v) \cap D^{-1}(u),$$

$$u_{k-2} \in F_{k-2}(v) \cap D^{-1}(u_{k-1}),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$u_1 \in F_1(v) \cap D^{-1}(u_2),$$

   і є шуканим мінімальним шляхом з v у w. На цьому робота алгоритму завершується.

4. Позначаємо індексом k+1 всі непозначені вершини, які належать образу множини вершин з індексом k. Множину вершин з індексом k+1 позначаємо $F_{k+1}(v)$. Збільшуємо індекс k на 1 і переходимо до пункту 2.

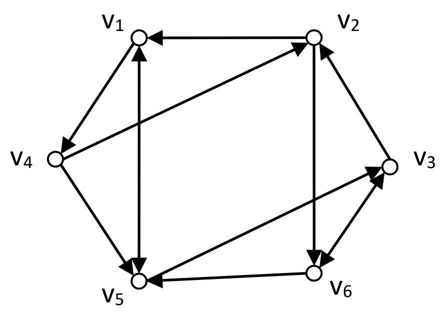
Назва алгоритму – хвильовий – пов'язана з тим, що визначення індексів k вершин графа G відбувається як розповсюдження з початкової вершини v певної хвилі, яка спрямовується за напрямком дуг. Коли хвиля дійде до кінцевої вершини u, це буде означати, що алгоритм закінчив свою роботу. Значення індексу, „принесеного хвилею", у вершині u буде відповідати довжині знайденого маршруту. А для того, щоб визначити цей маршрут (послідовність вершин), потрібно з кінцевої вершини u повертатися в зворотному до розповсюдження хвилі напрямку і відзначати послідовно одну довільну вершину зі значеннями індексу k-1, k-2, …, 1, 0. Зрозуміло, що вершина з індексом 0, - це початкова вершина v.

Вершини u_1, u_2,…, u_{k-1}, взагалі, можуть бути визначені неоднозначно. Ця неоднозначність відповідає випадкам, коли існує кілька різних мінімальних шляхів з v до u в орграфі G.

Наприклад, визначимо мінімальний шлях з v_1 до v_6 в орієнтованому графі G, заданому матрицею суміжності (відповідний граф представлено на рис. 1.2):

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6
v_1	0	0	0	1	1	0
v_2	1	0	0	0	0	1
v_3	0	1	0	0	0	1
v_4	0	1	0	0	1	0
v_5	1	0	1	0	0	0
v_6	0	0	1	0	1	0

Рис. 1.2



Діючи згідно з хвильовим алгоритмом, послідовно знаходимо $F_1(v_1) = \{v_4, v_5\}$; $F_2(v_1) = = D(F_1(v_1)) \setminus \{v_1, v_4, v_5\} = \{v_2, v_3\}$; $F_3(v_1) = D(F_2(v_1)) \setminus \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\} =$

$\{v_6\}$. Таким чином, $v_6 \in F_3(v_1)$, а отже, за пунктом 3 існує шлях з v_1 до v_6 завдовжки 3, і цей шлях є мінімальним.

Знайдемо тепер мінімальний шлях із v_1 до v_6. Визначимо множину

$$F_2(v_1) \cap D^{-1}(v_6) = \{v_2, v_3\} \cap \{v_2, v_3\} = \{v_2, v_3\}.$$

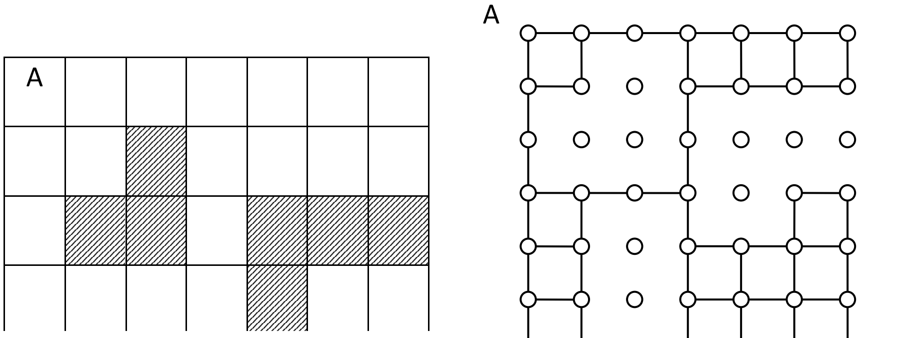
Виберемо будь-яку вершину зі знайденої множини, наприклад, v_3. Визначимо далі множину

$$F_1(v_1) \cap D^{-1}(v_3) = \{v_4, v_5\} \cap \{v_4, v_5, v_6\} = \{v_4, v_5\}.$$

Виберемо будь-яку вершину зі знайденої множини, наприклад, v_5. Тоді (v_1, v_5, v_3, v_6) – шуканий мінімальний шлях з v_1 до v_6 в орієнтованому графі G, а відстань між v_1 та v_6 дорівнює 3.

Очевидно, хвильовий алгоритм може застосовуватися не тільки для орієнтованих, а й для неорієнтованих графів. В останньому випадку, пересування з однієї вершини до іншої можливі в обидві сторони.

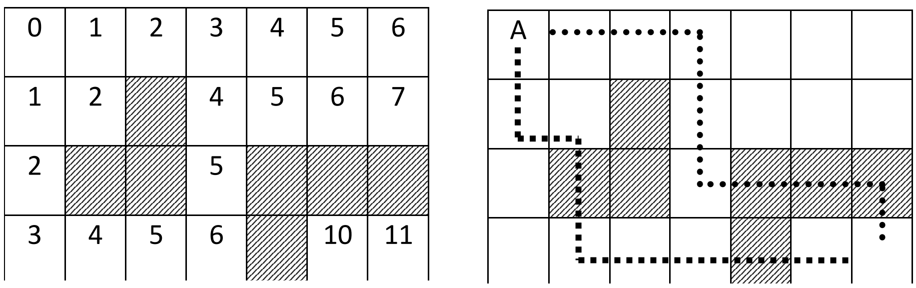
Хвильовий алгоритм широко застосовується у розробці комп’ютерних ігор – коли необхідно визначити оптимальний маршрут пересування гравця або певного „юніта” з однієї точки віртуальної місцевості (карти) до іншої. Наведемо приклад такої задачі. Нехай потрібно знайти найкоротший маршрут з точки A до точки B на карті, яка зображена на рис. 1.3, а. На ній заштриховані комірки відповідають певним перепонам на шляху, тобто в цих частинах місцевості „юніт” не зможе пройти. Також будемо вважати, що „юніт” може пересуватись тільки по вертикалі та горизонталі. Відповідний цієї карті граф представлено на рис. 1.3, б.



а б

Рис. 1.3

Після роботи хвильового алгоритму отримаємо наступні індекси вершин - комірок карти (рис. 1.4, а). На рис. 1.4, б зображено два зі знайдених маршрутів з вершини А у вершину В. Як можна побачити, довжина знайденого маршруту дорівнює 12.



а б

Рис. 1.4.

Можна зробити процес пошуку найкоротшого маршруту за допомогою хвильового алгоритму більш економнішим, а відтак, й більш швидким. Для цього будемо розповсюджувати хвилю не тільки з початкової вершини А (перша хвиля), а й з кінцевої вершини В (друга хвиля). Для того, щоб відрізняти індекси першої хвилі від другої, індекси останньої будемо позначати зі штрихом. Робота модифікованого алгоритму закінчується коли обидві хвилі зустрінуться (рис. 1.5).

0	1	2	3	4	5	6
1	2		4	5	6	
2			5			
3	4	5	6/6′		4′	3′

Рис. 1.5.

Комірки, де дві хвилі зустрічаються, позначені подвійними лініями. З порівняння рис. 1.4 та 1.5 видно, що знайдені найкоротші маршрути співпадають. І хоча в цьому прикладі економія склала всього лиш одну комірку (яка не була відмічена), можна зрозуміти, що на більш складних, тобто насичених „перепонами” картах, робота модифікованого хвильового алгоритму буде більш ефективнішою за простий хвильовий алгоритм.

Зважені графи

У реальних задачах на графах часто потрібно брати до уваги додаткову інформацію – фактичну віддаль між окремими пунктами, вартість проїзду, час проїзду тощо. Для цього використовують поняття зваженого графа.

Означення 1.6. Зваженим називають граф, кожному ребру e якого приписано дійсне число w(e). Це число називають **вагою ребра** e. Аналогічно означають **зважений орієнтований граф**: це такий орієнтований граф, кожній дузі e якого приписано дійсне число w(e), яке називається **вагою дуги**.

Розглянемо два способи зберігання зваженого графа G = (V, E) в пам’яті комп’ютера. Нехай |V| = n, |E| = m.

Перший – подання графа матрицею ваг W, яка являє собою аналог матриці суміжності. Її елемент $w_{ij} = w(v_i, v_j)$, якщо ребро або дуга $(v_i, v_j) \in E$. Якщо ж ребро або дуга $(v_i, v_j) \notin E$, то $w_{ij} = 0$ чи $w_{ij} = \infty$ залежно від розв'язуваної задачі.

Другий спосіб – поданням графа списком ребер. Для зваженого графа під кожний елемент списку E можна відвести три комірки – дві для ребра й одну для його ваги, тобто всього потрібно 3m комірок.

Означення 1.7. **Довжиною шляху в зваженому графі** називають суму ваг ребер (дуг), які утворюють цей шлях. Якщо граф не зважений, то вагу кожного ребра (кожної дуги) уважають рівною 1 й отримають раніше введене поняття довжини шляху як кількості ребер (дуг) у ньому.

Алгоритм Дейкстри

Задача про найкоротший шлях полягає в знаходженні найкоротшого шляху від заданої початкової вершини a до заданої вершини z. Наступні дві задачі – безпосередні узагальнення сформульованої задачі про найкоротший шлях.

1. Для заданої початкової вершини a знайти найкоротші шляхи від a до всіх інших вершин.
2. Знайти найкоротші шляхи між усіма парами вершин.

Виявляється що майже всі методи розв'язання задачі про найкоротший шлях від заданої початкової вершини a до заданої вершини z також дають змогу знайти й найкоротші шляхи від вершини a до всіх інших вершин графа. Отже, за їх допомогою можна розв'язати задачу 1 із невеликими додатковими обчислювальними витратами. З іншого боку, задачу 2 можна розв'язати або n разів застосувавши алгоритм задачі 1 із різними початковими вершинами, або один раз застосувавши спеціальний алгоритм.

Розглянемо алгоритм для першої задачі. Алгоритм розв'язання другої задачі – алгоритм Флойда – розглядається у продовженні цього курсу – «Мережі і потоки».

Найефективніший алгоритм визначення довжини найкоротшого шляху від фіксованої вершини до будь-якої іншої запропонував 1959 р. датський математик Е. Дейкстра. Цей алгоритм застосований лише тоді, коли вага кожного ребра (дуги) додатна. Опишемо докладно цей алгоритм для орієнтованого графа.

Нехай G = (V, E) – зважений орієнтований граф, $w(v_i, v_j)$ – вага дуги (v_i, v_j). Почавши з вершини a, знаходимо віддаль від a до кожної із суміжних із нею вершин. Вибираємо вершину, віддаль від якої до вершини a найменша; нехай це буде вершина v*. Далі знаходимо віддалі від вершини a до кожної вершини суміжної з v* вздовж шляху, який проходить через вершину v*. Якщо для якоїсь із таких вершин ця віддаль менша від поточної, то заміняємо нею поточну віддаль. Знову вибираємо вершину, найближчу до a й не вибрану раніше; повторюємо процес.

Описаний процес зручно виконувати за допомогою присвоювання вершинам міток. Є мітки двох типів – тимчасові та постійні. Вершини з постійними мітками групують у множину M, яку називають **множиною позначених вершин**. Решта вершин має тимчасові мітки, і множину таких вершин позначимо як T, T = V \ M. Позначатимемо мітку (тимчасову чи постійну) вершини v як l(v). Значення постійної мітки l(v) дорівнює довжині найкоротшого шляху від вершини a до вершини v, тимчасової – довжині найкоротшого шляху, який проходить лише через вершини з постійними мітками.

Фіксованою початковою вершиною вважаємо вершину a; довжину найкоротшого шляху шукаємо до вершини z (або до всіх вершин графа). Тепер формально опишемо алгоритм Дейкстри.

Алгоритм Дейкстри

1. Присвоювання початкових значень. Виконати $l(a) = 0$ та вважати цю мітку постійною. Виконати $l(v) = \infty$ для всіх $v \neq a$ й уважати ці мітки тимчасовими. Виконати $x = a$, $M = \{a\}$.
2. Оновлення міток. Для кожної вершини $v \in \Gamma(x) \setminus M$ замінити мітки: $l(v) = \min\{\ l(v),\ l(v) + w(x,\ v)\ \}$, тобто оновлювати тимчасові мітки вершин, у які з вершини x іде дуга.
3. Перетворення мітки в постійну. Серед усіх вершин із тимчасовими мітками знайти вершину з мінімальною міткою, тобто знайти вершину v^* з умови $l(v^*) = \min\{l(v)\}$, $v \in T$, де $T = V \setminus M$.
4. Уважати мітку вершини v^* постійною й виконати $M = M \cup \{v^*\}$; $x = v^*$ (вершину v^* включено в множину M).
5. а) Для пошуку шляху від a до z: якщо $x=z$, то $l(z)$ – довжина найкоротшого шляху від a до z, зупинитись; якщо $a \neq z$, то перейти до кроку 2.

   б) Для пошуку шляхів від a до всіх вершин: якщо всі вершини отримали постійні мітки (включені в множину M), то ці мітки дорівнюють довжинам найкоротших шляхів, зупинитись; якщо деякі вершини мають тимчасові мітки, то перейти до кроку 2.

Обґрунтування алгоритму Дейкстри. Для доведення коректності алгоритму Дейкстри достатньо відмітити, що при кожному застосуванні кроку 3, вершина v^* вибирається як мінімальна серед вершин з тимчасовими мітками. Для визначення значень цих міток (крок 2) використовувались вершини з постійними мітками, тобто вершини, для яких вже відомий найкоротший маршрут.

Проведемо доведення по індукції за кількістю застосувань кроку 3. В перший раз на кроці 3 обираються такі вершини $v \in \Gamma(a)$, тобто вершини суміжні з початковою вершиною a, для якої найкоротший шлях порожній і дорівнює 0. Нехай це справджується для кроків 2, 3, …, k-1. На k-й ітерації кроку 3 вибирається така вершина v^*, для якої $l(v^*) = \min\{l(v)\}$, $v \in T$. Відмітимо, що якщо відомий шлях, який проходить через вершину з постійною міткою, то тим самим відомий найкоротший шлях.

Припустимо, що l(v*) більше за довжину найкоротшого шляху від а до v* (позначимо цей шлях P*, а його довжину – w(P*)), тобто l(v*) > w(P*). Тоді на цьому шляху мають бути вершини з тимчасовими мітками. Розглянемо найпершу серед них на цьому шляху – вершину v'$\in$T. Частину шляху P* від а до v' позначимо P'. Довжину P' позначимо відповідно w(P'). Маємо: l(v') = w(P') $\le$ w(P*) < l(v*), тобто l(v') < l(v*). Але це суперечить способу обрання нової вершини з постійною міткою на кроці 3.

Доведення випадку б), тобто задачі пошуку найкоротших шляхів від вершини а до всіх інших вершин графа, є аналогічним. ►

Якщо граф подано матрицею суміжності, складність алгоритму Дейкстри становить O(n^2). Коли кількість дуг , значно менша, ніж n^2, то найкраще подавати орієнтований граф списками суміжності. Тоді алгоритм можна реалізувати зі складністю O($m \log_2 n$), що в цьому разі істотно менше ніж O(n^2).

Алгоритм Дейкстри дає змогу обчислити довжину найкоротшого шляху від початкової вершини а до заданої вершини z. Для знаходження самого шляху потрібно лише збільшувати вектор вершин, з яких найкоротший шлях безпосередньо потрапляє в дану вершину. Для цього з кожною вершиною v графа G, окрім вершини а, зв'язують іще одну мітку - θ(v). Крок 2 модифікують так. Для кожної вершини v$\in$ Γ(x) \ M якщо l(v) > l(x) + w(x,v), то l(v) = l(x) + + w(x,v) та θ(v) = x, а ні, то не змінювати l(v) та θ(v). Коли мітка l(v) стане постійною, найкоротший ⟨a,v⟩-шлях буде потрапляти у вершину v безпосередньо з вершини x. Із постійних міток l(v) та θ(v) утворюємо вектори l і θ.

Знайдемо довжину найкоротшого шляху від початкової вершини а до вершини z у графі на рис. 1.6, а. Послідовність дій зображено на рис. 1.6, б – у, мітки записано в дужках біля кожної вершини. Вершини, які включені в множину M, обведено кружечками; мітки таких вершин оголошують постійними. У процесі роботи алгоритму будують два вектори: вектор *l* постійних міток (довжини найкоротших шляхів від вершини а до даної вершини) і вектор θ вершин, з яких у дану вершину безпосередньо потрапляє найкоротший шлях. У табл. 1.1 в першому рядку містяться довільно впорядковані вершини графа, у другому – відповідні постійні мітки (компоненти вектора *l*), а в третьому – компоненти вектора θ.

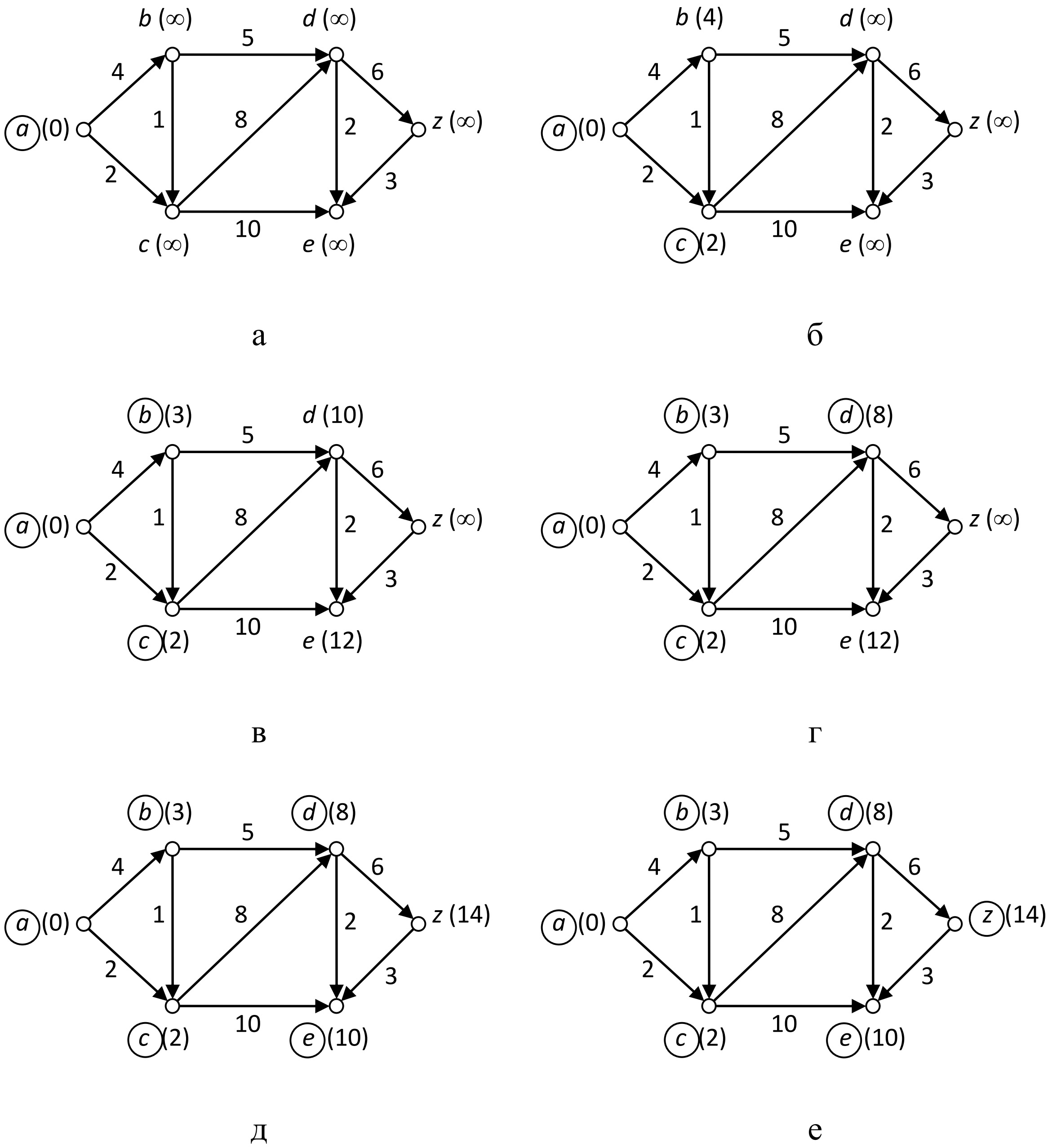


Рис. 1.6.

Вершини графа (елементи множини V)	a	b	c	d	e	z
Вектор *l* (постійні мітки вершин)	0	3	2	8	10	13
Вектор θ (вершини, з яких у дану вершину заходить найкоротший шлях)	-	c	a	b	d	e

Табл. 1.1.

Постійна мітка вершини z дорівнює 13. Отже, довжина найкоротшого шляху від a до z дорівнює 13. Сам шлях знаходять за допомогою першого й третього рядків таблиці та будують у зворотному порядку. Кінцева вершин – z; у неї потрапляємо з вершини e (див. вектор θ). У вершину e потрапляємо з вершини d, у d – з b та продовжуємо цей процес до вершини a: $z \leftarrow e \leftarrow d \leftarrow b \leftarrow c \leftarrow a$. Отже, найкоротший шлях такий: a, c, b, d, e, z.

РОЗДІЛ ІІ.
МАТРИЦІ ПОКАЗНИКІВ ТА ЇХ САГАЙДАКИ

Означення 2.1. Нехай VQ – скінченна множина, VQ^2–декартовий квадрат. *Орієнтований не зважений граф* – це пара (VQ, AQ), де $AQ \subseteq VQ^2$. Множини VQ є множиною *вершинам* графа Q=(VQ, AQ), а множина AQ – *є множиною* його *стрілок.* Стрілки або дуги можна зобразити у вигляді пари (v,w) вершин, перша вершина v називається *початком*, а друга вершина w — називається *кінцем* стрілки (v,w).

Означення 2.2. *Сагайдак*– це орієнтований граф, який має скінчену кількість вершин.

Орієнтованим *шляхом* в сагайдаку – це послідовність стрілок вигляду (v_1, v_2), (v_2, v_3), ..., (v_{m-1}, v_m). Цей шлях проходить з v_1 у v_m і має скінчену довжину m-1. Цей шлях можна зобразити послідовністю v_1, v_2, ..., v_m вершин з яких він складається,

Скінченний сагайдак є *сильно зв'язним*, якщо для довільної пари вершин існує простий маршрут, що їх з'єднує.

Означення 2.3. Сагайдак без орієнтованих циклів називається ***ациклічним*** сагайдаком.

Твердження 2.4. [1**].** Сильно зв’язний ациклічний сагайдак є точкою.

Твердження 2.5. [2**].** Конденсацією довільного сагайдака є ациклічний простий сагайдак.

Твердження 2.6. [2**].** Довільний ациклічний орієнтований граф містить джерело і сток.

Наслідок 2.7. [1**].** Нехай множина вершин ациклічного сагайдака складається з t елементів. Тоді можна занумерувати ці вершини числами 1, 2, …, t таким чином, що з існування стрілки з вершини i до вершини j слідує $i<j$.

Означення 2.8. Нехай $M_n(Z)$ – це кільце квадратних матриць розмірності n елементи яких цілі числа.

Означення 2.9. [1]. Квадратна матриця $E=(\alpha_{ij})\in M_n(Z)$ з цілими елементами для якої наступні три умови виконуються :

1) $\alpha_{ij} + \alpha_{jk} \geq \alpha_{ik}$ для всіх $i, j, k =1, \dots , n$,

2) $\alpha_{ii} = 0$ для всіх $i=1, \dots , n$, називається *матрицею показників*.

Якщо крім цього виконується ще одна умова

3) $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \geq 1$ для всіх пар $i, j \in\{1,\dots , n\}$ $(i\neq j)$ то така матриця називається *зведеною матрицею показників*.

Нехай $E=(\alpha_{ij})$ – зведена матриця показників. Введемо матрицю $E^{(1)}=(\beta_{ij})=E+E_n \in M_n(Z)$, де E_n – одинична матриця. Введемо матрицю $E^{(2)}=(\gamma_{ij})\in M_n(Z)$: $\gamma_{ij}= \min_k\{\beta_{ik} + \beta_{kj}\}$.

Означення 2.10. [1]. $[Q]= E^{(2)}- E^{(1)}$ – це матриця суміжності сагайдака, який одержується з матриці E. $Q=Q(E)$.

Означення 2.11. Дві квадратні матриці показників E_1 і E_2 називається еквівалентними, якщо одну можна одержати з іншої проводячи послідовність елементарних перетворення двох типів:

1) Від всіх елементів $i^{го}$ рядка віднімаємо ціле число та це ж число додаємо до всіх елементів $i^{го}$ стовпчика,
2) Міняємо розташування двох рядків та двох стовпчиків з такими ж номерами.

Означення 2.25. [1]. Сагайдак Q називають *допустимим*, якщо існує матриця показників E з якої він одержується , тобто $Q(E) =Q$.

РОЗДІЛ ІІІ.
ДОСЛІДЖЕННЯ ДОПУСТИМИХ ОРІЄНТОВАНИХ ГРАФІВ

3.1. Цикли та одиничні орієнтовані графи

Означення 3.1.1..Сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ називається **зваженим,** якщо визначена функція $\omega : AQ \to \mathbb{R}$. Функція ω називається ваговою, а її значення на стрілці називається вагою стрілки.

Сума ваг всіх стрілок шляху називається вагою шляху.

***Теорема* 3.1.2.[5]** Сильно зв'язний сагайдак $Q = (VQ, AQ)$ є допустимим коли можна побудувати вагову функція $\omega : AQ \to \mathbb{N} \cup \{0\}$, для якої виконуються наступним умовам:

1) вага дуги з i у j менша за вагу орієнтованого шляху з i у j довжини більше або рівною 2*;*

2) вага петлі в вершині i менше за вагу довільного циклу, що проходить через точку i, довжини більше або рівною 2*;*

3) вага довільного циклу не менше за 1;

4) вага довільної петлі 1,

5) через кожну точку без петлі проходить цикл довжини $l \geq 2$, вага якого дорівнює 1.

Означення 3.1.3. Простий цикл в допустимому сагайдаку $Q = (VQ, AQ)$, вага якого дорівнює 1, будемо називати *одиничним.*

Лема 3.1.4 Для довільного одиничного сагайдака Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$ і $0 \leq \alpha_{ij} \leq n-1$ для всіх i, j.

Доведення. Розглянемо довільні дві вершини i, j одиничного сагайдака Q. Оскільки сагайдак Q одиничний, то існує простий шлях із i в j, який проходить тільки по стрілкам одиничних циклів. Цей шлях складається не більше ніж з $(n-1)$ стрілки. Тому сума ваг стрілок шляху не перевищує $n-1$. Оскільки α_{ij} не перевищує довжину мінімального шляху із i в j, то $\alpha_{ij} \leq n-1$.

Лема 3.1.5. Якщо $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ – матриця показників, Q=$Q(\mathcal{E})$ — її одиничний сагайдак і $\alpha_{ij} = k$, то $\alpha_{ji} \leq n - 1 - k$.

Доведення. Оскільки $\alpha_{ij} = k$, то вага мінімального за вагою шляху, який починається в i та закінчується в j, не менше за k. Тому вага шляху, який починається в i, закінчується в j та проходить по стрілкам одиничних циклів не менше за k. Нехай вага шляху із i в j, який проходить по стрілкам одиничних циклів, дорівнює $p \geq k$. Нехай цей шлях проходить по вершинам $i = v_1, v_2, \ldots, v_m = j$, де для $t = 0, \ldots, m-1$ вершини v_t, v_{t+1} належать одному одиничному циклу, але вершини v_t, v_{t+1} не обов'язково знаходяться в шляху поруч. Оскільки сума стрілок шляху дорівнює p то кількість відрізків шляху вигляду v_t, v_{t+1} на яких сума стрілок дорівнює 0 не перевищує $m - p$.

Далі під шляхом v_t, v_{t+1} будемо розуміти частину одиничного циклу.

Розглянемо зворотній шлях, який проходить по вершинам $j = v_m, \ldots, v_0 = i$, де v_{t+1}, v_t – частина одиничного циклу. Якщо вага шляху v_{t+1}, v_t дорівнює 1 то вага шляху v_t, v_{t+1} дорівнює 0. Тому кількість відрізків v_{t+1}, v_t, на яких сума стрілок дорівнює одиниці не перевищує $m - p$.

Отже, довжина шляху $j = v_m, \ldots, v_0 = i$ не перевищує $m - p$. Оскільки m не перевищує кількість стрілок шляху $a_0, a_1, \ldots, v_m$ то $m \leq n - 1, k \leq p$, тому

$$m - p \leq n - 1 - p \leq n - 1 - k.$$

Враховуючи, що α_{ji} дорівнює вазі мінімального за вагою шляху із j в i, отримаємо, що α_{ji} не перевищує ваги шляху із j в i, який проходить по одиничним циклам, тому $\alpha_{ji} \leq n - 1 - k$.

Наслідок 3.1.6[4]. Для довільного одиничного орієнтованого графа Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z}), Q = Q(\mathcal{E})$, для якої $\alpha_{ij} + \alpha_{ji} \leq n - 1$ для всіх i, j.

В орієнтованому графі Q позначимо через $d(v_1, v_2)$ мінімальну кількість одиничних циклів, через вершини яких потрібно пройти, щоб з вершини v_1 потрапити у вершину v_2. Будемо вважати $d(v, v) = 0$.

Лема 3.1.7.

1. $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$, для всіх $v_i, v_j \in Q$,

2. $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_j)$ для всіх $v_i, v_j, v_k \in Q$.

Доведення.

1) Припустимо протилежне, що $d(v_i, v_j) < d(v_j, v_i)$. Занумеруємо цикли на шляху із v_i в v_j числами $1, 2, \dots, m = d(v_i, v_j)$. Очевидно, що з вершини v_j рухаючись по стрілкам циклів $m, \dots, 1$ можна потрапити в вершину v_i. Тому $d(v_j, v_i) \leq m = d(v_i, v_j)$. Отже, припущення не вірне, тому $d(v_i, v_j) = d(v_j, v_i)$.

2) З вершини v_i можна потрапити в вершину v_j через вершину v_k, тому $d(v_i, v_j) + d(v_j, v_k) \geq d(v_i, v_j)$.

Лема 3.1.8 В одиничному сагайдаку Q існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ і має місце нерівність $d(v_1, v_k) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$

Доведення. Побудуємо неорієнтований граф $G = (VG, AG)$, в якому вершини — це одиничні цикли сагайдака Q .У графі G дві вершини з'єднані ребром, якщо в сагайдаку Q відповідні одиничні цикли мають спільну вершину. Оскільки сагайдак Q одиничний, то граф G є зв'язним. Побудуємо граф $G_1 = (VG_1, AG_1)$, який є остовним каркасом графа G. Тобто $VG_1 = VG$, $AG_1 \subseteq AG$ і граф G_1 є деревом. Нехай $l(t_k, t_p)$ — це відстань між двома вершинами (тобто $l(t_k, t_p)$ — це кількість ребер в мінімальному шляху з t_k в t_p).

В скінченому графі G_1 визначений діаметр $l(G_1) = \max t_k, t_p \in VG_1(t_k, t_p)$. Дерево має центр (один або два) і радіус дерева $\rho(G_1) = \left[\frac{l(G_1)+1}{2}\right]$. Нехай t_r — центр дерева. Тоді для довільної вершини v_1 одиничного циклу t_r маємо $d(v_1, v_j) \leq \rho(G_1) + 1$ для довільної вершини $v_j \epsilon VQ$.

В загальному випадку $|VG_1| = |VG| \leq |VQ| - 1$. Причому рівність $|VG_1| = |VQ| - 1$ можлива лише тоді, коли всі одиничні цикли орієнтованого графа Q мають довжину два. Для дерева G_1 завжди $l(G_1) \leq |VG_1| - 1$. Рівність $l(G_1) = |VG_1| - 1$ виконується у випадку, коли дерево G_1 є ланцюгом.

Якщо сагайдак Q містить одиничний цикл довжини більшої, ніж два, то $|VG_1| \leq |VQ| - 1$. Тоді $\rho(G_1) = \left[\frac{l(G_1)+1}{2}\right] \leq \left[\frac{|VG_1|-1}{2}\right] \leq \left[\frac{|VQ|-2}{2}\right] = \left[\frac{|VQ|}{2}\right] - 1$.

Якщо дерево G_1 не є ланцюгом, то . тоді $l(G_1) < |VG_1| - 1$. Тоді $\rho(G_1) = \left[\frac{l(G_1)+1}{2}\right] \leq \left[\frac{|VG_1|-1}{2}\right] \leq \left[\frac{|VQ|-2}{2}\right] = \left[\frac{|VQ|}{2}\right] - 1$

У цих випадках $d(v_1, v_j) \leq \rho(G_1) + 1 \leq \left[\frac{|VQ|}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$.

Нехай сагайдак Q містить тільки одиничні цикли довжини два та дерево G_1 є ланцюгом. Тоді $|VG_1| = |VQ| - 1$ та $l(G_1) = |VG_1| - 1 = |VQ| - 2$

Якщо $|VQ|$ — парне, то $\rho(G_1) = \frac{l(G_1)}{2} = \left[\frac{|VQ|}{2}\right] - 1$.

$$d(v_1, v_j) \leq \rho(G_1) + 1 = \left[\frac{|VQ|}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right].$$

Якщо $|VQ|$ — непарне, то $\rho(G_1) = \frac{l(G_1)+1}{2} = \left[\frac{|VQ|-1}{2}\right]$.

Дерево G_1 має 2 центра t_r, t_s, які є суміжними вершинами. Одиничні цикли t_r, t_s мають спільну вершину v_1. Для цієї вершини $(v_1, v_j) \leq \rho(G_1) = \left[\frac{|VQ|-1}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right]$. для довільної вершини $v_j \epsilon VQ$.

Теорема 3.1.9 Для довільного одиничного орієнтованого графа Q існує матриця показників $\mathcal{E} = (\alpha_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ така, що $Q = Q(\mathcal{E})$ і $0 \leq \alpha_{ij} \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ для всіх i, j.

Доведення. За лемою 3.16. існує вершина v_1 така, що для довільної вершини $v_k \in VQ$ $d(v_1, v_k) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$. Оскільки Q – допустимий, то існує зведена матриця показників $\mathcal{E}_1$така, що $Q = Q(\mathcal{E}_1)$. З матриці $\mathcal{E}_1$ елементарними перетвореннями першого типу перейдемо до матриці $\mathcal{E} = (\alpha_{ij})$, яка має нульовий стовпчик з номером v_1. Зауважимо, що при елементарному перетворенні першого типу одиничний цикл залишається одиничним. Оскільки орієнтований граф одиничний, то $a_{v_1 v_k} \leq d(v_1, v_k) \leq \left[\frac{n}{2}\right]$ Тоді

$$\alpha_{ij} \leq \alpha_{iv_1} + \alpha_{v_1 j} \leq 0 + \left[\frac{n}{2}\right] = \left[\frac{n}{2}\right].$$ Теорема доведена.

В прикладах (α, β, γ) означає $\min(\alpha, \beta, \gamma)$.

Приклад 3.1.10.

Дано сагайдак Q .з матрицею суміжності $[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Покажемо, що сагайдак Q допустимий та описати всі матриці показників ε, для яких $Q(\varepsilon) = Q$.

Сагайдак Q має 8 стрілок σ_{13}, σ_{23}, σ_{34}, σ_{35}, σ_{41}, σ_{42}, σ_{51}, σ_{52}. Тому матриця $\varepsilon^{(1)}$ має 8 твірних елементів β_{13}, β_{23}, β_{34}, β_{35}, β_{41}, β_{42}, β_{51}, β_{52}, причому для цих елементів $\beta_{ij} = \alpha_{ij}$. Всі інші елементи матриці показників визначаються наступним чином:

при $i \neq j$: $\alpha_{ij} = \min(\alpha_{ii_1} + \alpha_{i_1 i_2} + \ldots + \alpha_{i_k j})$

(тут мінімум береться по всім шляхам $\sigma_{ii_1}\sigma_{i_1 i_2} \ldots \sigma_{i_k j}$ з точки i в точку j);

при $i = j$ $\qquad \alpha_{ii} = 0$.

Тому $\varepsilon = \begin{pmatrix} A & B \end{pmatrix}$, де

$$A = \begin{pmatrix} 0 & (\alpha_{13}+\alpha_{34}+\alpha_{42}, \alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{52}) & \alpha_{13} \\ (\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{41}, \alpha_{23}+\alpha_{35}+\alpha_{51}) & 0 & \alpha_{23} \\ (\alpha_{34}+\alpha_{41}, \alpha_{35}+\alpha_{51}) & (\alpha_{34}+\alpha_{42}, \alpha_{35}+\alpha_{52}) & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & (\alpha_{41}+\alpha_{13}, \alpha_{42}+\alpha_{23}) \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & (\alpha_{51}+\alpha_{13}, \alpha_{52}+\alpha_{23}) \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} \alpha_{13}+\alpha_{34} & \alpha_{13}+\alpha_{35} \\ \alpha_{23}+\alpha_{34} & \alpha_{23}+\alpha_{35} \\ \alpha_{34} & \alpha_{35} \\ 0 & (\alpha_{41}+\alpha_{13}+\alpha_{35}, \alpha_{42}+\alpha_{23}+\alpha_{35}) \\ (\alpha_{51}+\alpha_{13}+\alpha_{34}, \alpha_{52}+\alpha_{23}+\alpha_{34}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Можна вважати, що перший рядок нульовий: $\alpha_{1j} = 0$ для всіх *j*. Тоді $\alpha_{13} = 0$. Звідси $\alpha_{34} = 0, \alpha_{35} = 0, (\alpha_{42}, \alpha_{52}) = 0$

Тоді матриця ε набуває вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{23}+(\alpha_{41}+\alpha_{51}) & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{23} & \alpha_{23} \\ (\alpha_{41}, \alpha_{51}) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & (\alpha_{41}, \alpha_{42}+\alpha_{23}) & 0 & (\alpha_{41}, \alpha_{42}+\alpha_{23}) \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & (\alpha_{51}, \alpha_{52}+\alpha_{23}) & (\alpha_{51}, \alpha_{52}+\alpha_{23}) & 0 \end{pmatrix}.$$

Існує два шляхи з точки 1 в точку 1: $\sigma_{13}\sigma_{34}\sigma_{41}$ та $\sigma_{13}\sigma_{35}\sigma_{51}$.

Аналогічно існує два шляхи з точки 2 в точку 2: $\sigma_{23}\sigma_{34}\sigma_{42}$ та $\sigma_{23}\sigma_{35}\sigma_{52}$.

В точці 1 немає петлі. Отже, за умовою 5 теореми 1 існує цикл через точку 1 ваги 1. Тоді:

$(\alpha_{13}+\alpha_{34}+\alpha_{41}, \alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{51}) = 1$. Звідси $(\alpha_{41}, \alpha_{51}) = 1$

Аналогічно для точки 2 маємо:

$\left(\alpha_{23}+\alpha_{34}+\alpha_{42},\alpha_{23}+\alpha_{35}+\alpha_{52}\right)=1$. Звідси $\alpha_{23}+\left(\alpha_{42},\alpha_{52}\right)=1$ і, оскільки $\left(\alpha_{42},\alpha_{52}\right)=0$, то $\alpha_{23}=1$.

Отже, тепер наша матриця *ε* має вигляд:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \left(\alpha_{41},1+\alpha_{42}\right) & 0 & \left(\alpha_{41},1+\alpha_{42}\right) \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & \left(\alpha_{51},1+\alpha_{52}\right) & \left(\alpha_{51},1+\alpha_{52}\right) & 0 \end{pmatrix}$$

і маємо дві умови:

1. $\left(\alpha_{42},\alpha_{52}\right)=0$,

2. $\left(\alpha_{41},\alpha_{51}\right)=1$.

Можливі випадки:

а) $\begin{cases}\alpha_{42}=0\le\alpha_{52}, \\ \alpha_{41}=1\le\alpha_{51};\end{cases}$

б) $\begin{cases}\alpha_{42}=0\le\alpha_{52}, \\ \alpha_{51}=1\le\alpha_{41};\end{cases}$

в) $\begin{cases}\alpha_{52}=0\le\alpha_{42}, \\ \alpha_{41}=1\le\alpha_{51};\end{cases}$

г) $\begin{cases}\alpha_{52}=0\le\alpha_{42}, \\ \alpha_{51}=1\le\alpha_{41}.\end{cases}$

Розглянемо випадок а).

Для нього матриця ε має вигляд:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & 0 \end{pmatrix}$$

З $\alpha_{51} \le \alpha_{52} + \alpha_{21} = \alpha_{52} + 2$ та $\alpha_{52} \le \alpha_{51} + \alpha_{12} = \alpha_{51}$ випливає, що $0 \le \alpha_{52} \le \alpha_{51} \le \alpha_{52} + 2$.

Запишемо для матриці ε матрицю $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + \mathrm{E}$:

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & 1 \end{pmatrix}$$

Підрахуємо матрицю $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$:

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52})+1 & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & (\alpha_{51}, 1+\alpha_{52}) & (2, \alpha_{51}, \alpha_{52}+1) \end{pmatrix}$$

Тоді:

$$[Q] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (0,\ 1+\alpha_{52}-\alpha_{51})+1 & (\alpha_{51}-\alpha_{52}, 1) & 0 & 0 & (2, \alpha_{51}, \alpha_{52}+1)-1 \end{pmatrix}$$

З $q_{51} = 1$ та $q_{52} = 1$ отримуємо, що $1 + \alpha_{52} - \alpha_{51} \geq 0$ та $\alpha_{51} - \alpha_{52} \geq 1$. Тоді $1 + \alpha_{52} \geq \alpha_{51} \geq 1 + \alpha_{52}$.

Звідси $\alpha_{51} = 1 + \alpha_{52}$.

З $0 = q_{55} = (2, \alpha_{51}, \alpha_{52} + 1) - 1 = (2, \alpha_{51}) - 1$ отримуємо, що $\alpha_{51} = 1$.

Отже, матриця ε набуває остаточного вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер випадок б).

Для нього матриця ε має вигляд

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \alpha_{52} & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\alpha_{41} \leq \alpha_{43} + \alpha_{31} = 2$, $\alpha_{52} \leq \alpha_{51} + \alpha_{12} = 1$, то $1 \leq \alpha_{41} \leq 2$ та $0 \leq \alpha_{52} \leq 1$.

Матриця $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + \mathrm{E}$ має вигляд:

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha_{52} & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$, має вигляд:

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому:

$$[Q] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2-\alpha_{41} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1-\alpha_{52} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $q_{41} = 2 - \alpha_{41} = 1$ та $q_{52} = 1 - \alpha_{52} = 1$, то $\alpha_{41} = 1, \alpha_{52} = 0$.

Отже, матриця ε набуває остаточного вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо тепер випадок в).

Для нього матриця ε має вигляд

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{42} & 1 & 0 & 1 \\ \alpha_{51} & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Оскільки $\alpha_{51} \leq \alpha_{52} + \alpha_{21} = 2$, $\alpha_{42} \leq \alpha_{41} + \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} = 1$, то $1 \leq \alpha_{51} \leq 2$ та $0 \leq \alpha_{42} \leq 1$.

Матриця $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + \mathrm{E}$ має вигляд:

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & \alpha_{42} & 1 & 1 & 1 \\ \alpha_{51} & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Матриця $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_k (\beta_{ik} + \beta_{kj})$, має вигляд:

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тому:

$$[Q] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{42} & 0 & 0 & 0 \\ 2-\alpha_{51} & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Оскільки $q_{42} = 1 - \alpha_{42} = 1$ та $q_{51} = 2 - \alpha_{51} = 1$, то $\alpha_{42} = 0, \alpha_{51} = 1$.

Отже, матриця ε набуває остаточного вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Розглянемо випадок г).

Для нього матриця ε має вигляд:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) & 0 & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

З $\alpha_{41} \le \alpha_{42} + \alpha_{23} + \alpha_{35} + \alpha_{51} = \alpha_{42} + 2$ та $\alpha_{42} \le \alpha_{41} + \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} = \alpha_{41}$ випливає, що $0 \le \alpha_{42} \le \alpha_{41} \le \alpha_{42} + 2$.

Запишемо для матриці ε матрицю $\varepsilon^{(1)} = (\beta_{ij}) = \varepsilon + \mathrm{E}$:

$$\varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) & 1 & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Підрахуємо матрицю $\varepsilon^{(2)} = (\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij} = \min\limits_{k}(\beta_{ik} + \beta_{kj})$:

$$\varepsilon^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42})+1 & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42})+1 & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) & (\alpha_{41}, 1+\alpha_{42}) \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді:

$$[Q] = \varepsilon^{(2)} - \varepsilon^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ (0,\ 1+\alpha_{42}-\alpha_{41})+1 & (\alpha_{41}-\alpha_{42}, 1) & 1 & (\alpha_{41}, \alpha_{42}+1)-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

З $q_{41} = 1$ та $q_{42} = 1$ отримуємо, що $1 + \alpha_{42} - \alpha_{41} \geq 0$ та $\alpha_{41} - \alpha_{42} \geq 1$. Тоді $1 + \alpha_{42} \geq \alpha_{41} \geq 1 + \alpha_{42}$.

Звідси $\alpha_{41} = 1 + \alpha_{42}$.

З $0 = q_{44} = (\alpha_{41}, \alpha_{42} + 1) - 1 = (\alpha_{42} + 1) - 1$ отримуємо, що $\alpha_{41} = 1$, $\alpha_{42} = 0$.

Отже, матриця ε набуває остаточного вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Приклад 3.1.11.

Дано сагайдак Q з матрицею суміжності

$$[Q]=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Обчислимо всі можливі матриці показників з даним сагайдаком.

Нехай $\varepsilon=\begin{pmatrix} A & B & C \end{pmatrix}$, де

$$A=\begin{pmatrix} 0 & (\alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{52},\alpha_{14}+\alpha_{46}+\alpha_{62}) \\ (\alpha_{26}+\alpha_{61},\alpha_{25}+\alpha_{51}) & 0 \\ (\alpha_{35}+\alpha_{51},\alpha_{35}+\alpha_{52}+\alpha_{26}+\alpha_{61}) & (\alpha_{35}+\alpha_{52},\alpha_{35}+\alpha_{51}+\alpha_{14}+\alpha_{46}+\alpha_{62}) \\ (\alpha_{46}+\alpha_{61},\alpha_{46}+\alpha_{62}+\alpha_{25}+\alpha_{51}) & (\alpha_{46}+\alpha_{62},\alpha_{46}+\alpha_{61}+\alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{52}) \\ \alpha_{51} & \alpha_{52} \\ \alpha_{61} & \alpha_{62} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{13} & \alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{14} \\ 0 & (\alpha_{35}+\alpha_{51}+\alpha_{14},\alpha_{35}+\alpha_{52}+\alpha_{26}+\alpha_{61}+\alpha_{14}) \\ (\alpha_{46}+\alpha_{61}+\alpha_{13},\alpha_{46}+\alpha_{62}+\alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{13}) & 0 \\ (\alpha_{51}+\alpha_{13},\alpha_{52}+\alpha_{26}+\alpha_{61}+\alpha_{13}) & (\alpha_{51}+\alpha_{14},\alpha_{52}+\alpha_{26}+\alpha_{61}+\alpha_{14}) \\ (\alpha_{61}+\alpha_{13},\alpha_{62}+\alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{13}) & (\alpha_{61}+\alpha_{14},\alpha_{62}+\alpha_{25}+\alpha_{51}+\alpha_{14}) \end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix} (\alpha_{13}+\alpha_{35},\alpha_{16}+\alpha_{62}+\alpha_{25}) & (\alpha_{14}+\alpha_{46},\alpha_{13}+\alpha_{35}+\alpha_{52}+\alpha_{26}) \\ \alpha_{25} & \alpha_{26} \\ \alpha_{35} & (\alpha_{35}+\alpha_{51}+\alpha_{14}+\alpha_{46},\alpha_{35}+\alpha_{52}+\alpha_{26}) \\ (\alpha_{46}+\alpha_{61}+\alpha_{13}+\alpha_{35},\alpha_{46}+\alpha_{62}+\alpha_{25}) & \alpha_{46} \\ 0 & (\alpha_{51}+\alpha_{14}+\alpha_{46},\alpha_{52}+\alpha_{26}) \\ (\alpha_{61}+\alpha_{13}+\alpha_{35},\alpha_{62}+\alpha_{25}) & 0 \end{pmatrix}$$

Запишемо умови теореми 2 для даного сагайдака.

З умови 1 маємо:

1. $\alpha_{25}<\alpha_{26}+\alpha_{61}+\alpha_{13}+\alpha_{35}$;

2. $\alpha_{26} < \alpha_{25} + \alpha_{51} + \alpha_{14} + \alpha_{46}$;

3. $\alpha_{51} < \alpha_{52} + \alpha_{26} + \alpha_{61}$;

4. $\alpha_{52} < \alpha_{51} + \alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{62}$;

5. $\alpha_{61} < \alpha_{62} + \alpha_{25} + \alpha_{51}$;

6. $\alpha_{62} < \alpha_{61} + \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52}$.

Умови 3 і 5 разом дають, що:

1. існує цикл ваги 1 через точку 2, тоді

$$\left(\alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} + \alpha_{26} + \alpha_{61}, \alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{62} + \alpha_{25} + \alpha_{51}, \alpha_{25} + \alpha_{52}, \alpha_{26} + \alpha_{62}\right) = 1$$

2. існує цикл ваги 1 через точку 3, тоді

$$\left(\alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{51}, \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} + \alpha_{26} + \alpha_{61}\right) = 1$$

3. існує цикл ваги 1 через точку 4, тоді

$$\left(\alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{61}, \alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{62} + \alpha_{25} + \alpha_{51}\right) = 1$$

4. існує цикл ваги 1 через точку 5, тоді

$$\left(\alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{51}, \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} + \alpha_{26} + \alpha_{61}, \alpha_{25} + \alpha_{52}, \alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{62} + \alpha_{25} + \alpha_{51}\right) = 1$$

5. існує цикл ваги 1 через точку 6, тоді

$$\left(\alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{61}, \alpha_{14} + \alpha_{46} + \alpha_{62} + \alpha_{25} + \alpha_{51}, \alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{52} + \alpha_{26} + \alpha_{61}, \alpha_{26} + \alpha_{62}\right) = 1$$

Умови 2 і 4 теореми 2 для даного прикладу не мають сенсу оскільки сагайдак *Q* не має петель в жодній із своїх точок.

Покладемо далі, що перший рядок матриці ε нульовий і всі елементи більше нуля або дорівнюють нулю, тобто $\alpha_{1j} = 0 \quad \forall j$ і $\alpha_{ij} \geq 0$. Тоді використовуючи записані вище умови теореми 2 для даного прикладу отримаємо, що:

$$\alpha_{13} + \alpha_{35} + \alpha_{51} = 1$$

$$\alpha_{14}+\alpha_{46}+\alpha_{61}=1$$

$$(\alpha_{25}+\alpha_{52},\alpha_{26}+\alpha_{62})=1.$$

Отже, для знаходження матриці ε у нас з'являється чотири випадки:

а) $\begin{cases}\alpha_{35}=0\\ \alpha_{46}=0\\ \alpha_{51}=1\\ \alpha_{61}=1\end{cases}$ б) $\begin{cases}\alpha_{35}=0\\ \alpha_{46}=1\\ \alpha_{51}=1\\ \alpha_{61}=0\end{cases}$ в) $\begin{cases}\alpha_{35}=1\\ \alpha_{46}=0\\ \alpha_{51}=0\\ \alpha_{61}=1\end{cases}$ г) $\begin{cases}\alpha_{35}=1\\ \alpha_{46}=1\\ \alpha_{51}=0\\ \alpha_{61}=0\end{cases}$

Але, якщо $\alpha_{1j}=0 \quad \forall j$, то $\alpha_{i1}>0 \quad \forall i>1$. В іншому випадку ми не матимемо симетричних нулів. Отже, випадки б) – г) не можливі.

Розглянемо випадок а).

Застосовуючи те, що $\begin{cases}\alpha_{35}=0\\ \alpha_{46}=0\\ \alpha_{51}=1\\ \alpha_{61}=1\end{cases}$ до умов теореми 2, виписаних для даного сагайдака Q, маємо:

1. $\alpha_{25}<\alpha_{26}+1$ і $\alpha_{26}<\alpha_{25}+1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{25}=\alpha_{26}$;

2. $\alpha_{52}<\alpha_{62}+1$ і $\alpha_{62}<\alpha_{52}+1 \quad \Rightarrow \quad \alpha_{52}=\alpha_{62}$.

Тоді матриця ε набуває вигляду:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ \alpha_{25}+1 & 0 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25} & \alpha_{25}\\ 1 & \alpha_{52} & 0 & 1 & 0 & (1,\alpha_{52}+\alpha_{25})\\ 1 & \alpha_{52} & 1 & 0 & (1,\alpha_{52}+\alpha_{25}) & 0\\ 1 & \alpha_{52} & 1 & 1 & 0 & (1,\alpha_{52}+\alpha_{25})\\ 1 & \alpha_{52} & 1 & 1 & (1,\alpha_{52}+\alpha_{25}) & 0 \end{pmatrix}$$

Використовуючи те, що $(\alpha_{25}+\alpha_{52},\alpha_{26}+\alpha_{62})=1$ маємо $\alpha_{25}+\alpha_{52}=1$, а отже, $\alpha_{52}=1-\alpha_{25}$.

Тоді

$$\varepsilon=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{25}+1 & 0 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25} & \alpha_{25} \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Запишемо для матриці ε матрицю $\varepsilon^{(1)}=(\beta_{ij})=\varepsilon+\mathrm{E}$:

$$\varepsilon^{(1)}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \alpha_{25}+1 & 1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25} & \alpha_{25} \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Підрахуємо матрицю $\varepsilon^{(2)}=(\gamma_{ij})$, де $\gamma_{ij}=\min\limits_{k}(\beta_{ik}+\beta_{kj})$:

$$\varepsilon^{(2)}=\begin{pmatrix} 1 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 0 & 0 \\ \alpha_{25}+1 & 1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 & \alpha_{25}+1 \\ 1 & (1{,}1-\alpha_{25}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & (1{,}1-\alpha_{25}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & (1{,}2-\alpha_{25}) & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & (1{,}2-\alpha_{25}) & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Тоді:

$$[Q]=\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 1-\alpha_{25} & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & (1,\alpha_{25}) & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & (1,\alpha_{25}) & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

Оскільки в сагайдаку *Q* з точки 1 в точку 2 немає стрілки, то $1-\alpha_{25}=0$, а отже, $\alpha_{25}=1$.

Тому матриця суміжності сагайдака *Q* має вигляд:

$$[Q]=\varepsilon^{(2)}-\varepsilon^{(1)}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Отже, матриця ε набуває вигляду:

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 0 & 2 & 2 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Віднімемо від другого рядка одиницю і додамо її до другого стовпчика. Тоді наша матриця ε набуде остаточного вигляду:

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

3.2. Дослідження циклів допустимих орієнтованих графів

Теорема 3.2.1. Якщо для циклу допустимого сагайдака Q і вершини u, що не є вершиною цього циклу, існує k різних стрілок, які починаються у вершині u та закінчуються у вершинах цього циклу (починаються у вершинах циклу та закінчуються у вершині u), то для довільної вагової функції вага циклу не менша, ніж k.

Доведення. Нехай $w: AQ \to N \cup \{0\}$– вагова функція $w: AQ \to N \cup \{0\}$, задана на множині стрілок допустимого сагайдака Q, яка задовольняє умови теореми 5.1.2. Нехай $C = (v_1, v_2, \dots, v_p)$–цикл, де $v_i \neq v_j$ та $u \notin \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$. позначимо через $w(v_i, v_j)$ вагу шляху із вершини v_i у вершину v_j сагайдака Q по циклу. Нехай $(u, v_{i1}), (u, v_{i2}), \dots, (u, v_{ik})$ k стрілок, які починаються у вершині u та закінчуються у вершинах $v_{i1}, v_{i2}, \dots, v_{ik}$ циклу C. Можемо вважати, що $i_1 < i_2 < \dots < i_k$. За теоремою 5.1.2. вага шляху із вершини u у вершину v_{i-1} $j = 1, \dots, k (v_0 = v_k)$ більша, ніж вага стрілки (u, v_{ij}). Тому маємо систему нерівностей.

$$\begin{cases} w(u, v_{i1}) + w(v_{i1}, v_{i2}) > w(u, v_{i2}) \\ w(u, v_{i2}) + w(v_{i2}, v_{i3}) > w(u, v_{i3}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w(u, v_{ik}) + w(v_{ik}, v_{i1}) > w(u, v_{i1}) \end{cases}$$

Ця система рівносильна системі

$$\begin{cases} w(u, v_{i1}) + w(v_{i1}, v_{i2}) \geq w(u, v_{i2}) + 1 \\ w(u, v_{i2}) + w(v_{i2}, v_{i3}) \geq w(u, v_{i3}) + 1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ w(u, v_{ik}) + w(v_{ik}, v_{i1}) \geq w(u, v_{i1}) + 1 \end{cases}$$

Після додавання лівих та правих частин нерівностей останньої системи отримаємо

$$w(u, v_{i1}) + w(u, v_{i2}) + \cdots + w(u, v_{ik}) + w(v_{i1}, v_{i2}) + w(v_{i2}, v_{i3}) + \cdots + w(v_{ik}, v_{i1}) \geq w(u, v_{i2}) + w(u, v_{i3}) + \cdots + w(u, v_{i1}) + k.$$

Після спрощення маємо:

$$w(v_{i1}, v_{i2}) + w(v_{i2}, v_{i3}) + \cdots + w(v_{ik}, v_{i1}) \geq k.$$

Отже, вага циклу не менша, ніж k. Випадок, коли k стрілок починаються у вершинах циклу C і закінчуються у вершині u, розглядається аналогічно. Теорема доведена.

Теорема 3.2.2. Для довільного натурального k існує допустимий сагайдак Q^*, який містить простий цикл ваги k на попарно різних вершинах.

Доведення. Для $k = 1$ простий цикл (1, 2) з матрицею суміжності $[Q^*] = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ є допустимим сагайдаком. $[Q^*] = Q(\varepsilon)$, де $\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$–зведена матриця показників. Очевидно, що цикл (1, 2) одиничний.

При $k > 1$ розглянемо сагайдак Q з $(2k + 2)$ вершин і $(3k + 3)$ стрілок:

$$VQ = \{1,2, \dots, 2k + 2\},$$

$$AQ = \left(\bigcup_{i=1}^{k+1} \sigma_{2i-1,2i}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \sigma_{2i,2i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{k} \sigma_{2i+1,2i-1}\right) \cup \{\sigma_{1,2k+1}, \sigma_{2k+2,1}\}.$$

Це допустимий сагайдак. Дійсно, вагова функція $\overline{w}: AQ \to N \cup \{0\}$, де $\overline{w}(\sigma_{2i-1,2i}) = 1$ для $i = 1, \dots, k + 1$ і $\overline{w}$ приймає значення 0 для всіх інших стрілок сагайдака Q, задовольняє умовам теореми 5.1.2. Тому Q допустимий сагайдак. Оскільки вершини $2,4, \dots, 2k + 2$ без петель, то для довільної вагової функції $\overline{w}: AQ \to N \cup \{0\}$, що задовольняє умовам теореми 5.1.2., цикли

$(1\ 2\ 3), (3\ 4\ 5), \dots, (2k+1\ 2k+2\ 1)$ одиничні. Сагайдак Q є об'єднанням $(k+1)$ одиничного циклу. Тому $w(\{AQ\}) = k+1$.

З іншого боку сагайдак Q є об'єднанням двох циклів $C_1 = (1\ 2\ 3 \dots 2k+1\ 2k+2)$ і $C_2 = (1\ 2k+1\ 2k-1 \dots 5\ 3)$.
Тому $w(\{AC_1\}) + w(\{AC_2\}) = w(\{AQ\}) = k+1$. . . Оскільки вагам циклу не менша, ніж 1, то

$$w(\{AC_1\}) = k+1-w(\{AC_2\}) \leq k \ (1)$$

Розглянемо орієнтований граф Q^*, який отримується із орієнтованого графа Q додаванням однієї вершини u, стрілок $\sigma_{u,2i}$ для $i = 1,2,\dots,k, \sigma_{2u}$ та петлі σ_{uu}. Орієнтований граф Q^* також допустимий. Визначимо вагову функцію $w^*: AQ^* \to N \cup \{0\}$ наступним чином:

$w^*(2i-1,2i) = 1$ для всіх $i = 1,2,\dots,k, w^*(u,2i) = 1$ для всіх $i = 1,2,\dots,k$

$$w^*(1,2k+1) = w^*(2,u) = w^*(u,u) = 1;$$

w^* приймає значення 0 для всіх інших стрілок орієнтованого графа Q^*.

Ця вагова функція задовольняє всім умовам теореми 5.1.2. Отже, Q^*допустимий орієнтований граф. За теоремою 3.2.1. для довільної вагової функції $w: AQ^* \to N \cup \{0\}$, що задовольняє умовам теореми 3.1.2., $w(1\ 2\ 3\ 4\ 2k+1\ 2k+2\ 1) = w(\{AC_1\}) \geq k$. Оскільки для цієї функції виконується і нерівність(1), то $w(\{AC_1\}) = k$. Теорема доведена.

З твердження 5.1.6. випливає, що одиничний цикл не містить інших стрілок, окрім стрілок самого циклу. Узагальнення цього факту виявилося несподіваним. Вже цикл ваги 2 може містити багато стрілок.

Приклад 1. Розглянемо сагайдак Q з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \dots, 2k+1\}$ і множиною стрілок

$$AQ = \left(\bigcup_{i=1}^{k} \sigma_{2i+2,2i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{k} \sigma_{2j,2j-2}\right) \cup \{\sigma_{21}, \sigma_{2,2k+1}, \sigma_{2k,3} \sigma_{2k+1,2k} \sigma_{1,1}\} \cup A$$

Де A деяка підмножина множини

$$\bigcup_{i=1}^{k-2} \sigma_{2k-2i,2i+3}$$

Сагайдак Q містить цикл $(1\ 3\ 5 \ldots 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \ldots 6\ 4\ 2)$, петлю у вершині 1 та від 2 до k стрілок для $0 \le i \le k-1$. Визначимо на AQ вагову функцію наступним чином. Покладемо $w(\sigma_{21}) = w(\sigma_{2k+1,2k}) = w(\sigma_{1,1}) = 1$. Вага інших стрілок дорівнює 0.

Легко переконатися, що так визначена вагова функція задовольняє умовам теореми 5.1.2. Тому сагайдак Q є допустимим. Цей орієнтований граф має цикл $(1\ 3\ 5 \ldots 2k-3\ 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \ldots 4\ 2)$ ваги 2 і між вершинами циклу, крім петлі, є ще від 2 до k стрілок.

Приклад 2. Розглянемо сагайдак Q з множиною вершин $VQ = \{1, 2, \ldots, 2k\}$ і множиною стрілок

$$AQ = \left(\bigcup_{i=1}^{k-1} \sigma_{2i-1,2i+1}\right) \cup \left(\bigcup_{j=2}^{k} \sigma_{2j,2j-2}\right) \cup \{\sigma_{21}, \sigma_{2k-1,2k}, \sigma_{2,2k-1}, \sigma_{2k,1}\} \cup A$$

де

$$A \subset \bigcup_{i=2}^{k-1} \sigma_{2i,2k+1-2i}$$

Сагайдак Q містить цикл $(1\ 3\ 5 \ldots 2k-3\ 2k-1\ 2k+1\ 2k\ 2k-2 \ldots 4\ 2)$ та від 2 до k стрілок, де $0 \le i \le k$. $w(\sigma_{21}) = w(\sigma_{2k-1,2k}) = 1$. Вага інших стрілок дорівнює 0.

Лема 3.2.3 Нехай зведена Е=(α_{ij}) матриця показників, $Q = Q(\varepsilon)$ сагайдак матриці показників Е, σ_{ij} стрілка сагайдака Q, $w: AQ \to N \cup \{0\}$ вагова функція, що відповідає матриці Е. Тоді вага циклу мінімальної ваги, який містить стрілку σ_{ij} дорівнює $a_{ij} + a_{ji}$.

Доведення. Вагова функція w відповідає матриці показників Е. Тому $w(\sigma_{ij}) = a_{ij}$. a_{ji} дорівнює мінімальній вазі шляху із j в i, тому вага циклу, який проходить через стрілку σ_{ij} та має мінімальну вагу, дорівнює $a_{ij} + a_{ji}$. Лема доведена.

Розглянемо умови, за яких видалення стрілки допустимого орієнтованого графа дає допустимий сагайдак. Очевидно, що отриманий після видалення стрілки сагайдак має залишитися сильнозв'язним, але цієї умови недостатньо.

Приклад 3.

$$[Q] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

сагайдак Q є допустимим, бо він є сагайдаком матриці показників

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Але після видалення стрілки σ_{13} одержимо сагайдак Q^* з матрицею суміжності

$$[Q*] = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Якщо цикл $(1\ 2\ 3\ 4)$ одиничний, то вершина 2 має бути без петлі. Якщо ж цикл $(1\ 2\ 3\ 4)$ має вагу більшу, ніж 1, то всі вершини мають бути з петлями. Отже, не існує вагової функції, що задовольняє умовам теореми 5.1.2. Тому сагайдак Q^* не є допустимим.

Теорема 3.2.4 Нехай Q допустимий сагайдак, σ_{uv} стрілка сагайдака Q, Q^* сагайдак, який утворюється з Q видаленням стрілки σ_{uv}. Сагайдак Q^* є допустимим, якщо виконуються умови:

1) В Q існує шлях із вершини u в вершину v, відмінний від стрілки σ_{uv};

2) Існує вагова функція w, для якої Q допустимий сагайдак і стрілка σ_{uv} не належить одиничному циклу.

Доведення. Нехай Q допустимий сагайдак і $\sigma_{uv} \in AQ$. Тоді існує вагова функція $w: AQ \to N \cup \{0\}$, що задовольняє умовам теореми 5.1.2. Нехай Q^* сагайдак, що утворюється з Q видаленням стрілки σ_{uv}. Визначимо вагову функцію $w^*: AQ^* \to N \cup \{0\}$ наступним чином: $w^*(\sigma_{ij}) = w(\sigma_{ij})$ для довільної стрілки σ_{ij} сагайдака Q^*.

За умовою 1 теореми сагайдак Q^* сильнозвязний. За умовою 2 одиничні цикли сагайдаків Q та Q^* співпадають. Для довільного шляху $P(i,j)$ із вершини i у вершину j маємо $w^*(P(i,j)) \geq w(P(i,j))$. Зокрема для довільного циклу $P(i,i)$ маємо $w^*(P(i,i)) \geq w(P(i,i))$. Тому для довільної стрілки σ_{ij} або петлі σ_{ii} сагайдака Q^* виконуються нерівності

$$w^*(P(i,j)) \geq w(P(i,j)) > w^*(\sigma_{ij}) = w(\sigma_{ij})$$

$$w^*(P(i,i)) \geq w(P(i,i)) > w^*(\sigma_{ii}) = w(\sigma_{ii})$$

Де $P(i,j)$ відмінний від стрілки шлях вершини i у вершину j.

Отже, вагова функція w^* задовольняє умовам теореми 5.1.2. і тому сагайдак Q^* є допустимим. Теорема доведена.

3.3.Рівно з *m* різних матриць показників одержується один граф

Теорема 3.3.1. Для будь-якого цілого m>1 існує допустимий орієнтований граф Q_m, такий що знайдеться *m різних* попарно неізоморфних зведених матриць показників, орієнтований граф яких точно співпадає з Q_m.

Доведення. Розглянемо сагайдак Q_m, який має $2(m+1)+1$ вершину та $3m+1$ стрілку, а саме $VQ=\{1, \dots, 2m+3\}$,

$AQ_m=\{\sigma_{2k-1,2k}, \sigma_{2k,2k+1}, \sigma_{2k+1,2k-1}$ для всіх $k=1, \dots, m+1, \sigma_{1,2m+1}\}$, де σ_{ij} — стрілка з вершини i у вершину j.

Для сагайдака Q_m побудуємо m зведених попарно нееквівалентних між собою матриць показників. Відомо, що зведена матриця показників однозначно задається ваговою функцією $\varphi(\sigma_{ij})\in N\cup\{0\}$, $\sigma_{ij}\in AQ$, яка задовольняє умови теореми 5.1.2. Побудуємо m вагових функцій $\varphi_1, \dots, \varphi_m$ наступним чином:

$$\varphi_p(\sigma_{ij})=\begin{cases}1, \ i=2k-1, \ j=2k, \\ 0, \ i=2k, \ j=2k+1, \\ 0, \ i=2k+1, \ j=2k-1, \\ p, \ i=1, \ j=2(m+1)+1.\end{cases}$$

Функції φ_p задовольняють всі умови теореми:

1) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k})+ \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1})+\varphi_p(\sigma_{2k+1, 2k-1})=1$, тому вершини $2k-1$, $2k$, $2k+1$ не мають петель.

2) $\varphi_p(\sigma_{12})+\varphi_p(\sigma_{23})+\varphi_p(\sigma_{34})+\varphi_p(\sigma_{45})+\ldots+ \varphi_p(\sigma_{2m-1, 2m})+ \varphi_p(\sigma_{2m, 2m+1})=$

$=m+1>\varphi_p(\sigma_{1, 2m+1})$ (вага шляху більша, ніж вага стрілки).

3) $\varphi_p(\sigma_{2k-1,2k}) + \varphi_p(\sigma_{2k,2k+1}) + \varphi_p(\sigma_{2k+1, 2k-1})\geq 1$,

$\varphi_p(\sigma_{1, 2m+1}) + \varphi_p(\sigma_{2m+1, 2m-1})+ \varphi_p(\sigma_{2m-1, 2m-3})+\ldots+ \varphi_p(\sigma_{31})= \varphi_p(\sigma_{1, 2m+1})\geq 1$

(вага кожного циклу не менше 1).

Побудуємо зведені матриці показників $\mathrm{E}_p=\left(\alpha_{ij}^p\right)\in M_n(Z)$. Покладемо при $i\neq j$

$$\left(\alpha_{ij}^p\right)=\begin{cases}\varphi_p\left(\sigma_{ij}\right), \text{ якщо } q_{ij}=1, \\ \min\limits_{i=i_0, i_1, \dots, i_k=j \text{ -усі можливі шляхи із } i \text{ в } j}\left\{\varphi_p\left(\sigma_{ii_1}\right)+\ldots+\varphi_p\left(\sigma_{i_{k-1}i_j}\right)\right\}, \text{ якщо } q_{ij}=0.\end{cases}$$

Тоді за теоремою $Q(E_1)= Q(E_2)=\ldots= Q(E_m) = Q_m$. Сума всіх елементів матриці E_k менша, ніж сума всіх елементів матриці E_{k+1}. Тому m зведених матриць показників $E_1, E_2, \ldots, E_m$ попарно нееквівалентні між собою.

Покажемо тепер, що інших нееквівалентних матриць показників із сагайдаком Q_m не існує. Нехай $Q_m=Q(E)$ для деякої зведеної матриці показників, $[Q_m]=(q_{ij})$. Доведемо, що E еквівалентна до однієї з матриць E_1, ..., E_m.

Застосувавши елементарне перетворення першого типу перейдемо від матриці E до еквівалентної E^* з першим нульовим стовпчиком. В сагайдаку Q_m із третьої вершини можна попасти в першу тільки через стрілку σ_{31}. Тому $\varphi^*(\sigma_{31})=0$. Аналогічно із вершини 2 в вершину 1 існує єдиний шлях через σ_{23}, σ_{31}. Тому $\varphi^*(\sigma_{23})+ \varphi^*(\sigma_{31})=0$ і тоді $\varphi^*(\sigma_{23})=0$. Оскільки вершина 2 не має петлі, то $\varphi^*(\sigma_{12})+\varphi^*(\sigma_{23})+ \varphi^*(\sigma_{31})=1$. Тому $\varphi^*(\sigma_{12})=1$.

Абсолютно аналогічно одержується $\varphi^*(\sigma_{2k-1,2k})=1$, $\varphi^*(\sigma_{2k,2k+1})=\varphi^*(\sigma_{2k+1,2k-1})=0$, для $k=2, \ldots, m+1$.

$\varphi^*(\sigma_{12})+\varphi^*(\sigma_{23})+\varphi^*(\sigma_{34})+\varphi^*(\sigma_{45})+\ldots+ \varphi^*(\sigma_{2m-1,\, 2m})+ \varphi^*(\sigma_{2m,\, 2m+1})=$

$=m+1>\varphi^*(\sigma_{1,\, 2m+1})$.

$\varphi^*(\sigma_{1,\, 2m+1}) + \varphi^*(\sigma_{2m+1,\, 2m-1})+ \varphi^*(\sigma_{2m-1,\, 2m-3})+\ldots+ \varphi^*(\sigma_{31})= \varphi^*(\sigma_{1,\, 2m+1})\geq 1$.

Отже, $1\leq\varphi^*(\sigma_{1,\, 2m+1})\leq m$. Нехай $t=\varphi^*(\sigma_{1,\, 2m+1})$, тоді $E\approx E^*=E_t$.

Отже, зведених попарно не еквівалентних між собою матриць показників з сагайдаком Q_m рівно m.

Приклад для $m=2$. Сагайдак Q_2 складається з 7 вершин.

Сума всіх елементів матриць E_1, E_2 дорівнює 31 і 36 відповідно. Тому матриці не еквівалентні.

ВИСНОВКИ

В роботі досліджуються допустимі орієнтовані графи та цикли допустимих орієнтованих графів. Досліджуються допустимі орієнтовані зважені графи з вагою одиниця, знайдені властивості таких графів.

Для певних класів орієнтованих графів доведено, що вони допустимі, та знайдено всі матриці показників з яких вони одержуються.

В дипломній роботі знайдено допустимий орієнтований граф, який одержується рівно з m різних матриць показників.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 1/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko// – Kluwer Academic Publisheers, 2004.- 380 p.

2. Hazewinkel M. Algebras Rings and Modules, vol. 2/ M. Hazewinkel, N. Gubareni, V.V. Kirichenko – Kluwer Academic Publisheers, 2007.- 400 p.

3. Kirichenko V. V. Exponent Matrices and Tiled Order over Discrete Valuation Rings/ V. V. Kirichenko , O. V. Zelenskiy, V. N. Zhuravlev // International Journal of Algebra and Computation. – 2005. – Vol. 15, № 5 & 6. – p. 1-16.

4 Зеленський, О.В. Сума елементів зведеної матриці показників. / О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк. // Вісник Харківського національного університету ім. В. Н. Каразіна. Серія «Математика, прикладна математика механіка». Т 82, 2015. С. 61-66.

5. Журавльов В. М. Одиничні сагайдаки матриці показників/ В.М. Журавльов, О.В. Зеленський, В.М. Дармосюк // Вісник Київського університету. Серія: фізико-математичні науки. – 2012. – №4. – С. 27-31.

6.Зеленський О.В., Дармосюк В.М., Касянюк М.В. Мінімальна матриця показникі/. О. В. Зеленський, В.М,Дармосюк, М.В, Касянюк//*Дослідження в математиці та механіці.* Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2019. Том 24, №1(33). С. 15–24.

7.V.V. Kirichenko, O.V. Zelenskiy, M.A. Khibina, V.M. Zhuravlev. Quivers and Latin squares. São Paulo Journal of Mathematical Sciences, 2016. V.10, Issue 2, pp 286–300.