Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«МЕТОДИКА ВИВЧЕННЯ КООРДИНАТ І ВЕКТОРІВ У ПРОСТОРІ В КУРСІ МАТЕМАТИКИ 11 КЛАСУ НА РІВНІ СТАНДАРТУ»**

Виконала: студентка 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Візітілова Олександра Василівна

Керівник: **Теплінський Ю.В.**, доктор фізико-математичних наук, професор

Рецензент: **Моцик Р.В.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

Зміст

Вступ

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певним прийомами математичної діяльності і навичками їх застосувань до розв'язування прикладних задач. Суттєвої математичної підготовки і готовності її застосувати вимагає вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до шкільної математичної освіти у розв'язуванні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним із головних завдань навчання математики є забезпечення умов для досягнення кожним учнем математичної компетентності [7].

Як відомо, перед вчителем математики стоїть завдання не лише дати учням міцні знання і навички з основ наук, а й розвинути їх мислення, зацікавити вивченням математики, активізувати їх пізнавальну діяльність, привчити працювати самостійно,щоб, закінчивши школу, вони могли самостійно підвищувати свою кваліфікацію у майбутній трудовій діяльності.

Водночас, як показує практика і наше дослідження, математика як шкільний предмет є одним із найважчих для засвоєння учнями. Для цього існують як суб'єктивні, так і об'єктивні причини.

Об'єктивні труднощі вивчення математики пов'язані зі специфікою предмета, її абстрактним характером, обумовлюють урахування психологічних закономірностей мислення, вікових, індивідуальних особливостей пізнавальної діяльності учнів.

Поряд із змістом і системою традиційного шкільного курсу математики розробилися і традиційні методи навчання цього курсу. Вони перевірені часом, в основному виправдали себе і частково збережуться в практиці школи, в будь-якому випадку, в найближчому майбутньому. Але, як відомо, в дидактиці математики існує важлива проблема – розробка нових, більш ефективних методів навчання. І не тільки тому, що оновлений зміст і система курсу вимагають і нових методів роботи вчителя та учнів. Вже давно виявлена недостатня ефективність традиційних методів навчання.

Сучасний учитель повинен глибоко усвідомити, що головне його завдання – не тільки озброїти учнів глибокими та міцними знаннями, а й навчити здобувати і застосовувати їх у житті. Ситуація, що склалася, вимагає від учителя такої організації навчального процесу, яка хоча б частково компенсувала значне зменшення кількості навчального часу і забезпечила учням відповідний рівень математичної підготовки.

Вчителям потрібно поєднувати різні типи навчання: індивідуального і колективного, діалогового і контекстного, створювати всі умови для творчої діяльності, застосовувати активні та інтерактивні методи навчання. Тому вчителі передусім повинні формувати особистість, але не за допомогою тиску, а активізуючи природні здібності дитини.

Організація навчання геометрії вимагає від вчителя організовувати роботу таким чином, щоб кожен учень вів самостійний пошук, виявляв і конкретизував способи діяльності, застосовуючи їх до розв’язування нових варіантів навчальних задач, обґрунтовував свої дії. У такому випадку учень є суб’єктом навчання, значною мірою не його навчають, а він навчається. Саме до такого процесу навчання переходять останнім часом у сучасній школі [6].

Зміни, що відбуваються в суспільній свідомості, які пов’язані із процесами гуманізації, гуманітаризації, демократизації, міжнародної інтеграції, привели до необхідності побудови нових моделей школи. З огляду на існуючий стан розвитку освітньої галузі держави ми дійшли висновку, що одним із основних протиріч системи освіти є невирішеність проблеми учіння, яка, як визнають провідні українські вчені-методисти є найбільш складною і найменше опрацьованою, а в методичному плані – перебуває лише на початковому етапі дослідження. Визнання учня як суб’єкта навченої і навчально-професійної діяльності – ось, що лежить в основі розв’язанні цієї проблеми.

Значний внесок у розвиток дидактики математики зробили науковці-дослідники: Г.П. Бевз, О.Я. Блох, Н.І. Ю.М. Колягін, Е.С. Ляпін, Н.В. Метельський, З.І. Слєпкань та інші.

Теоретичною та методологічною основою наших досліджень стали роботи педагогів і психологів: І.Д. Беха, П.П. Блонського, Л.С. Виготського, Б.В. Гнеденко, О.К. Дусавицького, С.Д. Максименка, О.М. Матюшкіна та інших.

У зв'язку з переходом на нові програми і підручники виникає необхідність у розробці нової методики з математики, яка б відповідала діючим підручникам. А оскільки в курсі стереометрії при доведенні теорем та розв'язуванні задач часто використовується знання з теми «Координати і вектори в просторі», то існує необхідність створення методики вивчення цієї теми в курсі стереометрії 11 класу. Варто також зазначити, що в більшості розроблених методик не використовуються рівневі завдання, тому виникає необхідність у розробці такої методики, в якій вони б використовувалися.

Актуальність проблеми, її наукова і практична значущість, а також недостатня теоретична та науково-методична розробленість обумовили вибір теми дослідження: «Методика вивчення координат і векторів у шкільному курсі стереометрії».

А це в свою чергу вимагає від вчителя значних додаткових зусиль, адже усі звикли сприймати підручник з математики як зразок для наслідування. Але зміна парадигми освіти змушує нас переглядати старі методики та змінювати всю методичну систему.

Об'єктом дослідження є процес навчання стереометрії в 11 класі з вивчення геометрії на рівні стандарту.

Предметом дослідження є методика вивчення тем «Декартові координати в просторі» та «Вектори в просторі» в курсі стереометрії у загальноосвітніх школах.

Мета дослідження полягає в тому, щоб розробити методику вивчення тем «Декартові координати в просторі» та «Вектори в просторі» в курсі стереометрії у загальноосвітніх школах, розробити систему рівневих завдань та рівневої контрольної роботи.

Гіпотеза дослідження: впровадження такої методичної системи при вивченні координат і векторів, яка сприятиме розвитку здібностей та можливостей учнів, формуватиме їх прагнення до пізнання та вміння вчитися, стійкий інтерес до успішного вивчення предмету.

Для досягнення поставленої мети **розв'язувались такі завдання**:

проаналізувати підручники, дидактичну, психологічну та методичну літературу щодо викладу теми дослідження;

розробити методику вивчення тем «Декартові координати в просторі» та «Вектори в просторі» в курсі стереометрії у загальноосвітніх навчальних закладах, що орієнтована на рівневі навчання;

Практичне застосування: матеріал даної роботи можна використати під час підготовки до уроків з геометрії, при написанні курсових, дипломних та магістерських робіт.

Апробація та впровадження результатів дослідження здійснювалися в Кам'янець-Подільському ліцеї № Хмельницької області.

Структура роботи визначається метою та завданням дослідження. Вона складається з вступу, двох розділів, висновків та рекомендацій, списку використаних джерел (31 позиція).

Розділ 1. Аналіз літератури по темі “Координати і вектори в просторі”

1. 1. Дидактична суть рівня стандарту освіти

Для успішної участі у сучасному суспільному житті особистість повинна володіти певними прийомами математичної діяльності та навичками їх застосувань до розв’язання практичних задач. Певної математичної підготовки і готовності її застосовувати вимагає і вивчення багатьох навчальних предметів загальноосвітньої школи. Значні вимоги до володіння математикою у розв’язанні практичних задач ставлять сучасний ринок праці, отримання якісної професійної освіти, продовження освіти на наступних етапах. Тому одним з головних завдань цього курсу є забезпечення умов для досягнення кожним учнем практичної компетентності [30].

Практична компетентність передбачає, що випускник загальноосвітнього навчального закладу:

- вміє будувати і досліджувати найпростіші математичні моделі реальних об’єктів, процесів і явищ, задач, пов’язаних з ними, за допомогою математичних об’єктів, відповідних математичних задач;
- вміє оволодівати необхідною оперативною інформацією для розуміння постановки математичної задачі, її характеру й особливостей; уточнювати вихідні дані, мету задачі, знаходити необхідну додаткову інформацію, засоби розв’язання задачі; переформульовувати задачу; розчленовувати задачі на складові, встановлювати зв’язки між ними, складати план розв’язання задачі; вибирати засоби розв’язання задачі, їх порівнювати і застосовувати оптимальні; перевіряти правильність розв’язання задачі; аналізувати та інтерпретувати отриманий результат, оцінювати його придатність із різних позицій; узагальнювати задачу, всебічно її розглядати; приймати рішення за результатами розв’язання задачі;
- володіє технікою обчислень, раціонально поєднуючи усні, письмові, інструментальні обчислення, зокрема наближені;

- вміє проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;
- вміє працювати з формулами (розуміти змістове значення кожного елемента формули, знаходити їх числові значення при заданих значеннях змінних, виражати одну змінну через інші і т. п.);
- вміє читати і будувати графіки функціональних залежностей, досліджувати їх властивості;
- вміє класифікувати і конструювати геометричні фігури на площині й у просторі, встановлювати їх властивості, зображати просторові фігури та їх елементи, виконувати побудови на зображеннях;
- вміє вимірювати геометричні величини на площині й у просторі, які характеризують розміщення геометричних фігур (відстані, кути), знаходити кількісні характеристики фігур (площі та об'єми);
- вміє оцінювати шанси настання тих чи інших подій, міру ризику при прийнятті того чи іншого рішення, вибирати оптимальне рішення.

Практична компетентність є важливим показником якості математичної освіти, природничої підготовки молоді. Вона певною мірою свідчить про готовність молоді до повсякденного життя, до найважливіших видів суспільної діяльності, до оволодіння професійною освітою.

Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Радикальним засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати. Забезпечення прикладної спрямованості викладання математики сприяє формуванню стійких мотивів до навчання взагалі і до навчання математики зокрема.

Реалізація у навчанні прикладної спрямованості навчання математики означає:

- створення запасу математичних моделей, які описують реальні явища і процеси, мають загальнокультурну значущість, а також вивчаються у суміжних предметах;
- формування в учнів знань та вмінь, які необхідні для дослідження цих математичних моделей;
- навчання учнів побудові і дослідженню найпростіших математичних моделей реальних явищ і процесів.

Прикладна спрямованість математичної освіти суттєво підвищується завдяки впровадженню комп’ютерів у навчання математики, повноцінному введенню ймовірнісно-статистичної змістової лінії у шкільний курс математики.

Одним із найважливіших засобів забезпечення прикладної спрямованості навчання математики є встановлення природних міжпредметних зв’язків математики з іншими предметами, у першу чергу, з природничими. Особливої уваги заслуговує встановлення тісних, взаємовигідних зв’язків між математикою та інформатикою – двома освітніми галузями, які є визначальними у підготовці особистості до життя у постіндустріальному, інформаційному суспільстві. Широке застосування комп’ютерів у навчанні математики доцільне для проведення математичних експериментів, практичних занять, інформаційного забезпечення, візуального інтерпретування математичної діяльності, проведення досліджень [30].

Рівень стандарту передбачає як сумісне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Перший підхід в умовах вивчення предмету на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом курсу “Математика” на два курси “Геометрія” і “Алгебра і початки аналізу”. Він дозволяє забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з врахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутрішні і міжпредметні зв'язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики. Другий підхід запобігає великим перервам у вивченні окремих предметів.

Таким чином, послідовність тем – головних структурних елементів навчального матеріалу курсу “Математика” – забезпечує розгляд усіх змістових ліній курсу у відповідності до Державного стандарту, створює умови для реалізації рівневої диференціації навчання.

Навчальний процес у старшій школі потребує і робить можливим використання специфічних форм та методів навчання. Можливість їх використання зумовлена віковими особливостями старшокласників, набутими в основній школі навичками самостійної роботи, рівнем розвинення загальнонавчальних і пізнавальних видів діяльності.

У старших класах може широко застосовуватися лекційно-семінарська форма проведення занять, причому не час від часу, а досить регулярно.

Реалізація рівневої диференціації на практичних заняттях є однією з головних умов ефективності навчання.

Особливістю практичних занять має бути постійне залучення учнів до самостійної роботи. Доцільно спільно обговорити ідею та алгоритм розв’язання певного класу задач. Після цього кожен учень може виконувати запропоновану систему вправ, спілкуючись із вчителем.

Важливим засобом навчання можуть стати контрольні запитання і тестові завдання, які спрямовані не на відтворення означень, фактів, формул, а на з’ясування елементів та структури означень математичних об’єктів; їх місця в системі інших понять; операцій, які можна виконувати з об’єктом; його особливостей та властивостей; окремих винятків та тонкощів. Подібні контрольні запитання стимулюють продуктивне мислення учнів, сприяють неформальному засвоєнню теоретичного матеріалу, формують навички порівняння, класифікації, узагальнення, застосування математичних понять і об’єктів.

Обов’язковим елементом технології навчання має бути постійна діагностика навчальних досягнень учнів. Вивчення кожної теми слід починати з виконання діагностичної роботи, що дає змогу встановити залишковий рівень володіння матеріалом попередньої теми. За результатами діагностичної роботи виявляються прогалини у підготовці учня, його досягнення, що допомагає спрямувати зусилля його та викладача на поліпшення стану справ.

Значне місце у технології навчання повинен посідати тематичний контроль навчальних досягнень як засіб управління навчальним процесом. До кожної теми система контролю може складатися з тематичної контрольної роботи, яка, як правило, має сюжетний характер, специфічного навчально-контролюючого засобу – теоретичної контрольної роботи, виконання тесту.

Обов’язковим елементом навчання повинно стати індивідуальне завдання з теми. Його варто пропонувати на завершальному етапі вивчення теми для самостійного опрацювання після всіх контролюючих заходів. Мета завдання – охопити матеріал теми в цілому, привернути увагу до головного, дати додаткові приклади і пояснення окремих складних моментів, підкреслити особливості й тонкощі, переконати учнів у можливості розв’язання задач основних типів. Індивідуальні завдання перевіряються, оцінюються вчителем та захищаються учнем.

Варто планувати виконання індивідуальних завдань, які передбачають ознайомлення як з розвитком математики в історичному аспекті (наприклад, з теми “Скільки існує геометрій?”) так і змістовних (“Перспектива”, “Математика і соціологія”).

Одним із ефективних засобів удосконалення навчання взагалі, в старшій школі в особливості, є модульне проектування навчального процесу, яке передбачає, що одиницею виміру навчального процесу є не урок, а певна сукупність уроків, яка охоплює логічно пов’язаний блок навчальних питань теми.

1.2. Аналіз дидактичної, психологічної та методичної літератури по темі дослідження

Ефективність навчання математики залежить від багатьох факторів, з-поміж яких психологічні і педагогічні домінують, причому психологічні компоненти складають основу педагогічних і є для них визначальними.

До психологічних факторів навчання належить вікові та індивідуальні особливості учнів (відчуття, почуття, воля, увага, сприймання, пам’ять, мислення, уява тощо), змістові особливості навчального матеріалу, а також психологія педагогічної взаємодії між усіма складовими навчання.

Методика математики тісно пов’язана із психологією. Психологія – це основа методики, без неї методика стає безпредметною. Адже не можна говорити про раціональні методи навчання учнів, не знаючи їх психологічних особливостей: як вони сприймають, запам’ятовують, думають, пригадують, що їх цікавить, що стомлює. Будь-яка спроба розв’язати те або інше конкретне питання методики математики без урахування відомостей з психології приречена на невдачу [26].

Багато спільного має методика математики із педагогікою, особливо з дидактикою. Дидактика розглядає процесс навчання в цілому, в ній досліджуються мета, зміст, методи навчання всіх шкільних предметів. Ці ж самі питання розглядаються і в методиці математики, тільки вужче, стосовно до особливостей і потреб викладання математики, або дидактикою математики. Однак в офіційних документах таких назв немає.

Вітчизняна психологія має значний досвід вирішення проблеми оптимізації учбової діяльності учнів: це, зокрема, теорія поетапного формування розумових дій, концепція розвитку теоретичного мислення учнів у процесі навчання [25], теорія системного та планомірного формування прийомів розумової діяльності [26], вчення про умови розвитку особистості в процесі навчання, формування особистості учня як суб'єкта пізнавальної діяльності, спрямованої на розвиток теоретичного мислення школярів [25] та багато інших.

У системі психолого-педагогічних засобів навчання учнів математики і досі не розділено прийоми організації процесу засвоєння, адекватних змістові тих понять, які передбачені існуючою програмою навчання з математики. Необхідність розробки таких прийомів, які б забезпечили повноцінне засвоєння учнями основних математичних понять, зокрема тих, що стосується координат і векторів, і становить проблему нашого дослідження.

У психологічній науці проблема засвоєння знань була і залишається предметом інтенсивного вивчення в межах різних наукових напрямків [26].

Засвоєння теоретичних понять з теми «Координати та вектори в просторі» найбільш ефективно здійснюється в умовах повноцінної учбової діяльності, коли змістом її є саме теоретичні знання. Така діяльність має місце тоді, коли активність учня спрямована не тільки на одержання конкретного результату, а й на оволодіння загальними способами дій, що приводять до цього результату.

У праці С.Д. Максименка показано, що дії можуть бути узагальненими у формі наукового знання, зокрема у формі теоретичного поняття. Успішність засвоєння способу дій залежить від типу задачі, яку розв'язує учень (практична, учбова).

Згідно з концепцією В.В. Давидова, справді наукові поняття, формування яких має бути провідною метою шкільного навчання, можуть бути засвоєні лише завдяки аналізу предметно-матеріальних умов їх походження. У такому разі засвоєння понять відбувається, на наш погляд, на найвищому, теоретично-генетичному рівні. Так, наприклад, при введенні понять декартова система координат та вектори в просторі доцільно пояснити необхідність введення цих понять та навести приклади, що допоможуть це усвідомити.

Сприймання математичної моделі нероздільно пов'язане з розумінням її побудови. Необхідно, щоб учень, сприймаючи модель, досягав розуміння того, що в ній відображається. Унаочнене сприймання моделі передбачає участь мислення в цьому процесі, активне використання набутих теоретичних знань, акумульованого досвіду. Навчальні моделі орієнтують школярів на активне оперування поняттями. Тому при вивченні теми «Координати та вектори в просторі» варто постійно наводити приклад із життя, в тому числі на основі предметів, що нас оточують. Зокрема, моделювання задач вимагає від суб'єкта творчої активності і розвиває творче математичне мислення. Це, на нашу думку, є дуже доцільним, оскільки сприяє кращому усвідомленні учнями вивченого матеріалу.

Теоретичний аналіз психологічної літератури дав змогу виділити наступні складові діяльності засвоєння математичних понять:

- ✓ оволодіння значення математичного поняття;
- ✓ оволодіння способами математичних дій з поняттями;
- ✓ моделювання поняття;
- ✓ відтворення математичних понять.

На сучасному етапі освіти збільшується об'єм і складність навчальних програм, прискорюється темп навчання, змінюється освітні технології. Тому в методиці навчання математики, геометрії зокрема, існує ціла низка протиріч між: величезним досвідом, накопиченим традиційним, проблемним навчання і неспроможністю у цих межах подолати сучасні проблеми виховання самобутньої, самостійної, творчої особистості дитини; наявністю шляхів їх реалізації у шкільній практиці.

Розглянемо далі методичну літературу, що стосується теми дослідження. Варто відмітити роботу В. І. Мішина, в якій присвячено цілий розділ методиці вивчення геометрії. Автор дає детальну характеристику методу координат, методу геометричних перетворень та векторному методу, які, за словами автора, займають особливо важливе місце і тісно пов'язані між собою. Також він розповідає про історію виникнення прямокутних координат та вектора та наводить приклади розв'язання деяких задач; і те і інше, на нашу думку, допоможе вчителю під час підготовки до відповідного уроку.

Автор наголошує, що багато спеціалістів із різних галузей знань мають уявлення про прямокутні декартові координати, оскільки ці координати дають можливість наочно-геометрично за допомогою графіка зобразити залежність однієї величини від другої.

«Область застосування координатного методу в геометрії досить велика. Сила методу координат в його алгоритмічності: на відміну від так званого синтетичного методу, що грунтується на безпосередньому розгляді даних фігур і їх співставленні, при якому кожна задача потребує особливого підходу, метод координат зводить геометричні задачі до алгебраїчних, які по своїй природі краще алгоритмуються, тобто приводять до послідовності обчислень. Геометрія, в якій основними засобами є метод координат і методи елементарної алгебри, називається аналітичною. Цінне значення аналітичної геометрії полягає в першу чергу в тому, що вона встановила тісний зв'язок між геометрією та алгеброю». Справді, саме завдяки координатному методі можна набагато скоротити розв'язування деяких задач, і навіть доведення теорем, оскільки інколи це простіше зробити аналітичним методом, ніж синтетичним.

В посібнику подано характеристику різних підручників та місце координат в них, звертається увага на використання методу координат при побудові шкільного курсу математики, зокрема при розв'язуванні геометричних задач.

Зокрема тут наголошується, що вперше координати з'являються в школі в 5-6 класах при вивченні алгебраїчного матеріалу: зображення чисел на прямій, координати точки, формула відстані між двома точками з заданими координатами, прямокутна система координат на площині, абсциса і ордината точки. В підручнику О.В. Погорєлова [20] координати займають одне з центральних місць. Учні знайомляться з двома важливими формулами: формулою для знаходження координат середини відрізка при умові, що координати кінців відрізка відомі; формулою для знаходження відстані між двома точками з заданими координатами [11].

М.В. Гриньова розглянула трактування поняття вектора в різних підручниках, операції над векторами, а також застосування векторів до доведення теорем і розв'язування задач.

В посібнику наголошується, що одним із фундаментальних понять сучасної математики є вектор. Еволюція цього поняття здійснювалась завдяки широкому використанню цього поняття в різних областях математики, механіки, а також в техніці.

В математиці в теперішній час на векторній основі викладаються лінійна алгебра, аналітична та диференціальна геометрія. З поняттям векторної величини учні вперше знайомляться в курсі фізики. Зокрема учням говорять, що сила – це векторна величина. Саме тому в них зазвичай складається неправильне уявлення про те, що вектор – поняття фізичне. Між цим вектор – поняття математичне, яке знаходить застосування в фізиці та інших прикладах науках і яке дозволяє спростити розгляд деяких питань, а також розв'язування задач цих наук [11].

М.В. Гриньова зазначає, що вже на перших уроках фізики в 8 класі виклад матеріалу ведеться з широким застосуванням векторного апарату. Зрозуміло, що все це змушує задуматися перш за все над тим, як найбільш природно ввести в курс математики поняття вектора. Відомо, що існують різні підходи до введення цього поняття.

Методика розв'язування задач виділяє евристики: що потрібно довести на геометричній мові і що достатньо довести на векторній мові. В посібнику подані такі методичні рекомендації: векторний метод за значимістю можна зрівняти з методом складання рівнянь. Оскільки цей метод є новим для учнів, необхідно:

а) зацікавити учнів, показавши їм ефективність його використання на спеціально підібраних задачах;

б) навчати учнів деяким евристикам, які можуть створити в них навики в його застосуванні;

в) навчати цьому методу на достатньо простих задачах, не відволікаючи уваги на складності чисто геометричного змісту.

Слід зазначити, що векторний метод не є універсальним, до розв'язування деяких задач він не застосовується або малоефективний [11].

Для нас цей посібник є методично цінним, оскільки в ньому найбільш повно та ґрунтовно висвітлені питання методики вивчення координат і векторів.

В посібнику [3] викладені питання методики навчання математики в загальноосвітніх школах.

Варто наголосити на тому, що в посібнику подано вступні зауваження, де розкрито різні підходи щодо означення поняття вектора.

В пропонованому посібнику головна увага приділяється ефективним методам навчання, що орієнтована на досягнення навчальної, розвивальної і виховної мети навчання математики. Багато уваги приділяється психолого-дидактичним основам, різним застосуванням теоретичних знань.

Система викладу курсу методики в посібнику дає можливість висвітлити різні варіанти методики викладання теми «Координати та вектори в просторі», залишаючи за вчителем право вибору того чи іншого методичного підходу в конкретній ситуації.

Методика вивчення поняття вектора викладена коротко за таким планом:

1. Про різні означення поняття «вектора»;
2. Методика введення поняття «вектор»;
3. Методика вивчення додавання векторів;
4. Методика вивчення множення вектора на число;
5. Вектори в курсі стереометрії.

Автори посібника дидактично обгрунтували необхідність та важливість вивчення теореми про розклад вектора по трьох некомпланарних векторах, яка є основою побудови координат в просторі.

Автори наголошують, що означення вектора як направленного відрізка хоч найбільш розповсюджене, але його не можна назвати математично коректним. Саме тому, тут звертається особлива увага на різні підходи до означення поняття «вектор» і віддається перевага означенню, що саме паралельне перенесення необхідно вважати вектором, оскільки паралельне перенесення характеризується напрямом і довжиною. Відповідно до такого означення і будується виклад наступного матеріалу, зокрема зміст теми «Вектори» включають наступні питання: перетворення; вектори та способи їх задання; вектор як частковий випадок перетворення; додавання векторів; колінеарні вектори; протилежний вектор; віднімання векторів; множення вектора на число; основні закони векторної алгебри; векторні величини в фізиці.

Автори посібника [23] знайомлять з конкретними прийомами навчання при викладенні теми «Координати та вектори в просторі», які, на нашу думку, є досить вдалими і корисними для вчителя математики.

Отже, дидактичної та методичної літератури в наш час є досить багато. В основному автори методичної літератури [3], [12] пропонують вивчати координати і вектори за допомогою традиційної методики, деякі автори, зокрема автори методичної літератури [24] приділяють увагу проблемному методу навчання.

Проаналізувавши багато наукових видань, можна зробити висновок, що для вчителів математики існує багато літератури, яка в наші дні постійно поповнюється новими матеріалами. Проте, існує дуже мало джерел, які б орієнтувалися на нову програму та діючі підручники. Саме тому існує потреба в розробці нової методики, яка б задовольняла вирішенню цих проблем.

1.3. Аналіз підручників щодо викладу даної теми

Як відомо, в процесі навчання підручники виконують двоєдину функцію: є джерелом навчальної інформації та виступає засобом навчання, за допомогою якого здійснюється організація освітнього процесу. Зміст і результати навчання визначаються державним загальноосвітнім стандартом.

У програмах перелічується розділи і теми, кількість годин на їх вивчення. Докладний зміст навчального матеріалу шкільного курсу математики міститься в підручниках і навчальних посібниках. Підручник – це навчальне видання, в якому міститься системний виклад певної навчальної дисципліни або її розділу чи частини. Воно має відповідати навчальній програмі і бути офіційно затверджене як даний вид видання. До підручників ставлять такі вимоги:

1. Сприяти формуванню наукового світогляду, розвивати логічне мислення, давати систематичний, науково обґрунтований, доступний для учнів даного віку виклад основних теоретичних знань з математики.
2. Мати достатню кількість різноманітних задач і вправ, розміщених в доцільній з методичної точки зору послідовності.

Підручники з математики постійно змінюються та вдосконалюються. Однак залишається питання чи вирішено питання викладу матеріалу в контексті розбудови освіти на нових фундаментальних і прогресивних концепціях, зокрема рівневого навчання.

Щороку Міністерство освіти і науки України затверджує перелік літератури для використання в навчальному процесі, зокрема це підручники [2], [3].

Розглянемо підручник математика 11 клас авторів О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко [2]. Навчальний матеріал в даному підручнику представлено на рівні стандарту.

Підручник для 11-го класу складається із семи розділів. Кожному розділу передує матеріал, що вивчався раніше і необхідний для вивчення цього розділу. Його подано у вигляді таблиць. Для забезпечення готовності до вивчення матеріалу розділу наводиться діагностичний тест.

Розділи підручника поділено на параграфи, які, в свою чергу, розчленовані на пункти. До кожного пункту подано контрольні запитання, що мають забезпечити активне засвоєння основних понять і фактів пункту в їхньому взаємозв'язку.

Викладення навчального матеріалу в кожному пункті структуроване за рівнями. На першому рівні (його позначено літерою Б) викладаються основні поняття та факти теми, хоча, найчастіше, без формальних доведень. Цей матеріал є базою для подальшого вивчення теми, більш ґрунтовного і повного.

На другому рівні (його позначено літерою О) наводиться більш повне обґрунтування попереднього матеріалу, його розширення, наводяться приклади його застосування. Матеріал на цих двох рівнях повністю забезпечує оволодіння предметом згідно з вимогами програми рівня стандарту.

Виклад теоретичного матеріалу супроводжується розв'язанням типових задач відповідного рівня. Початок і кінець доведення тверджень розв'язань прикладів позначено відповідними знаками.

Система задач і вправ, наведених у підручнику, має три рівні складності: перший рівень складності позначено символом «°», другий не має позначень, третій позначено символом «*».

До загальної системи задач включено вправи на повторення, що мають сприяти готовності до опанування наступним матеріалом, збереженню вмінь і навичок, сформованих при вивченні попередніх розділів.

Кожний розділ завершується матеріалом для підготовки до тематичного оцінювання, який складається із запитань для самоконтролю (з відповідями) та зразка тематичної контрольної роботи. Для повторення і систематизації навчального матеріалу розділу наведено відповіді таблиці. Кожен із розділів завершується історичним коментарем.

Підручник містить вказівки і відповіді до задач, а також предметний покажчик.

Вивченню координат і векторів присвячено Розділ II «Вектори і координати». Даний розділ містить два параграфи:

1. Вектори та їх застосування.

2. Координати та їхнє застосування.

Кожен з цих параграфів поділяється на пункти.

Параграф «Вектори та їх застосування» містить наступні пункти:

1. Вектори в просторі.
2. Дії над векторами.
3. Розкладання вектора на складові.

Параграф «Координати та їхнє застосування» містить такі пункти:

1. Прямокутні координати.
2. Дії над векторами, що задані координатами.
3. Основні формули методу координат.
4. Рівняння фігур.

У параграфі «Вектори та їх застосування» систематизовано відомості про вектори на площині й узагальнено їх на випадок простору, а також розглянуто деякі застосування векторного числення у фізиці та в геометрії.

У даному параграфі вводяться поняття вектора, модуля вектора, колінеарність векторів, розглядаються дії над векторами, розкладання вектора на складові, в кінці параграфа містяться задачі для самостійного розв’язання.

У параграфі «Координати та їхнє застосування» вводяться поняття координат точки та розглядається необхідність введення третьої координати; вводиться поняття прямокутної системи координат та її елементів; розглядаються дії над векторами, що задані координатами, основні формули методу координат та рівняння фігур.

Проаналізувавши даний підручник, слід зазначити, що теоретичний матеріал з теми «Координати та вектори в просторі» поданий досить змістовно, структурований на параграфи. Матеріал доступний для сприймання та в ньому наявна велика та різноманітна кількість задач на закріплення.

Отже, цей підручник може бути використаний в навчальному процесі для шкіл з вивченням математики рівня стандарту.

Розглянемо підручник для 11 класу [3]. Навчальний матеріал в даному підручнику представлено на рівні стандарту.

Матеріал у підручнику поділено па розділи, які в свою чергу поділяються на параграфи.

У кожному параграфі є теоретичний матеріал і задачі. Читаючи теорію, основну увагу слід звертати на слова, надруковані курсивом. Курсивом виділено терміни (наукові назви) понять. Потрібно вміти пояснювати їх зміст, наводити їх приклади. Щоб перевірити, як засвоєно матеріал параграфа, повторити його допоможуть запитання рубрики «Перевірте себе», які є після кожного параграфа. У рубриці «Виконаємо разом» наводяться задачі з розв’язаннями. Перш ніж виконувати домашнє завдання, краще переглянути їх.

Завдання, рекомендовані для домашньої роботи, виділені кольором. Задачі і вправи в підручнику поділено на: «Виконайте усно», рівень А, рівень Б і «Вправи для повторення». В загальному, цей підручник не розрахований на чотири рівні складності.

У кожному розділі є задачі за готовими малюнками. Умови таких задач подано малюнками і короткими записами.

Для узагальнення і систематизації вивченого матеріалу подано «Головне в розділі».

Тема «Координати та вектори в просторі» розглядається в розділі 5, який поділяється на 3 параграфи, а саме:

§24 «Координати в просторі»

§25 «Вектори в просторі»

§26 «Застосування векторів »

Розглянемо більш детально дані параграфи.

У §24 «Координати в просторі» вводиться поняття координат точки та розглядається необхідність введення третьої координати; вводиться поняття прямокутної системи координат та її елементів; вводиться поняття відстані між двома точками та про координати середини відрізка.

У §25 «Вектори в просторі» вводиться поняття вектора на основі знань учнів про вектор на площині; розглядаються операції над векторами та їх властивості; вводиться поняття рівних векторів між собою та колінеарних векторів; розглядається ознака колінеарності двох векторів.

У §26 «Застосування векторів » розглядається можливість за допомогою координат та векторів розв'язувати багато цікавих і важливих задач з фізики, астрономії, та інших прикладних наук; розглядають скалярний добуток двох ненульових векторів; демонструється спосіб застосування векторного методу.

В кінці розділу міститься задачі для самостійного розв'язування.

Проаналізувавши даний підручник, слід зазначити, що теоретичний матеріал висвітлено в достатньому обсязі і є зрозумілим для сприймання учнями.

Проаналізувавши підручники, де викладено навчальний матеріал з теми «Координати та вектори в просторі», можна зробити висновки, що дана тема висвітлена в різних підручниках по-різному. Тому існує необхідність у створенні методики навчання даної теми, а особливо дидактичних матеріалів та задачного матеріалу, за допомогою якого учитель зможе об’єктивно оцінити знання та навчальні досягнення учнів.

Розділ 2. Методика вивчення координат і векторів у шкільному курсі стереометрії.

2.1. Методика вивчення декартових координат в просторі

В пропедевтичному плані з декартовими координатами учні вперше ознайомлюються на початку 6 класу. Там вводять поняття «система координат», «початок координат», «координатна площина», «координата точки», «абсциса», «ордината», «вісь абсцис», «вісь ординат». Детальніше розглядають ці самі поняття в курсі алгебри під час вивчення графіків функцій та в 9 класі при вивченні однойменної теми в курсі геометрії. Отож коли на уроках стереометрії учні приступають до вивчення декартових координат в просторі, з більшістю понять, пов’язаних з цією темою, вони уже знайомі. Залишається тільки повторити відповідний матеріал, звести все в систему і наголосити, що декартові координати відіграють важливу роль не тільки в алгебрі, а і в геометрії. Аналізуючи діючі підручники з геометрії (рівень стандарту) для 11 класу, ми вирішили, розробляючи методику, орієнтуватись на підручник [2].

<u>ОРІЄНТОВНЕ КАЛЕНДАРНО_ТЕМАТИЧНЕ ПЛАНУВАННЯ</u>

11 клас. ГЕОМЕТРІЯ

Рівень стандарту

(2 години на тиждень, усього – 50 годин)

№ уроку	Тема уроку	Мета уроку
1.	Прямокутні координати в просторі	Сформувати поняття прямокутної системи координат у просторі; сформувати вміння визначати положення точки в просторі за її координатами та визначати координати точки в просторі
2.	Відстань між двома точками	Домогтися засвоєння формули для обчислення відстані між двома точками простору, якщо відомі їх координати; сформувати вміння розв’язувати задачі, що передбачають використання цієї формули

3.	Координати середини відрізка	Домогтися засвоєння формули для знаходження координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців; сформувати вміння використовувати цю формулу для розв’язування задач
4.	Вектори у просторі	Сформувати поняття вектора в просторі, рівних векторів, координат вектора; домогтися засвоєння формули для обчислення довжини (модуля) вектора; сформувати вміння розв’язувати задачі, що передбачають використання цих понять
5.	Дії над векторами.	Сформувати вміння будувати вектор, що дорівнює сумі та різниці векторів; домогтися засвоєння правил трикутника, паралелограма, паралелепіпеда знаходження суми векторів; засвоєння формул, за якими виконують додавання, віднімання, множення вектора на число; сформувати вміння виконувати розкладання вектора на складові
6.	Скалярний добуток векторів. Кут між векторами	Сформувати поняття скалярного добутку векторів, кута між векторами у просторі; домогтися засвоєння властивостей скалярного добутку векторів, формули для обчислення скалярного добутку векторів і кута між векторами, умови перпендикулярності векторів; сформувати вміння розв’язувати задачі, що передбачають використання цих понять і формул
7.	Контрольна робота	Перевірити рівень засвоєння знань і вмінь учнів із теми « Координати та вектори у просторі»

Метод координат в просторі є логічним продовженням координатного методу на площині. Тому при вивченні методу координат в просторі доцільно по мірі введення нових понять повторювати відповідні поняття з курсу планіметрії.

Розглянемо детально методику вивчення координат і векторів.

Урок 1. <u>Прямокутні координати в просторі</u>

Мета уроку:

Домогтися засвоєння учнями:

- ✓ Поняття прямокутної системи координат у просторі;
- ✓ Назви координатних осей у просторі;

Сформувати вміння:

- ✓ Відтворювати зміст вивчених понять;
- ✓ Визначати положення точки в просторі за її координатами;
- ✓ Визначати координати точки в просторі;

Спочатку вводимо поняття координатних осей.

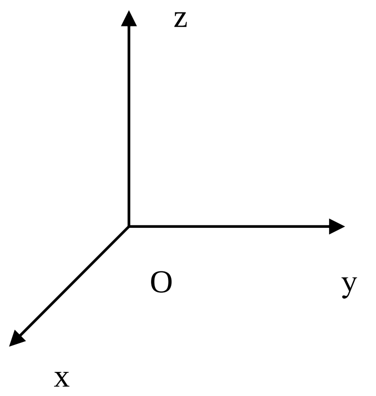
<u>Вчитель.</u> Прямокутна система координат на площині розглядалась в попередніх класах. Кожній точці площини ставиться у відповідність два числа x і y, які називаються координатами точки, і навпаки: кожній парі чисел х та у можна поставити у відповідність лише одну точку площини.

Проте інколи в житті трапляються задачі, в котрих координати точки на площині виявляється недостатньо. Справді, положення літака в повітрі не визначається тільки «наземними» координатами його проекції на поверхню землі (довготою та широтою). Необхідно знати ще й висоту над поверхнею землі. Ця та інші просторові ситуації наводять на думку про введення додаткової координатної осі для задання точок простору за допомогою чисел. Отже, завданням цього уроку є засвоєння поняття прямокутної системи координат у просторі, формування вміння визначати положення точки в просторі за її координатами та координати точки в просторі.

<u>Вчитель.</u> Аналогічну систему координат можна ввести і для простору.

<u>Вчитель.</u> При побудові прямокутної системи координат у просторі через деяку його точку О (початок координат) проводять три попарно

перпендикулярні напрямлені прямі (координатні осі) з однаковим масштабом вимірювань (мал. 1).



Мал. 1

Першу вісь називають віссю *x*, або віссю абсцис, другу – віссю *y*, або віссю ординат, третю – віссю *z*, або віссю аплікат.

Площина що проходить через осі *x* та *y*, позначається *xy*. Аналогічно вводять площини *xz*, *yz* і називають їх координатними.

<u>Вчитель.</u> Основу для введення координат у просторі, як і на площині, становить поняття координати точки на координатній прямій, тобто відстань точки від початку координат, узятої зі знаком «+», якщо точка лежить на промені, що визначає напрям осі, або зі знаком «-» – в іншому випадку.

<u>Вчитель.</u> Координати довільної точки простору визначаються за допомогою проекції цієї точки на осі. Проекції точки M на координатні осі є точками перетину осей координат із площинами, що проходять через точку M паралельно координатним площинам. Наприклад, проекція M_y точки M на вісь y є точкою перетину осі y з площиною, що проходить через точку M паралельно площині *xz*.

Координати проекцій точки M на основі координат, взяті за порядком нумерації осей, утворюють упорядковану систему трьох чисел. Цю трійку чисел називають прямокутними координатами точки M. Те, що точка M простору має координати (x; y; z), позначають M(x; y; z).

Координатами точки простору є взяті з певним знаком відстані від цієї точки до координатних площин.

Вчитель. Нагадаємо, що координатні осі на площині ділять її на чотири частини – координатні кути, чи квадранти. Координатні площини ділять простір на вісім частин, які називаються октантами. Ці частини простору визначаються, як і квадранти на площині, знаками відповідних координат.

У прямокутній системі координат на площині кожній точці відповідає упорядкована пара чисел – її координати, і навпаки, кожній упорядкованій парі відповідає певна точка площини. Така ж відповідність існує між упорядкованими трійками чисел і точками простору, в якому задана прямокутна система координат. Ця відповідність дає змогу ототожнювати точки з упорядкованими наборами чисел. І далі часто замість слів «точка, координати якої (x; y; z)» будемо вживати більш коротке: «точка (x; y; z)».

Розв'язування задач на закріплення.

І рівень

1. Дано точки A(0; 3; 1), B(-2; 0; 0), C(0; 0; 4), D(0; -3; 0). Які з них лежать:

а) на осі x; б) на осі z; в) у площині xy; г) у площині yz?

Вчитель. Як визначити, якій осі або площині належить та чи інша точка?

Учні. Якщо одна з координат дорівнює нулю, то точка лежить в площині, що відповідає координатам, відмінних від нуля. Якщо дві координати дорівнюють нулю, то точка лежить на осі, що відповідає координаті, відмінній від нуля.

Вчитель. Тоді у нашій задачі, якою буде відповідь?

Учні. а) точка B; б) точка C; в) серед перелічених таких точок немає; г) точка A.

2. Дано точку K(2; -3; 1). Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із точки K на координатні площини.

Вчитель. Як знайти координати основи перпендикуляра, опущеного з точки на координатну площину?

Учні. Потрібно координату даної точки, яка не належить цій площині замінити на нуль.

Вчитель. Тепер знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із точки K нашої задачі на координатні площини.

Учні. На площину ху координати будуть такими: K_{xy} = (2; -3; 0), на площину xz - K_{xz} = (2; 0; 1), на площину yz – K_{yz} = (0; -3; 1).

3. Тетраедр ABCD задано координатами вершин: A(2; 0; 3), B(-1; 0; 2), C(4; 0; -1), D(1; 3; 1). У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

Учні. Оскільки ординати точок A, B, і C дорівнюють нулю, то основа ABC тетраедра лежить в координатній площині xz.

II рівень

4. Знайдіть координати точок, які віддалені від кожної з координатних площин на 4.

Учні. Оскільки дані точки рівновіддалені від кожної з координатних площин на однакову відстань, то вони матимуть наступні координати: (4; 4; 4) та (-4; -4; -4).

5. На кожній з координатних площин знайдіть точку, відстань від якої до точки M(-1; 2; -3) є найменшою.

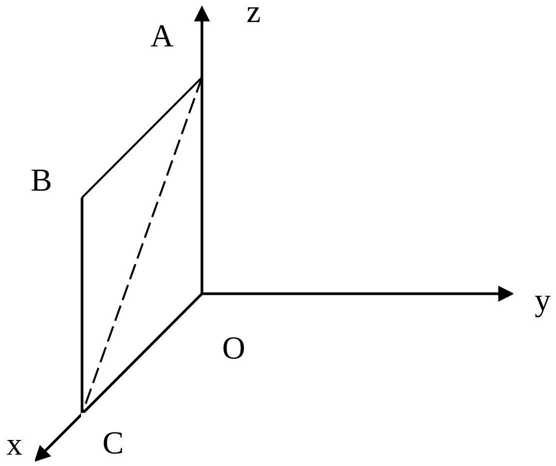
Вчитель. Що є найкоротшою відстанню від точки до площини?

Учні. Найкоротшою відстанню від точки до площини є перпендикуляр, опущений з даної точки на площину.

Вчитель. Але ж коли ми шукаємо координати точки, то ми теж опускаємо перпендикуляри на координатні площини. То чим будуть шукані точки і які координати вони матимуть?

Учні. Шукані точки будуть основами перпендикулярів, опущених на відповідні координатні площини. Тож на площині ху це буде точка (-1; 2; 0), на площині xz – (-1; 0; -3) та на площині yz – (0; 2; -3).

6. Діагональ квадрата OABC дорівнює $\sqrt{2}$ (мал. 2). Знайдіть координати його вершин.



Мал. 2

Вчитель. Як ми можемо знайти координати вершин квадрата?

Учні. Якщо розглянути трикутник AOC (прямокутний), то бачимо, що якщо ми знайдемо довжини катетів, то зможемо знайти координати вершин квадрата. А катети ми можемо знайти за теоремою Піфагора, і більше того, вони рівні як сторони квадрата:

$OA^2 + OC^2 = AC^2$,

$2OC^2 = 2$,

$OC^2 = 1$,

$OC = OA = 1$.

Отже, вершини квадрата мають наступні координати: A(0; 0; 1), B(1; 1; 1), C(1; 0; 0), O(0; 0; 0).

III рівень

7. Точки A(0; 0; 0), B(b; 0; 0), C(0; c; 0) і D(0; 0; h) – вершини паралелепіпеда. Знайдіть координати решти його вершин.

Вчитель. Спочатку побудуємо дані точки.

Учні. Будують точки.

Вчитель. Тепер спробуємо добудувати до паралелепіпеда.

Учні. Оскільки прямий паралелепіпед однозначно визначається своїми лінійними вимірами, а вони в нас є, то ми, користуючись тим фактом, що в просторі паралельність прямих зберігається, можемо побудувати шуканий паралелепіпед.

Вчитель. Отже, маючи малюнок визначимо координати решти його вершин.

Учні. Оскільки точка B_1 належить площині xz, то вона матиме такі координати: $B_1(b;\ 0;\ h)$; C_1 належить площині yz, то вона матиме наступні координати: $C_1(0;\ c;\ h)$; точка D_1 належить площині xy, то вона матиме наступні координати: $D_1(b;\ c;\ 0)$; а точка A_1 не належить жодній з площин, тому її координати: $A_1(b;\ c;\ h)$.

IV рівень

8. Зображено куб $ABOCA_1B_1O_1C_1$, $OA_1 = 2\sqrt{2}$. Знайдіть координати вершин цього куба.

Вчитель. Що нам потрібно знати, щоб знайти координати вершин куба?

Учні. Нам потрібно знати довжину ребра куба.

Вчитель. А який зв'язок між діагоналлю паралелограма, а зокрема куба, та його ребрами?

Учні. Квадрат діагоналі паралелепіпеда дорівнює сумі квадратів його лінійних вимірів. Тому маємо:

$$OA_1^2 = OO_1^2 + O_1B_1^2 + O_1C_1^2 = 3OO_1^2,\ 3OO_1^2 = 8,\ OO_1^2 = \frac{8}{3}, OO_1 = 2\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

А тепер за малюнком запишемо координати вершин куба:

$O(0;\ 0;\ 0)$, $O_1(0;\ 0;\ -2\sqrt{\frac{2}{3}})$, $B(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0;\ 0)$, $B_1(2\sqrt{\frac{2}{3}};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0)$, $A(2\sqrt{\frac{2}{3}};2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0)$, $A_1(2\sqrt{\frac{2}{3}};2\sqrt{\frac{2}{3}};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}})$, $C(0;\ 2\sqrt{\frac{2}{3}};\ 0)$, $C_1(0;\ 2\sqrt{\frac{2}{3}};\ -2\sqrt{\frac{2}{3}})$.

Підсумок уроку

Вчитель. Отже, на сьогоднішньому уроці ми вивчили тему «Прямокутні координати в просторі». Ми плідно попрацювали та добре засвоїли нові знання. (Виставляє оцінки учням).

Урок 2. Відстань між двома точками простору.

Мета: вивести формулу для знаходження відстані між двома точками в просторі, заданими координатами; сформувати вміння застосовувати цю формулу для розв'язання задач.

Вчитель. Як знайти периметр трикутника АВС, якщо його вершини лежать у координатній площині і мають координати: $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$, $C(x_3;y_3)$?

Учні. Для розв'язання цієї задачі треба спочатку знайти довжини відрізків, які є сторонами трикутника АВС, скориставшись формулою відстані між двома точками на площині: $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$, а потім знайти суму довжин цих відрізків.

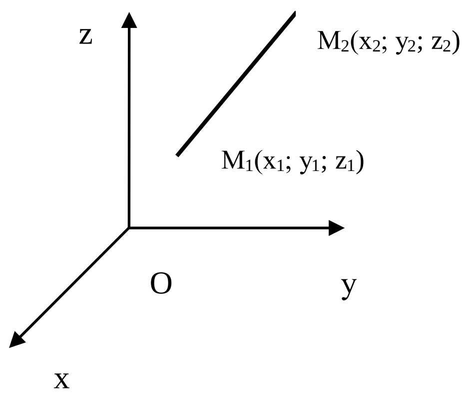
Вчитель. Знайдіть відстань між точками, які лежать на координатній площині:

A(1;2), B(-7;9); A(5;-1), B(5;3). Учні розв’язують вправи письмово.

Вчитель. А як знайти периметр трикутника АВС, якщо його вершини мають координати: A(1;2;6), B(-7;9;4); C(5;-1;2)?

Учні. Ми не знаємо, як розв’язати цю задачу, проте, можливо треба діяти аналогічно до попередньої задачі.

Вчитель. Тому саме дослідження можливості визначення відстані між двома точками через їхні координати в прямокутній системі координат у просторі ми займемося на сьогоднішньому уроці.



Мал. 3

Вчитель. Запишіть собі у зошити формулу для відшукання відстані між двома точками $M_1(x_1;\ y_1;\ z_1)$ і $M_2(x_2;\ y_2;\ z_2)$ в просторі: $d=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2}$ (мал. 3).

Вчитель. Давайте повернемось до задачі, котра постала перед нами на початку уроку (про периметр трикутника).

Учні. Самостійно розв'язують цю задачу в своїх зошитах, а після чого хтось з учнів коментує хід її розв'язання.

Розв'язування задач на закріплення.

І рівень

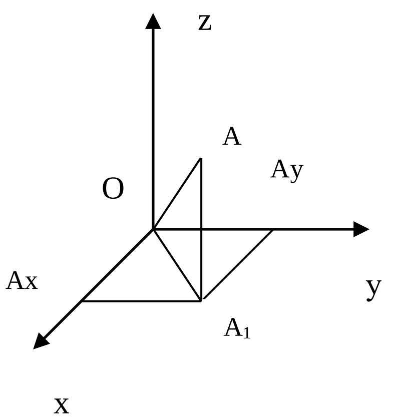
1. Дано точку A(3; 3; 3). Знайдіть відстань від неї до:

а) координатних площин; б) початку координат.

Вчитель. Що таке відстань до координатних площин?

Учні. Це довжина перпендикуляра опущеного з даної точки на координатну площину. Але координати точки – це теж є довжини відповідних перпендикулярів, опущених з даної на координатні площини. Тому шукані відстані будуть дорівнювати 3 (бо всі координати рівні).

Вчитель. Для того, щоб розв'язати пункту б) пропоную скористатися малюнком (мал. 4). Які пропозиції щодо відшукання відстані від точки A до початку координат?



Мал. 4

Учні. Розглянемо трикутник OA_xA_1, в якому $\angle\ OA_xA_1 = 90°$. За теоремою Піфагора: $OA_1\ =\ \sqrt{OA_x^2+A_1A_x^2}=\sqrt{9+9}=\sqrt{18}$. Тепер розглянемо трикутник OA_1A, в якому $\angle\ OA_1A = 90°$. За теоремою Піфагора:

ОА $= \sqrt{AA_1^2 + OA_1^2} = \sqrt{9+18} = \sqrt{18} = \sqrt{27} = 3\sqrt{3}$.

2. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в заданих точках:

а) M(2; 1; 0), N(3; 0; 1); б) K(0; 1; 0), T(-4; 14 3).

Вчитель. За якою формулою шукається довжина відрізка, заданого координатами своїх кінців?

Учні. Довжина відрізка, заданого координатами своїх кінців шукається за формулою: AB = $\sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$, A(x_A, y_A, z_A), B(x_B, y_B, z_B).

Вчитель. Тепер за цією формулою обчислимо довжини заданих відрізків.

Учні.

MN=$\sqrt{(3-2)^2 + (0-1)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 1^2} = \sqrt{3}$.

MK = $\sqrt{(-4-0)^2 + (1-1)^2 + (3-0)^2} = \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

II рівень

3. Яка з точок: A(2; 1; 5) чи B(-2; 1; 6) – лежить ближче до початку координат?

Вчитель. Що потрібно зробити, щоб визначити, яка з точок до початку координат. Яка з цих відстаней буде коротша, та й точка лежить ближче до початку координат. Знайдемо ці відстані:

$AC = \sqrt{(2-0)^2 + (1-0)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{2^2 + 1^2 + 5^2} = \sqrt{30}$.

$OB = \sqrt{(-2-0)^2 + (1-0)^2 + (6-0)^2} = \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 6^2} = \sqrt{41}$.

Оскільки OA<OB, то точка A лежить ближче до початку координат.

4. Дано точки A(1; 2; 3), B(2; 3; 1) і C(3; 1; 2). Знайти периметр трикутника ABC.

Вчитель. Що таке периметр трикутника?

Учні. Периметр трикутника – це сума довжин сторін трикутника.

Вчитель. Знайдемо довжини сторін трикутника.

Учні. $AB = \sqrt{(2-1)^2 + (3-2)^2 + (1-3)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$.

$AC = \sqrt{(3-1)^2 + (1-2)^2 + (2-3)^2} = \sqrt{4+1+1} = \sqrt{6}$.

$BC = \sqrt{(3-2)^2 + (1-3)^2 + (2-1)^2} = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$.

Тоді периметр буде дорівнювати:

P = AB + AC + DC = $\sqrt{6}+\sqrt{6}+\sqrt{6}=3\sqrt{6}$.

5. Чи є точки A(1; 2; 3), B(2; 3; 4), C(3; 4; 5) вершинами трикутника?

Вчитель. Що потрібно зробити, щоб визначити, чи є дані точки вершинами трикутника?

Учні. Потрібно перевірити виконання нерівності трикутника для пропонованих відрізків. Тому, перш за все, треба обчислити відстані між даними точками:

$$AB=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2+(4-3)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},$$

$$AC=\sqrt{(3-1)^2+(4-2)^2+(5-3)^2}=\sqrt{4+4+4}=\sqrt{12}=2\sqrt{3},$$

$$BC=\sqrt{(3-2)^2+(4-3)^2+(5-4)^2}=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3}.$$

Тепер перевіримо нерівність трикутника:

$\sqrt{3}+\sqrt{3}\leq 2\sqrt{3}$, проте нерівність $\sqrt{3}+2\sqrt{3}\leq\sqrt{3}$ не виконується, тому дані точки не є вершинами трикутника.

III рівень

6. Знайдіть координати точки, яка лежить на осі y і рівновіддалена від точок A(4; -1; 3) і B(1; 3; 0).

Вчитель. Якщо точка лежить на осі y, то які вона має координати?

Учні. Якщо точка лежить на осі y, то вона має наступні координати: X(0; y; 0).

Вчитель. Що означає «точка X рівновіддалена від точок A і B»?

Учні. Це означає, що відстані від точки X до точок A і B рівні.

Вчитель. Підсумовуючи сказане, як, на вашу думку, знайти невідому ординату точки X?

Учні. Знайдемо відстані між точками X та A і B та прирівняємо їх, оскільки вони рівні. Отримаємо рівняння від змінної y, розв'язавши яке, знайдемо невідому ординату точки X:

$$AX=\sqrt{(0-4)^2+(y+1)^2+(0-3)^2}=\sqrt{16+(y+1)^2+9}=\sqrt{25+(y+1)^2},$$

$$BX = \sqrt{(0-1)^2 + (y-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{1+(y-3)^2},$$

$25 + (y + 1)^2 = 1 + (y - 3)^2$.

$25 + y^2 + 2y + 1 – 1 – y^2 + 6y – 9 = 0$,

$8y = -16$,

$y = -2$.

Отже, точка X має координати X(0; -2; 0).

7. Доведіть, що точки A(-2; 0; 5), B(-1; 2; 3), C(1; 1; -3) і D(0; -1; -1) є вершинами паралелограма.

Вчитель. Яка властивість паралелограма допоможе нам у доведенні істинності твердження задачі?

Учні. Та властивість, що у паралелограма протилежні сторони рівні. Тож знайдемо відстані між заданими точками:

$$AB = \sqrt{(-1+2)^2 + (2-0)^2 + (3-5)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$CD = \sqrt{(0-1)^2 + (-1-1)^2 + (-1+3)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = 3,$$

$$BC = \sqrt{(1+1)^2 + (1-2)^2 + (-3-3)^2} = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41},$$

$$AD = \sqrt{(0+2)^2 + (-1-0)^2 + (-1-5)^2} = \sqrt{4+1+36} = \sqrt{41}.$$

Як бачимо протилежні сторони чотирикутника рівні, отже він паралелограм.

IV рівень

8. Установіть вид чотирикутника MNPK та знайдіть його площу, якщо: M(1; 1; 1), N(1; 0; 1), P(1; 0; 0), K(1; 1; 0).

Вчитель. Пропоную, як і в попередній задачі, обчислити відстані між точками.

Учні. $\mathrm{MN} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (1-1)^2} = \sqrt{0+1+0} = \sqrt{1} = 1,$

$$\mathrm{NP} = \sqrt{(1-1)^2 + (0-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\mathrm{PK} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{0+1+0} = \sqrt{1} = 1,$$

$$\mathrm{KM} = \sqrt{(1-1)^2 + (1-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+0+1} = \sqrt{1} = 1.$$

Як бачимо – всі сторони рівні, а отже даний чотирикутник є ромбом.

Вчитель. Так, вірно. Але пропоную додатково перевірити чи є даний ромб квадратом. Як це зробити?

Учні. Для цього потрібно перевірити, чи рівні діагоналі ромба, якщо так, то він є квадратом:

$$NK = \sqrt{(1-1)^2 + (1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2},$$

$$MP = \sqrt{(1-1)^2 + (0-1)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{0+1+1} = \sqrt{2}.$$

Як бачимо – діагоналі рівні, а отже даний ромб є квадратом.

Обчислимо його площу6

$S = a^2 = 1^2 = 1$.

Підсумок уроку

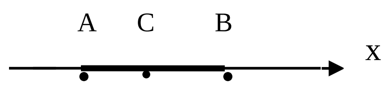
Вчитель. Отже, на сьогоднішньому уроці ми вивчили тему «Відстань між двома точками простору». Ми плідно попрацювали та добре засвоїли нові знання. (Виставляє оцінки учням)

Урок 3. <u>Координати середини відрізка</u>.

Мета: домагатися виведення формули для знаходження координат середини відрізка, якщо відомі координати його кінців; сформувати вміння використовувати цю формулу для розв'язування задач.

Для початку розглядають вправи на повторення матеріалу планіметрії.

<u>Вчитель.</u> Як знайти координату x середини відрізка, кінці якого лежать на координатній прямій (мал. 5)?



Мал. 5

<u>Учні.</u> $x_c = \dfrac{x_A + x_B}{2}$.

<u>Вчитель.</u> Знайдіть координату середини відрізка AB, якщо:

A(5), B(9); A(-3), B(7).

<u>Учні.</u> Коментують розв'язання і записують в зошити.

Підставивши значення координат відповідних точок, отримаємо:

$x_c = \dfrac{5+9}{2}$ =7; $x_c = \dfrac{-3+7}{2}$ =2.

<u>Вчитель.</u> Як знайти середини відрізка, кінці якого лежать у координатній площині?

<u>Учні.</u> $x_c = \dfrac{x_A + x_B}{2}$; $y_c = \dfrac{y_A + y_B}{2}$.

<u>Вчитель.</u> Знайдіть координати середини відрізка AB, якщо A(3;2), B(1;4).

<u>Учні.</u> Коментують розв'язання і записують в зошити.

Підставивши значення координат відповідних точок, отримаємо:

$x_c = \dfrac{3+1}{2}$ =2; $y_c = \dfrac{2+4}{2}$ =3.

<u>Вчитель.</u> Аналогічна формула справедлива і для простору. Оскільки точка в просторі визначається трьома координатами, то координати середини відрізка для простору обчислюється такими формулами:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2},\ y_c = \frac{y_A + y_B}{2},\ z_c = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Учні записують в зошити.

Розв’язування задач на закріплення.

І рівень

1. Знайдіть координати середини відрізка АВ, якщо:

а) А(-1; 0; 0), В(1; 2; 0);

б) А(0; 0; 0), В(2; 2; 2);

в) А(-2; 4; 2), В(2; -4; 2).

Вчитель. Скажіть формулу для визначення координат середини відрізка АВ.

Учні. Координати середини відрізка виражаються через координати його кінців за формулами:

$$x_c = \frac{x_A + x_B}{2}; y_c = \frac{y_A + y_B}{2}; z_c = \frac{z_A + z_B}{2}.$$

Вчитель. Тепер визначимо координати середини відрізків безпосередньо для нашої задачі.

Учні. Скориставшись згадуваною формулою, будемо мати:

а) С($\frac{1-1}{2}; \frac{2+0}{2}; \frac{0+0}{2}$) = С(0; 1; 0);

б) С($\frac{0+2}{2}; \frac{0+2}{2}; \frac{0+2}{2}$) = С(1; 1; 1);

в) С($\frac{-2+2}{2}; \frac{-4+4}{2}; \frac{2+2}{2}$) = С(0; 0; 2).

2. Чи є початок координат серединою відрізка CD, якщо:

а) С(-1; 0; 2), D(1; 0; -2); б) С(-4; 2; 6), D(4; -2; 6)?

Вчитель. Що потрібно зробити, щоб визначити, чи є початок координат серединою відрізка CD?

Учні. Потрібно знайти координати середини відрізка CD; якщо вони будуть нулями, то початок координат й справді є серединою відрізка CD.

Вчитель. Вірно. Тож перевіримо це.

Учні. Отже, шукаємо координати середини відрізка CD:

а) О $\left(\frac{-1+1}{2}; \frac{0+0}{2}; \frac{-2+2}{2}\right)$ = О(0; 0; 0).

Початок координат є серединою відрізка CD.

б) O $\left(\frac{-4+4}{2};\frac{-2+2}{2};\frac{6+6}{2}\right)$= O(0; 0; 6).

Початок координат не є серединою відрізка CD.

3. Якій координатній площині належить середина відрізка KP, якщо:

а) K(2; 1; 4), P(4; 0; -4);

б) K(-6; 2; 1), P(4; -2; 3)?

Вчитель. Що потрібно зробити, щоб визначити, якій координатній площині належить середина відрізка KP?

Учні. Потрібно знайти координати середини відрізка KP; якщо дві з координат відмінні від нуля, то тій площині і належить середина відрізка KP.

Вчитель. Вірно. Тож перевіримо це.

Учні. а) C $\left(\frac{2+4}{2};\frac{1+0}{2};\frac{4-4}{2}\right)$= C(3; 0,5; 0). Оскільки x = 3≠0 і y = 0,5≠0, то точка C – середина відрізка KP, належить площині XY.

б) C$\left(\frac{-6+4}{2};\frac{2-2}{2};\frac{1+3}{2}\right)$= C(-1; 0; 2). Оскільки x = -1≠0 і z = 2≠0, то точка C – середина відрізка KP, належить площині XZ.

II рівень

4. Знайдіть координати середини відрізків PT, якщо:

а) P(1,2; -3; 6,3), T(-2,6; 3,2; -5,1);

б) P($\sqrt{3}$; 2; 1-$\sqrt{2}$), T(3$\sqrt{3}$; 1; 1 +$\sqrt{2}$).

Вчитель. За вже використовуваною формулою розв'яжемо цю задачу.

Учні. Знайдемо координати середини відрізка PT:

а) C$\left(\frac{1{,}2-2{,}6}{2};\frac{-3+3{,}2}{2};\frac{6{,}3-5{,}1}{2}\right)$= C(-0,7; 0,1; 0,6);

б) C$\left(\frac{\sqrt{3}+3\sqrt{3}}{2};\frac{2+1}{2};\frac{1-\sqrt{2}+1+\sqrt{2}}{2}\right)$= C(2$\sqrt{3}$; 1,5; 1).

5. Точка M – середина відрізка AB. Знайдіть координати точки B, якщо A(2; -1; 6), M(1; 4; 0).

Вчитель. Як знайти координати точки B?

Учні. Потрібно з формул знаходження координат середини відрізка визначити координати точки B(x; y; z):

$1 = \frac{2+x}{2}$, 2 + x = 2, x = 0;

$4 = \frac{-1+y}{2}$, -1 + y = 8, y = 9;

$0 = \frac{6+z}{2}$, z = -6.

Отже, точка B матиме координати: B(0; 9; -6).

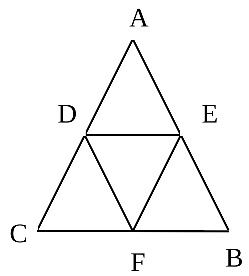
6. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника ABC, заданого координатами своїх вершин: A(-1; 4; 2), B(-3; 2; -2), C(1; -2; -2).

Вчитель. Що таке середня лінія трикутника?

Учні. Середня лінія трикутника – це відрізок, який сполучає середини протилежних сторін трикутника.

Вчитель. Що нам потрібно мати, щоб знайти довжини середніх ліній?

Учні. Потрібно мати координати кінців середніх ліній, тобто нам потрібно знайти для початку координати середин сторін трикутника (мал. 6):



Мал. 6

$D\left(\frac{-1-3}{2};\frac{4+2}{2};\frac{2-2}{2}\right)$=D(-2; 3; 0);

$E\left(\frac{-3+1}{2};\frac{2-2}{2};\frac{-2-2}{2}\right)$=E(-1; 0; -2);

$F\left(\frac{-1+1}{2};\frac{4-2}{2};\frac{2-2}{2}\right)$=F(0; 1; 0).

Тепер знайдемо довжини середніх ліній трикутника ABC:

DE = $\sqrt{(-1+2)^2+(0-3)^2+(-2-0)^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$;

EF = $\sqrt{(0+1)^2+(1-0)^2+(0+2)^2} = \sqrt{1+1+4} = \sqrt{6}$;

$DF = \sqrt{(0+2)^2 + (1-3)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{4+4+0} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$.

ІІІ рівень

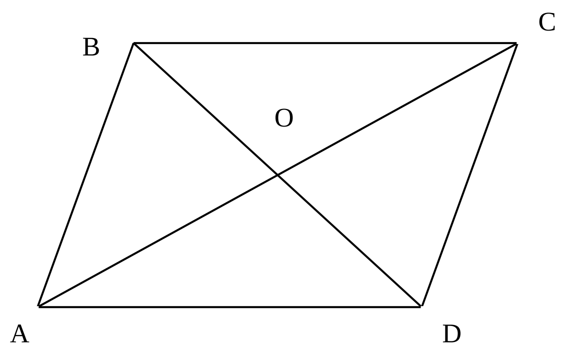
7. О – точка перетину діагоналей паралелограма ABCD. Знайдіть координати вершин C і D, якщо A(1; 3; -2), B(-4; 0; 5), O(1; 0; 2).

Вчитель. Яку властивість паралелограма ви знаєте, що допоможе нам у розв'язані даної задачі?

Учні. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Вчитель. Що нам це дасть, маючи координати двох вершин паралелограма та точки перетину діагоналей?

Учні. Підставивши ці дані в формули для знаходження координат середини відрізка, знайдемо координати решти вершин паралелограма (мал. 7).



Мал. 7

Знайдемо координати точки C(x; y; z):

$1 = \frac{1+x}{2}$, 1 + x = 2, x = 1;

$0 = \frac{3+y}{2}$, 3 + y = 0, y = -3;

$2 = \frac{-2+z}{2}$, -2 + z = 4, z = 6.

Отже, точка C має координати: C(1; -3; 6).

Знайдемо тепер координати точки D (x; y; z):

$1 = \frac{-4+x}{2}$, -4 + x = 2, x = 6;

$0 = \frac{0+y}{2}$, y = 0;

$2 = \frac{5+z}{2}$, 5 + z = 4, z = -1.

Отже, точка D має координати: D(6; 0; -1).

IV рівень

8. Середина P відрізка AB лежить на осі z. Знайдіть числа a і b, якщо: A(a; -2; 3), B(2; b; -1).

Вчитель. Які координати має точка, яка лежить на осі z?

Учні. Точка, яка лежить на осі z має такі координати: P(0; 0; z).

Вчитель. Як знайти числа a і b?

Учні. Потрібно скористатися формулами для знаходження координат середини відрізка:

$0 = \frac{a+2}{2}$, a = -2;

$0 = \frac{-2+b}{2}$, b = 2.

Вчитель. На цьому вивчення теми «Декартові координати в просторі» завершено, а тому, як підсумок виконаємо рівневу самостійну роботу.

Самостійна робота

I рівень

1. Сторона квадрата OABC дорівнює 3. Знайдіть координати його вершин.

2. Дано точку K(-8; -2; 10). Знайдіть координати основ перпендикулярів, опущених із цієї точки на координатні площини.

3. Тетраедр ABCD задано координатами вершин: A(4; 0; 2), B(-5; 0; 7), C(6; 0; -2), D(2; 3; 5). У якій координатній площині лежить основа ABC тетраедра?

4. Дано точку A(-5; 5; 6). Знайдіть відстань від неї до початку координат.

5. Знайдіть довжину відрізка з кінцями в заданих точках: A(1; 6; 7;), B(3; 2; 9).

6. Чи є початок координат серединою відрізка AB, якщо: A(5; 7; -4), B(5; 0; 2).

II рівень

1. Знайдіть координати точок, які віддалені від кожної з координатних площин на 7.

2. Яка з точок – A(1; 0; 5) чи B(0; 1; 5) – лежить ближче до початку координат?

3. Дано точки A(0; 1; 1), B(2; -1; 3), C(-1; x, 0). Знайдіть таке значення x, щоб виконувалася рівність AC = BC.

4. Знайдіть довжини медіан трикутника ABC, якщо A(3; 3; 3), B(1; 2; 3), C(5; 6; 1).

5. Знайдіть довжини середніх ліній трикутника ABC, заданого координатами своїх вершин: A(-1; 4; 2), B(-3; 2; -2), C(1; -2; -2).

III рівень

1. Точки A(0; 0; 0), B(b; 0; 0), C(0; c; 0), D(0; 0: d) – вершини паралелепіпеда. Знайдіть координати решти його вершин.

2. Доведіть, що точки A(-2; 0; 5), B(-1; 2; 3), C(1; 1; -3), D(0; -1; 1) є вершини паралелограма.

3. Чи буде чотирикутник ABCD паралелограмом, якщо: A(1; -3; 2), B(0; 3; 5), C(5; 1; 3), D(4; -2; 6).

4. O – точка перетину діагоналей паралелограма ABCD. Знайдіть координати вершин C і D, якщо A(1; 3; -2), B(-4; 0; 4), O(1; 0; 2).

IV рівень

1. На малюнку зображено куб $ABOCA_1B_1O_1C_1$, $OA_1 = 2\sqrt{3}$. Знайдіть координати вершин цього куба.

2. Установіть вид чотирикутника ABCD та знайдіть його площу, якщо: A(1; 1; 1), B(1; 0; 1), C(1; 0; 0), D(1; 1; 0).

3. Точки B1(2; -3; 4) і C1(-6; 2; 1) – середини сторін AC та AB трикутника ABC відповідно. Знайдіть координати вершин A і B, якщо вершина C має координати (-2; 3; 4).

Запропонована нами методика дозволить вчителю здійснювати рівневі навчання учнів.

Впровадження даної методики при вивченні координат, сприятиме розвитку здібностей та можливостей учнів, формуватиме їх прагнення до пізнання та вміння вчитися, стійкий інтерес до успішного вивчення предмету.

2.2. Методика вивчення векторів в просторі

Урок 4. <u>Введення векторів в просторі.</u>

Мета: Сформувати поняття:

- ✓ вектора в просторі;
- ✓ рівних векторів;
- ✓ координат вектора.

Домагатися формування уявлення про вектор, абсолютна величина вектора, рівність векторів та координати вектора у просторі; введення формули для обчислення довжини вектора; сформувати вміння відтворювати зазначені твердження і використовувати їх для обґрунтування міркувань під час розв’язування задач.

На уроці слід повторити відповідний матеріал з планіметрії: поняття вектора, напрям і абсолютна величина вектора, координати вектора. Та перед цим потрібно мотивувати необхідність вивчення даної теми.

<u>Вчитель.</u> Умовно можна сказати, що векторна величина складається з двох частин: одна частина та, яку можна виміряти, її скалярна частина; друга частина – її напрям.

В геометрії скалярна частина вектора називається довжиною (модулем) вектора.

<u>Фронтальне опитування.</u>

<u>Вчитель.</u> Оскільки ця тема дуже пов’язана з відповідною темою на площині, то давайте пригадаємо основний матеріал теми «Вектори на площині». Сформулюйте означення вектора на площині.

<u>Учні.</u> Вектором називається напрямлений відрізок.

<u>Вчитель.</u> Які вектори називають рівними?

<u>Учні.</u> Два вектори називаються рівними, якщо вони спів напрямлені та їх координати рівні.

<u>Вчитель.</u> Який вектор називається нульовим?

<u>Учні.</u> Вектор називається нульовим, якщо всі його координати нулі, або, що те саме – його довжина дорівнює нулю.

<u>Вчитель.</u> Які вектори називають колінеарними?

Учні. Вектори, яким відповідають паралельні напрямлені відрізки.

Вчитель. Як знайти координати вектора?

Учні. Потрібно від координат кінця вектора відняти координати початку вектора.

Вчитель. Аналогічно як і на площині, вектори називається напрямлений відрізок і позначають його як відрізок, в якого відмічено початок та кінець. Позначають $\overline{AB}$, $\overline{a}$. Координатами вектора називають числа $a_1 = x_2$-x_1; $a_2 = y_2$-y_1; $a_3 = z_2$-z_1. Записують це наступним чином: $\overline{a}$=(a_1; a_2; a_3), або $\overline{AB}$ (x_2-x_1; y_2-y_1; z_2-z_1). Координати вектора можуть бути будь-якими дійсними числами. Якщо всі координати вектора – нулі, то його називають нульовим вектором і позначають символом 0.

Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають однаково напрямленими, якщо однаково напрямлені і пів прямі AB і CD. Вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CD}$ називають протилежно напрямленими, якщо протилежно напрямлені й пів прямі AB і CD.

Абсолютною величиною називається довжина відрізка, що зображає вектор. Абсолютна величина позначається: $|\overline{a}|$.

Довжина будь-якого ненульового вектора – число додатне. Довжина нульового вектора дорівнює нулю.

Два вектори називається рівними, якщо вони спів напрямлені та їх координати рівні.

Вектори, що мають однакові або протилежні напрями, називаються колінеарними.

Розв'язування задач на закріплення.

І рівень

1. Дано точки A(1; 1; 1), B(-7; 0; 2), C(3; -1; 4), O(0; 0; 0). Укажіть координати векторів $\overline{OA}, \overline{OB}, \overline{OC}, \overline{BO}, \overline{CO}, \overline{AB}$.

Вчитель. Очевидно, що в даній задачі ми будемо діяти аналогічно до вектора координати початку:

$\overline{OA}$ = (1; 1; 1), $\overline{OB}$ = (-7; 0; 2), $\overline{OC}$ = (3; -1; 4), $\overline{BO}$ = (7; 0; -2), $\overline{CO}$ = (-3; 1; -4), $\overline{AB}$ = (-8; -1; 1).

2. Які координати має вектор $\overline{MN}$, якщо $\overline{NM}$ = (2; -1; 4)?

Вчитель. Які між собою вектори $\overline{MN}$ та $\overline{NM}$?

Учні. Вектори $\overline{MN}$ та $\overline{NM}$ називають протилежно напрямленими.

Вчитель. Чим нам це допоможе?

Учні. Це допомагає нам тим, що в цих векторів поміняні місцями початок і кінець вектора, тому їх координати матимуть протилежні знаки. Отримаємо: $\overline{MN}$ = (-2; 1; -4).

3. Відомо, що $\overline{a} = \overline{b}$. Чи завжди $|\overline{a}| = |\overline{b}|$?

Учні. Виходячи з означення рівних векторів, ця рівність буде виконуватися завжди, оскільки в рівних векторів координати рівні, то рівні і їх довжини.

II рівень

4. Знайдіть координати початку напрямленого відрізка $\overline{AB}$, що відповідає вектору $\overline{a}$ = (3; 4; 2), якщо його кінець – точка B(-5; 4; 1).

Вчитель. Як знайти координати початку напрямленого відрізка, якщо відомі координати відповідного вектора та кінця напрямленого відрізка?

Учні. Потрібно підставити відомі координати у формули для знаходження координат вектора:

-5 – x = 3, x = -8;

4 – y = 4, y = 0;

1 – z = 2, z = -1.

Отже, початок напрямленого відрізка $\overline{AB}$ має такі координати:

A(-8; 0; -1).

5. Довжина векторів $\overline{a}$ = (2; 1; 3) і $\overline{b}$ = (-1; x; 2) рівні. Знайдіть x.

Вчитель. Як будемо розв’язувати цю задачу?

Учні. Знайдемо довжини даних векторів, прирівняємо їх, оскільки вони рівні, та виразимо з отриманого рівняння x:

$|\overline{a}| = \sqrt{2^2+1^2+3^2} = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}$;

$|\overline{b}| = \sqrt{(-1)^2+x^2+2^2} = \sqrt{1+x^2+4} = \sqrt{5+x^2}$;

$\sqrt{5+x^2} = \sqrt{14}$,

$5 + x^2 = 14$,

$x^2 = 9$,

$x = \pm 3$.

III рівень

6. Як відносяться довжини ненульових векторів $\bar{a}$ = (a; b; c) і $\bar{b}$ = (2a; 2b; 2c)?

Вчитель. Як будемо розв'язувати дану задачу?

Учні. Знайдемо довжини даних векторів та знайдемо їх відношення:

$|\bar{a}| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

$|\bar{b}| = \sqrt{(2a)^2 + (2b)^2 + (2c)^2} = \sqrt{4a^2 + 4b^2 + 4c^2} = 2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$;

$$\frac{|\vec{a}|}{|\bar{b}|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}{2\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \frac{1}{2}.$$

7. Знайдіть координати вершини D паралелограма ABCD, якщо:

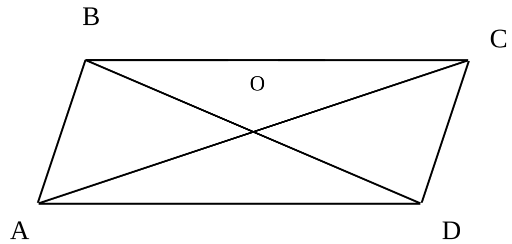
A(1; -3; 1), B(2; 4; -6), C(3; -1; 1);

Вчитель. Яку властивість паралелограма ви знаєте, що допоможе нам у розв'язанні даної задачі?

Учні. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Вчитель. Що нам це допоможе, маючи координати трьох вершин паралелограма?

Учні. Розглядаючи діагональ AC, знайдемо координати точки перетину діагоналей. А розглядаючи діагональ BD, знайдемо координати вершини D (мал. 8):



Мал. 8

Вчитель. Вірно. Зробіть це.

Учні. Отже, розглядаючи діагональ AC, знайдемо спочатку координати точки перетину діагоналей, тобто середину діагоналі AC – точку O:

O$\left(\frac{1+3}{2};\frac{-3-1}{2};\frac{1+1}{2}\right)$ = O(2; -2; 1).

Знайдемо тепер координати точки D(x; y; z), підставивши подані та отримані дані у формули для знаходження координати середини відрізка:

$2 = \frac{2+x}{2}$, 2 + x = 4, x = 2;

$-2 = \frac{4+y}{2}$, 4 + y = -4, y = -8;

$1 = \frac{-6+z}{2}$, -6 + z = 2, z = 8.

Отже, точка D має координати: D(2; -8; 8).

IV рівень

8. При якому значенні a довжини вектора $\overline{m}$ дорівнює $\sqrt{21}$, якщо:

а) $\overline{m}$ = (4; a; 2); б) $\overline{m}$ = (a-1; 1; 4).

Вчитель. За якою формулою шукається довжина вектора?

Учні. Довжина вектора шукається за формулою:

$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$;

Вчитель. Як будемо розв'язувати дану задачу?

Учні. Знайдемо довжину вектора $\overline{m}$:

$\left|\overline{m}\right| = \sqrt{16 + a^2 + 4} = \sqrt{20 + a^2}$;

Прирівняємо її до $\sqrt{21}$ та розв'яжемо отримання рівняння і тим самим відшукаємо потрібне значення a:

$\sqrt{20 + a^2} = \sqrt{21}$,

20 + a^2 = 21,

a^2 = 1, a = ± 1.

Аналогічним чином розв'яжемо пункт б):

$\left|\overline{m}\right| = \sqrt{(a-1)^2 + 1 + 16} = \sqrt{(a-1)^2 + 17}$;

$\sqrt{(a-1)^2 + 17} = \sqrt{21}$,

$(a - 1)^2 + 17 = 21$,

$a^2 – 2a + 1 + 17 = 21$,

$a^2 – 2a – 3 = 0$,

$a_1 = 3$, $a_2 = -1$.

Вчитель. Отже, на сьогоднішньому уроці ми вивчили тему «Введення векторів в просторі». Ми плідно попрацювали та добре засвоїли нові знання. (Виставляє оцінки учням).

Урок 5. Операції над векторами в просторі та їх властивості.

Мета: сформувати поняття:

- ✓ суми векторів;
- ✓ різниці векторів;
- ✓ множення вектора на число в просторі.

Сформувати вміння виконувати додавання, віднімання векторів, множення вектора на число у випадках, якщо вектори задані геометрично та координатами.

Вчитель наголошує, що всі дії над векторами в просторі вивчаються так само, як на площині.

Фронтальне опитування.

Вчитель. Дайте означення суми векторів на площині.

Учні. Сумою векторів $\overline{a} = (a_x; a_y)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y)$ називається вектор $\overline{c}$, що має координати $a_x + b_x; a_y + b_y$.

Вчитель. Дайте означення різниці векторів на площині.

Учні. Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор $\overline{c}$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$: $\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y)$.

Вчитель. Дайте означення добутку вектора на число.

Учні. Добутком вектора $\overline{a}(a_x; a_y)$ на число λ, називається вектор $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y)$.

Вчитель. Перейдемо до вивчення нової теми.

Оскільки матеріал теми аналогічний до відповідного матеріалу в курсі планіметрії, то його пояснення можна провести у вигляді розповіді вчителя.

Вчитель. Сумою векторів $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ і $\overline{b} = (b_x; b_y; b_z)$ називається вектор $\overline{c}$, що має координати $a_x + b_x; a_y + b_y; a_z + b_z$.

Оскільки для чисел справедливий переставний та сполучний закони, тобто $a_x + b_x = b_x + a_x$, $a_x + (b_x + c_x) = (a_x + b_x) + c_x$, то очевидно, що для будь-яких векторів мають місце наступні властивості суми векторів:

Властивість 1. a + b = b +a (переставний закон).

Властивість 2. (a + b) + c = a + (b + c) (сполучний закон).

Вчитель. Геометрично суму двох векторів простору можна знаходити, користуючись правилом трикутника: $\overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$.

Вчитель. Також можна користуватись правилом паралелограма: якщо ABCD – паралелограм, то $\overline{AB} + \overline{AD} = \overline{AC}$.

Вчитель. Аналогічно, як і на площині, різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор c, який у сумі з вектором b дає вектор a:

$\overline{a} - \overline{b} = (a_x - b_x; a_y - b_y; a_z - b_z)$.

Вчитель. Добутком вектора $\overline{a} = (a_x; a_y; a_z)$ на число λ, називається вектор $\lambda\overline{a} = (\lambda a_x; \lambda a_y; \lambda a_z)$.

Із означення добутку вектора на число випливає, що для будь-якого вектора $\overline{a}$ і чисел λ і μ мають місце рівності:

1) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$.
2) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$.
3) $|\lambda a| = |\lambda||a|$.

Остання рівність означає, що напрям вектора $\lambda\overline{a}$ співпадає з напрямом вектора $\overline{a}$, якщо $\lambda > 0$, і протилежний напряму вектора a, якщо $\lambda < 0$.

Вчитель. Вектор, початок і кінець якого суміщаються, називається нульовим або нуль-вектором.

Два ненульові вектори $\overline{AB}$ і $\overline{CB}$ називаються колінеарними, якщо прямі AB і CB паралельні або співпадають.

$\overline{a}$ і $\overline{b}$ колінеарні, якщо $\overline{b} = \lambda\overline{a}$. Отже, колінеарні вектори мають пропорційні координати.

Вектори називають компланарними, якщо вони паралельні одній площині або лежать в одній площині.

Розв’язування задач на закріплення.

І рівень

1. Знайдіть суму та різницю векторів:

а) $\overline{a} = (-2; 0; 3)$ і $\overline{b} = (1; 1; 0)$;

б) $\overline{c} = (-2; -1; 4)$ і $\overline{d} = (3; 1; -1)$.

Вчитель. Що називається сумою векторів?

Учні. Сумою векторів $\overline{a}$=(a_x; a_y; a_z) і $\overline{b}$ = (b_x; b_y; b_z) називається вектор $\overline{c}$, що має координати $a_x + b_x$; $a_y + b_y$; $a_z + b_z$.

Вчитель. Що називається різницею векторів?

Учні. Різницею векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називається такий вектор $\overline{c}$, який у сумі з вектором $\overline{b}$ дає вектор $\overline{a}$:

$\overline{a} - \overline{b}$ = ($a_x - b_x$; $a_y - b_y$; $a_z - b_z$).

Вчитель. Тож знайдемо суму та різницю векторів $\overline{a}$ і $\overline{b}$.

Учні. а) Знайдемо суму векторів:

$\overline{a} + \overline{b}$ = (-2 + 1; 0 + 1; 3 + 0) = (-1; 1; 3);

Знайдемо різницю векторів:

$\overline{a} - \overline{b}$ = (-2 – 1; 0 – 1; 3 - 0) = (-3; -1; 3);

б) Знайдемо суму векторів:

$\overline{c} + \overline{d}$ = (-2 +3; -1 + 1; 4+(-1)) = (1; 0; 3).

Знайдемо різницю векторів:

$\overline{c} - \overline{d}$ = (-2 – 3; -1 – 1; 4 – (-1)) = (-5; -2; 5).

2. Помножте вектор $\overline{m}$ = (-6; 4; 0) на 2; -3; 0,5; $-\frac{1}{4}$.

Вчитель. Що називається добутком вектора на число?

Учні. Добутком вектора $\overline{a}$ = (a_x; a_y; a_z) на число λ, називається вектор $\lambda\overline{a}$ = (λa_x; λa_y; λa_z).

Вчитель. Що це означає?

Учні. Щоб помножити вектор на число потрібно помножити на це число кожну його координату. Тож розв'яжемо дану задачу:

$2\cdot\overline{m}$ = (2·(-6); 2·4; 2·0) = (-12; 8; 0);

$-3\cdot\overline{m}$ = (-3·(-6); -3·4; -3·0) = (18; -12; 0);

$0,5\cdot\overline{m}$ = (0,5·(-6); 0,5·4; 0,5·0) = (-3; 2; 0);

$-\frac{1}{4}\cdot\overline{m} = (-\frac{1}{4}\cdot(-6);\ -\frac{1}{4}\cdot 4;\ -\frac{1}{4}\cdot 0) = (\frac{3}{2};\ -1;\ 0)$.

3. Чи колінеарні вектори:

а) $\overline{a}$ = (1; 1; 2) і $\overline{b}$ = (2; 2; 4);

б) $\overline{a}$ = (1; 2; 3) і $\overline{b}$ = (3; 2; 1);

в) $\overline{a}$ = (2; 4; 7) і $\overline{b}$ = (1; 2; 3,5)?

Вчитель. Які вектори називається колінеарними?

Учні. Вектори $\overline{a}$ і $\overline{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. У колінеарних векторів пропорційні координати. Відповідно до цього колінеарними будуть вектори з варіантів а) та в), а вектори з варіанту б) не колінеарні.

II рівень

4. Знайдіть суму векторів:

$\overline{x} = \left(0;3;\frac{1}{4}\right)$, $\overline{y} = \left(1;\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right)$ і $\overline{z} = \left(-4;\frac{1}{2};2\right)$.

Вчитель. Що називається сумою векторів?

Учні. Сумою векторів $\overline{x}$ = (x_x; x_y; x_z), $\overline{y}$ = (y_x; y_y; y_z), $\overline{z}$ = (z_x; z_y; z_z) називається вектор, що має координати $x_x + y_x + z_x$; $x_y + y_y + z_y$; $x_z + y_z + z_z$.

Вчитель. Тож знайдемо суму векторів.

Учні. $\overline{x}$ + $\overline{y}$ + $\overline{z}$ = (0 + 1 + (-4); 3 + $\frac{1}{2}$ + $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{4}$ + $\frac{3}{4}$ + 2) = (-3; 4; 3).

5. Доведіть, що коли O – точка перетину діагоналей паралелограма ABCD, то $\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC} + \overline{OD} = \overline{0}$.

Вчитель. Яку властивість паралелограма ви знаєте, що допоможе нам у розв’язанні даної задачі?

Учні. Діагоналі паралелограма точкою перетину діляться навпіл.

Вчитель. Що це нам дасть?

Учні. Саме за цією властивістю паралелограма виконується рівність $\left|\overline{OA}\right| = \left|\overline{OC}\right|, \left|\overline{OB}\right| = \left|\overline{OD}\right|$. Проте, як видно з малюнка, ці вектори є протилежними.

А нам відомо, що сума двох протилежних векторів дорівнює нульовому вектору. Тому маємо наступне:

$\left(\overline{OA} + \overline{OC}\right) + \left(\overline{OB} + \overline{OD}\right) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0}$.

III рівень

6. Дано вектори $\overline{a}$ = (3; -2; 1), $\overline{b}$ =(2; -3; -1), $\overline{c}$ =(-1; 5; 7). Знайдіть: $\left|\overline{a}+\overline{b}\right|$, $\left|\overline{a}+\overline{c}\right|$, $\left|2\overline{a}+3\overline{c}\right|$.

<u>Вчитель.</u> Як знайти модулі даних векторів?

<u>Учні.</u> Щоб знайти модулі даних векторів потрібно спочатку знайти координати відповідного вектора, а потім його модуль.

<u>Вчитель.</u> Як будемо шукати координати векторів?

<u>Учні.</u> Координати векторів будемо шукати, використовуючи правила додавання векторів та множення вектора на число.

<u>Вчитель.</u> За якою формулою будемо шукати модуль вектора?

<u>Учні.</u> Модуль вектора будемо шукати за формулою: $\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}$.

<u>Вчитель</u>. Тож розв’яжемо цю задачу.

<u>Учні.</u> Знайдемо координати векторів:

$\overline{a}$ + $\overline{b}$ = (3 + 2; -2 – 3; 1 – 1) = (5; -5; 0);

$\overline{a}$ + $\overline{c}$ = (3 – 1; -2 + 5; 1 + 7) = (2; 3; 8);

2$\overline{a}$ +3$\overline{c}$ = (2·3 - 3·1; 2·(-2) + 3·5; 2·1 + 3·7) = (3; 11; 19).

Тепер знайдемо модулі векторів:

$\left|\overline{a}+\overline{b}\right| = \sqrt{5^2+(-5)^2+0^2} = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$;

$\left|\overline{a}+\overline{c}\right| = \sqrt{2^2+3^2+8^2} = \sqrt{77}$;

$\left|2\overline{a}+3\overline{c}\right| = \sqrt{3^2+11^2+19^2} = \sqrt{491}$.

IV рівень

7. Знайдіть координати вектора $\overline{a}$, спів напрямленого з вектором $\overline{p}$, якщо $\overline{p}$ = (2; -2; -1) і $\left|\overline{a}\right|$ = 6.

<u>Вчитель.</u> Як знайти координати вектора $\overline{a}$, спів напрямленого з вектором $\overline{p}$?

Учні. Оскільки вектори спів напрямлені, то їх координати пропорційні. Тому вектор $\overline{a}$ матиме координати: $\overline{a}$ = (2m; -2m; -m). А далі потрібно знайти довжину вектора $\overline{a}$ та виразити з неї m.

Вчитель. Як знайти довжину вектора $\overline{a}$?

Учні. Щоб знайти довжину вектора $\overline{a}$ скористаємось формулою:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} .$$

Тому матимемо:

$$\left|\overline{a}\right| = \sqrt{(2m)^2 + (-2m)^2 + (-m)^2} = \sqrt{4m^2 + 4m^2 + m^2} = \sqrt{9m^2} = 3m .$$

Оскільки $\left|\overline{a}\right|$ = 6, то 3m = 6, m = 2. Тому вектор $\overline{a}$ матиме координати: $\overline{a}$ = (4; -4; -2).

Підсумок уроку

Вчитель. Отже, на сьогоднішньому уроці ми вивчили тему «Операції над векторами в просторі та їх властивості». Ми плідно попрацювали та добре засвоїли нові знання. (Виставляє оцінки учням).

Урок 6. Скалярний добуток векторів. Кут між векторами.

Мета: сформувати поняття:

✓ скалярного добутку векторів;

✓ кута між векторами в просторі.

Домогтися засвоєння:

✓ властивостей скалярного добутку векторів;

✓ формули для обчислення скалярного добутку векторів і кута між векторами;

✓ сформувати вміння відтворювати вивчені твердження, а також використовувати їх для розв'язування задач на обчислення скалярного добутку векторів, визначення кута між векторами та доведення перпендикулярності векторів.

Вчитель. Скаляр, або скалярна величина, – це величина, кожне значення якої може бути виражене одним дійсним числом. Тобто можна сказати, що скаляр – це число. Розглянемо приклад з механіки.

Нехай під дією сили $\overline{F}$ фізичне тіло здійснило переміщення $\overline{s}$. Позначимо кут між напрямом сили і напрямом переміщення φ.

Для обчислення роботи, яку виконала сила $\overline{F}$ користуються формулою А = $\overline{F}\ \overline{S} = \left|\overline{F}\right|\left|\overline{S}\right|\cos\varphi$, де F і s – відповідно числові значення $\overline{F}$ і переміщення $\overline{s}$. З наведеної формули випливає, що робота А сили $\overline{F}$ є скалярною величиною, що залежить від двох векторних величин $\overline{F}$ і $\overline{s}$. Даний приклад допоможе вам усвідомити доцільність вивчення скалярного добутку векторів, що і є основною метою уроку.

Слід зазначити, що питання даної теми розглядається так само, як і на площині, тому спершу варто повторити їх із курсу планіметрії.

Вчитель. Сформулюйте означення кута між векторами.

Учні. Кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками, які виходять з однієї точки. Від вибору цієї точки міра розглядуваного кута не залежить.

Вчитель. Сформулюйте означення скалярного добутку векторів на площині.

Учні. Скалярним добутком двох векторів називається добуток довжин цих векторів на косинус кута між ними.

Вчитель. Сформулюйте теорему про скалярний добуток векторів.

Учні. Скалярний добуток векторів $\overline{a}=(x_1;x_2)$ і $\overline{b}=(y_1;y_2)$ дорівнює $x_1x_2 + y_1y_2$.

Вчитель. Які властивості має скалярний добуток векторів?

Учні. Властивості скалярного множення векторів:

Для будь-якого векторів $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ і числа k:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b} = \overline{b}\cdot\overline{a}$;

2) $(k\overline{a})\cdot\overline{b} = k(\overline{a}\cdot\overline{b})$;

3) $(\overline{a}+\overline{b})\overline{c}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c}$.

Вчитель. Як знайти косинус кута між векторами?

Учні. $\cos\alpha = \dfrac{\overline{a}\cdot\overline{b}}{|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|}$.

Вчитель. Чому дорівнює скалярний добуток перпендикулярних векторів?

Учні. Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток дорівнює нулю.

Вчитель. Множення, при якому добуток двох векторів дорівнює числу, то його називають скалярним добутком.

Як і на площині, кутом між двома ненульовими векторами називають кут між відповідними їм напрямленими відрізками , які виходять з однієї точки. Кут між протилежно напрямленими векторами дорівнює 180°, а між спів напрямленими - 0°.

Аналогічно як і на площині, скалярним добутком двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними. Якщо хоч один з двох векторів нульовий, їх добуток дорівнює нулю. Якщо кут між векторами $\overline{a}$ і $\overline{b}$ дорівнює φ, то їх скалярний добуток $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cos\varphi$.

Теорема: Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Розв’язування задач на закріплення.

І рівень

1. Знайдіть кут між двома одиничними векторами, якщо їхній скалярний добуток дорівнює:

а) $\frac{1}{2}$; б) $\frac{\sqrt{3}}{2}$; в) 0; г) -0,5.

Вчитель. Що таке скалярний добуток двох векторів?

Учні. Скалярним добутком двох ненульових векторів називається добуток модулів цих векторів на косинус кута між ними.

Вчитель. Сформулюйте теорему про скалярний добуток двох векторів.

Учні. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат.

Вчитель. Як знайти кут між двома одиничними векторами?

Учні. Скориставшись означенням та теоремою про скалярний добуток, матимемо формулу: cosφ = $\frac{(\bar{a};\bar{b})}{|\bar{a}|\cdot|\bar{b}|}$. Оскільки дані вектори одиничні, то отримаємо, що:

а) cosφ = $(\bar{a};\bar{b})=\frac{1}{2}$, φ = arccos$\frac{1}{2}$=60°.

б) cosφ =$(\bar{a};\bar{b})=\frac{\sqrt{3}}{2}$, φ = arccos$\frac{\sqrt{3}}{2}$=30°;

в) cosφ =$(\bar{a};\bar{b})$=0, φ = arccos0=90°;

г) cosφ =$(\bar{a};\bar{b})$= -0,5, φ = arccos(-0,5)=120°.

2. Який знак має скалярний добуток двох векторів, якщо кут між ними:

а) гострий; б) тупий?

Вчитель. Як визначити знак скалярного добутку двох векторів залежно від кута між ними?

Учні. Знак скалярного добутку двох векторів залежить в даному випадку лише від знаку косинуса між векторами, бо модулі векторів завжди більші або рівні нуля.

Оскільки косинус гострого кута завжди більший нуля, то і скалярний добуток двох векторів буде більший нуля.

Оскільки косинус тупого кута завжди менший нуля, то і скалярний добуток двох векторів буде менший нуля.

3. Укажіть вид кута між векторами, якщо їхній скалярний добуток:

а) дорівнює нулю; б) додатній; в) від'ємний.

Вчитель. Як визначити вид кута між векторами?

Учні. Посилаючись на розв'язання попередньої задачі, то матимемо:

а) прямий кут; б) гострий кут; в) тупий кут.

II рівень

4. Знайдіть скалярний добуток векторів:

$\bar{a}$ = (1; 2; -3) і $\bar{b}$ = (-8; 2; 4).

Вчитель. Як знайти скалярний добуток двох векторів, заданих своїми координатами?

Учні. Скалярний добуток двох векторів дорівнює сумі добутків їх відповідних координат. Тому матимемо:

$\bar{a}\cdot\bar{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 1\cdot(-8) + 2\cdot 2 + (-3)\cdot 4 = -8 + 4 - 12 = -16.$

5. Знайдіть довжину вектора $\bar{a}$, якщо він колінеарний вектору

$\bar{b}$ = (2; -1; 2) і $\bar{a}\cdot\bar{b}$ =18.

Вчитель. Які вектори називаються колінеарними?

Учні. Вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ називаються колінеарними, якщо вони лежать на одній прямій або на паралельних прямих. У колінеарних векторів пропорційні координати. Колінеарні вектори бувають співнаправленими та протилежно напрямленими.

Вчитель. Вірно, але від цього довжина вектора $\bar{a}$ не зміниться тому розглянемо лише один випадок, наприклад, коли вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ спів напрямлені.

Учні. Отже, вектор $\bar{a}$ матиме координати $\bar{a}$=(2k; -k; 2k), де k – довільне додатне число. Знайдемо скалярний добуток: $(\bar{a};\bar{b})$ = 4k+ k+4k=9k.

Проте відомо, що $\bar{a}\cdot\bar{b}$ =18.

Тому матимемо: 9k=18, k=2. Тоді вектор $\bar{a}$ матиме координати: $\bar{a}$ =(4;-2;4)

Знайдемо довжину вектора $\bar{a}$:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{4^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{16+4+16} = \sqrt{36} = 6.$$

III рівень

6. Обчисліть $\left|\bar{a}+\bar{b}\right|$ і $\left|\bar{a}-\bar{b}\right|$, якщо $\left|\bar{a}\right| = \left|\bar{b}\right|$=1, $\bar{a}\perp\bar{b}$.

Вчитель. Як знайти довжину вектора $\bar{a}$?

Учні. Щоб знайти довжину вектора $\bar{a}$ скористаємося формулою:

$$\left|\bar{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

Вчитель. Нехай вектори $\bar{a}$ і $\bar{b}$ мають координати:

$\bar{a}$=(a_1; a_2; a_3), $\bar{b}$ = (b_1; b_2; b_3).

Учні. Враховуючи це, матимемо:

$$\left|\bar{a}\pm\bar{b}\right| = \sqrt{(a_1\pm b_1)^2 + (a_2\pm b_2)^2 + (a_3\pm b_3)^2} = \sqrt{a_1^2 \pm 2a_1b_1 + b_1^2 + a_2^2 \pm 2a_2b_2 + b_2^2 + a_3^2 \pm 2a_3b_3 + b_3^2} =$$

$$= \sqrt{\left|\bar{a}\right| \pm 2(\bar{a};\bar{b}) + \left|\bar{b}\right|} = \sqrt{2}.$$

IV рівень

7. Дано три точки: A(0;2;-1), B(1;0;1), C(-1;1;2). Знайдіть координати точки D такої, щоб виконувалася умова $\overline{AD}\perp\overline{BC}$, якщо точка D лежить на осі Ox.

Вчитель. Якщо точка D лежить на осі Ox, то які вона має координати?

Учні. Точка D має координати: D(x;0;0).

Знайдемо спочатку координати векторів $\overline{AD}$ і $\overline{BC}$:

$\overline{AD}$ = (x-0; 0-2; 0+1) = (x; -2; 1).

$\overline{BC}$ = (-1-1; 1-0; 2-1) = (-2; 1; 1).

Знайдемо їх скалярний добуток і прирівняємо його до нуля:

$(\overline{AD};\overline{BC})$ = -2x -2 + 1,

$-2x - 1 = 0$, $x = -0,5$.

Отже, D має координати: D(-0,5; 0; 0).

Вчитель. Отже, на сьогоднішньому уроці ми вивчили тему «Скалярний добуток векторів. Кут між векторами». Ми плідно попрацювали та добре засвоїли нові знання. (Виставляє оцінки учням).

Урок 7. Контрольна робота з теми «Координати і вектори в просторі»

I рівень

1. Дано точки A(0; 5; 1), B(-2; 0; 0), C(0; 0; 1), D(0; -8; 0). Які з них лежать на осі x, на осі z, у площині xy, у площині yz?

2. Якщо вектори перпендикулярні, то їх скалярний добуток

а) є додатним числом; б) дорівнює 0; в) є від'ємним числом; г) дорівнює 1.

3. Знайти координати середини відрізка AB, якщо A (4; -2; 6), B (-6; 8; 4)

а) (2; 1; -4); б) (-1; 3; 5); в) (-3; 4; 3); г) (-5; 5; 8).

4. Знайдіть довжину вектора AB, якщо A (-1; 1; -1), B (1; -1; -1)

а) $\sqrt{2}$; б) $2\sqrt{3}$; в) $2\sqrt{2}$; г) 8.

5. Вказати координати вектора $\bar{c} = \bar{a} + \bar{b}$, якщо $\bar{a}$(1; -3; 8), $\bar{b}$(2; 4; -6)

а) $\bar{c}$ (2; 12; -8); б) $\bar{c}$ (3; -5; 7); в) $\bar{c}$ (-1; -7; 6) ; г) $\bar{c}$ (3; 1; -1).

6. Скалярний добуток векторів $\bar{n}$ (1; 7; 0), $\bar{m}$ (-2; -4; 4)

а) -30; б) 28; в) 30; г) -25.

7. Знайдіть відстань між точками A(3; -2; 1) і B(-6; 8; 2)

а) $\sqrt{182}$; б) $\sqrt{168}$; в) 196; г) 13.

II рівень

1. При яких значеннях n вектори $\bar{a}$(1; -1; n) і $\bar{b}$(n; 1; n) колінеарні?

2. Побудувати точки A(5; -1; 3), B(1; 3; 4) та знайти координати середини відрізка.

3. Знайти модуль вектора $\bar{c} = 2\bar{a}$, $\bar{a}$(-3; 2; 5).

4. Знайти кут між векторами $\bar{m}$ і $2\bar{n}$, якщо $\bar{m}$(3; -5; 1), $\bar{n}$ (1; -1; 3).

5. Чи перпендикулярні вектори AB, AC, якщо A(3; -1; 2), B(1; 8; 9), C(2; 2; -3).

6. Знайдіть координати вершини D паралелограма ABCD, якщо A(0; 2; 0), B(1; 0; 0), C(2; 0; 2).

III рівень

1. Знайдіть модуль вектора $\bar{p} = 2\bar{a} - \bar{b} + \bar{c}$, $\bar{a}$(2; -3; 5), $\bar{b}$(1; 1; 1), $\bar{c}$(-3; 9; -2)

2. Знайти довжину медіани AM трикутника ABC, якщо A(2; -3; 1), B(-2; 5; 8), C(-4; -7; 3).

3. Дано точки M(-1; 1; 6), N(2; 5; 3), K(3; -2; 8). Знайти косинус кута N трикутника MNK.

4. Дано точки A(1; 0; 0), B(0; 0; 1), C(0; 1; 1), D(1; 1; 0). Знайдіть площу чотирикутника ABCD.

5. Дві площини перетинаються під кутом 60^0. Точка M знаходиться від цих площин на відстані 4 см. Знайти відстань від точки M до лінії перетину площин.

IV рівень

1. Дано точки A(2; 1; 7), B(-1; 1; 3), C(-8; 1; 2). Знайти внутрішній кут B трикутника ABC.

2. Дано вектори $\overline{a}$(-1; 2; 3) і $\overline{b}$(1; 3; 2). Знайти таке число λ, щоб вектор $\overline{n} = -\overline{a} + \lambda\overline{b}$ був перпендикулярний до вектора $\overline{a}$.

3. Установіть вид чотирикутника ABCD та знайдіть його площу, якщо: A(1; 1; 1), B(1; 0; 1), C(1; 0; 0), D(1; 1; 0).

4. Модуль вектора x = $\overline{a}$ + $\overline{b}$ дорівнює $\sqrt{26}$. Знайти m, якщо $\overline{a}$(m; 4; 2), $\overline{b}$(5; 1; -2).

Отже, за допомогою такої контрольної роботи вчитель зможе об’єктивно оцінити навчальні досягнення учнів, адже кожен з них обирає той рівень, який може подолати.

Таким чином, рівневі завдання є необхідною умовою для організації навчання, що орієнтоване на особистість учня.

Запропонована нами методика дозволить вчителю здійснювати рівневе навчання учнів і є досить ґрунтовною.

Впровадження такої методики при вивченні координат і векторів, сприятиме розвитку здібностей та можливостей учнів, формуватиме їх прагнення до пізнання та вміння вчитися, стійкий інтерес до успішного вивчення предмету.

2.3. Експериментальна перевірка

Дуже важливо, щоб вчитель систематично одержував об'єктивну інформацію про хід навчально-пізнавальної діяльності учнів. Таку інформацію він може одержати, лише здійснюючи контроль та діагностування процесу навчання.

Діагностика освітньої діяльності учнів включає: контроль, перевірку, облік, оцінювання, накопичення статистичних даних та їх аналіз, виявлення динаміки освітніх змін і особистісних здобутків учнів, уточнення освітніх програм, коригування процесу навчання, прогнозування подальшого розвитку діяльності.

Таким чином, до складу діагностики входять різні форми контролю. Реалізація контролю можлива за умови об'єктивності, відвертості, системності.

Як правило, після закінчення теми вчитель здійснює тематичну атестацію. Тільки перевірка знань є засобом активного управління вчителем процесу навчання.

За допомогою контролю вчитель може виявити, встановити і оцінити реальний рівень знань учнів, тобто визначити об'єм та якість засвоєння навчального матеріалу, прогалин в знаннях і відповідно одразу їх усувати, вносити корективи в процес навчання та вдосконалювати його зміст, методи, засоби та форми організації. При цьому оцінювання має ґрунтуватись на позитивному принципі, що визначає рівень засвоєння знань.

Саме тому будь-яка розроблена методика потребує експериментальної перевірки, після чого відбувається її впровадження в процес навчання.

Експериментальна перевірка проводилась в Кам'янець-Подільському ліцеї № ** серед учнів 11-их класів.

Вчителям було пояснено в чому суть експерименту. Учні експериментального класу навчались за даною методикою, а учні контрольного за запропонованими програмами та підручником. В кінці вивчення тем учням експериментальних та контрольних класів було запропоновано тематичну контрольну роботу.

За експериментальну групу було взято учнів 11-А класу. Середній бал успішності – 5,8. За контрольну групу було взято учнів 11-Б. Середній бал успішності – 6,8.

Результати контрольної роботи (оцінки) наведені в таблиці:

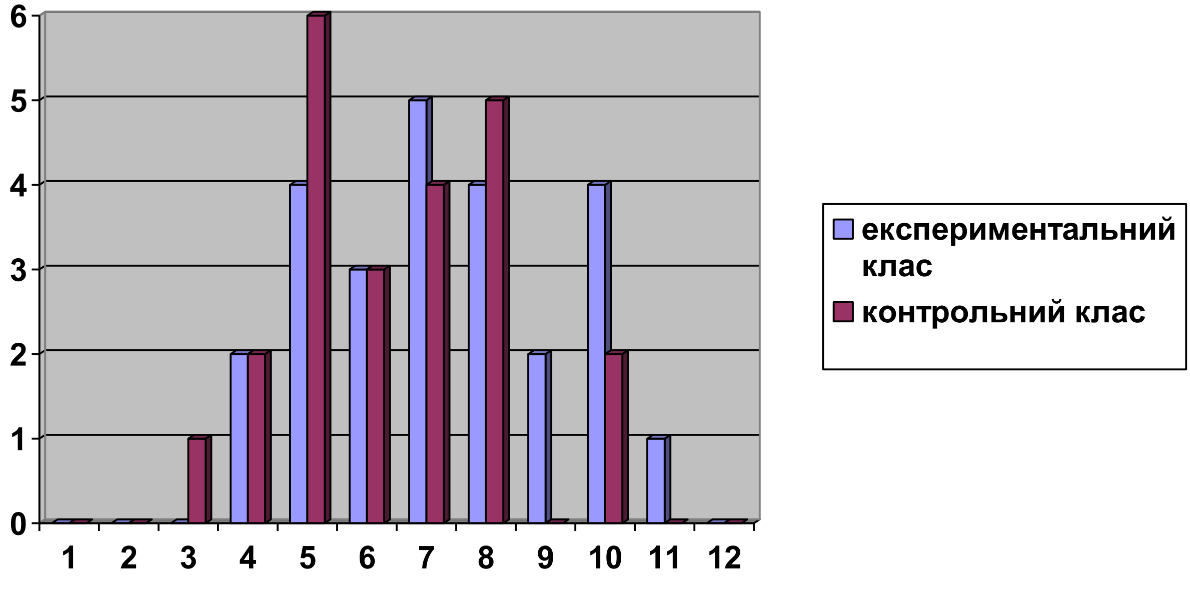
Таблиця 1.

Контрольна робота з теми «Декартові координати та вектори в просторі»

Бали	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Експериментальний клас				2	4	3	5	4	2	4	1	
Контрольний клас			1	2	6	3	4	5		2		

Для наочного представлення результати робіт зобразимо графічно у вигляді діаграми:

Діаграма 1.



З одержаної діаграми можна помітити, що в експериментальному класі більше вищих балів, ніж в контрольному. Це говорить про те, що розроблена методика є дійсно ефективною.

Для того, щоб з'ясувати, як впливає запропонована методика на процес формування та закріплення математичних знань, скористаємося методами математичної статистики [16]. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції. Чим більше він наближається до одиниці, тим більша ефективність розробленої методики. В протилежному випадку коефіцієнт кореляції буде близьким або рівним нулю.

При вивченні теми «Декартові координати та вектори в просторі»

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}},$$

де SS_x - сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень, $SS_y = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$

SP_{xy} – сума скоректованих добутків $SS_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів.

Таблиця 2.

Кількість учнів	Загальна кількість балів		Допоміжні розрахунки		
	В контрольному класі	В експериментальному класі	$\sum xy$	$\sum x^2$	$\sum y^2$
N	23	25	9941	10050	10863

1. Знаходимо суму квадратів відхилень $SS_x = 9251{,}9$; $SS_y = 10029{,}29$;
2. Суму скоректованих добутків $SP_{xy} = 9125$;
3. Коефіцієнт r = 0,87.

Бачимо, що одержаний коефіцієнт близький до одиниці. Отже, існує зв'язок між запропонованою методикою і досягнення учнями відповідних результатів. Тому можна вважати , що розроблена методика є ефективною.

Висновки і рекомендації

На сучасному етапі освіти збільшується об'єм і складність навчальних програм, прискорюється темп навчання, змінюються освітні технології. Тому важливо застосовувати такі форми і методи навчання, які б забезпечували високу пізнавальну активність учнів і дали можливість підвищити їх рівень знань і вмінь.

Велике значення для формування пізнавального інтересу учнів відіграє методика навчання матеріалу. Відомо, що учні активно працюють на занятті, краще запам'ятовують матеріал, якщо вчитель висуває якусь проблему, наводить приклад із життя, звертається до групи із запитаннями, на які вони повинні знайти відповіді. Тобто, сучасне заняття – це не монолог, а діалог, обговорення проблеми, бесіда, що супроводжується новими технологіями.

Розвиває інтерес до навчання проблемне навчання та розвивальне навчання, тому варто застосовувати його елементи на кожному занятті.

На заняттях слід широко застосовувати таблиці, схеми, а також сучасні мультимедійні форми подачі матеріалу; нестандартні форми проведення занять: брейн-ринг, заняття-змагання, мозковий штурм тощо.

Завдання вчителів математики – навчити учня думати, аналізувати, узагальнювати, формувати в них творче мислення, інтерес до навчання.

Відсутність дидактичних, методичних і довідкових посібників збіднюють навчальний процес, роблять його одноманітним. Тому розроблена методика може стати великим доробком вчителя математики.

Кожен автор методичних розробок хоче, щоб його праця мала методичну цінність, приносила користь у діяльності вчителів. Адже питання «Як навчати?» залишається завжди актуальним. І це добре, оскільки можливість постійно вдосконалюватись, ставати компетентним у своїй галузі творчо і професійно зростати, розвивати свої здібності та педагогічну майстерність.

Сподіваємось, що розроблена методика допоможе вчителеві у проведенні навчально-виховної роботи, принесе користь не тільки педагогу, а й залишить своє відображення у кращому сприйнятті учнями даних тем.

Як тільки учні усвідомлюють кредо «Навчатись – це цікаво», воно справді принесе велику користь і задоволення.

Математика була і залишається провідною у переліку шкільних предметів. Адже вона має тісні міжпредметні зв’язки. Взагалі життя людини без математики неможливе.

На сьогодні вчителями накопичений багатий методичний досвід, що дозволяє ефективно будувати навчальний процес. Останнім часом деякі методисти і педагоги зазначають, що основним критерієм уроку є не його зміст, а те, як працювали учні на уроці: якщо учні працювали всі 45 хвилин, то цей урок пройшов відмінно. Щоб досягти цього, варто проводити урок у швидкому темпі, але це не означає, що вчитель щохвилини підганяє учнів. Це не дасть позитивних результатів. Багато вчителів пояснюють поспішність у проведенні уроку тим, що сучасні програми й підручники дуже перевантажені.

Розробляти методику важливо. Це значно полегшує роботу вчителя, адже, скориставшись нею, він зможе раціонально використовувати свій час, роботи процес навчання доступним та ефективним.

Для написання дипломної роботи було переглянуто та проаналізовано багато підручників, навчальних посібників, методичних рекомендацій, психолого-дидактичної літератури, численних публікацій у науково-методичній літературі. Робота допоможе вчителям організувати навчально-виховний процес на належному рівні, оскільки містить розроблену методику вивчення координат і векторів, а також організувати контроль знань, умінь і навичок учнів з даної теми. В цьому допоможуть розроблені завдання, які враховують чотирьохрівневе навчання. Таким чином вчитель зможе об’єктивно оцінити знання учнів з даної теми.

Запропонована методика і її експериментальна перевірка дають можливість зробити такі висновки:

1. Розроблена методика побудована на загальній теоретичній основі з урахуванням прийомів закріплення, формування прийомів розумової і навчальної діяльності.

2. Для розвитку в учнів здібностей до самостійного і творчого

оволодіння новими знаннями необхідно забезпечити свідоме засвоєння ними теоретичної основи, оволодіння загальним підходом до розв'язання задач різних типів.

3. Результати дослідження можуть бути використані в практиці навчальних закладів при навчанні.

4. Для досягнення учнями успіхів в навчанні доцільно використовувати проблемний метод навчання, зокрема розвивальне як його різновид.

5. Застосування особистістю орієнтованих педагогічних технологій у професійній діяльності допоможе вчителеві успішніше розв'язувати педагогічні задачі, зробить навчання й виховання більш прогнозованими й керованими процесами.

6. Для об'єктивного оцінювання навчальних досягнень учнів та створення розвивального середовища, в якому учень має право на самовдосконалення, доцільно використовувати рівневі навчання.

Розроблена методика ґрунтується на основі головних концептуальних засад теорії розвивальної освіти і дозволяє зробити такі рекомендації:

1. Зміст навчального матеріалу має відповідати цілям розвивального навчання та визначатися на основі «зон ближчого розвитку» учнів, які згідно вчення Л.С. Виготського, створюються в процесі спілкування та співробітництва із вчителем (учнем) і товаришами, орієнтують на здійснення самостійної (колективно розподіленої та індивідуальної) навчально-пізнавальної діяльності.

Тому центральне місце в його структурі мають займати задачі-проблеми, які розв'язують протиріччя між наявними знаннями та новими фактами прикладного і практичного змісту, що, з іншого боку, є необхідною умовою розвитку науково-теоретичного мислення, змістово-теоретичних дій (аналіз, абстрагування, узагальнення, планування, рефлексія) та самосвідомість, формування навчально-професійної та науково-дослідної діяльності.

2. До змісту навчання мають входити не тільки система теоретичних понять, на основі якої формується структура навчальної дисципліни, але й методологічні принципи одержання (відкриття) нових знань, способи навчально-

пізнавальних дій, теоретичні методи пізнання та мислення, які відносяться до загальнонаукових. Це значною мірою слугує організації математичної, навчально-професійної, науково-дослідницької діяльності учнів, що здійснюється у формі постанови та розв'язування відповідних видів задач.

3. Зміст навчання має бути структурований та зведений до єдиної логічної основи, включати методологічні засади та структури математики як науки. Увесь навчальний матеріал розбитий на взаємопов'язані змістові блоки (модулі), у кожному з яких сформульовані відповідні змістові узагальнення (основні відношення, теоретичні поняття та їх властивості, узагальнені способи дій, методи розв'язування задач). Під структуруванням навчального матеріалу прийнято розуміти процес виявлення його елементів (значущих частин) і встановлення істотних зв'язків між ними. Такі елементи й зв'язки в їх сукупності утворюють структуру навчального матеріалу, яка дає змогу впорядкувати й організувати систему знань, формувати змістові узагальнення, мати уявлення про дисципліну в цілому (включаючи й операційний компонент).

4. Усі теоретичні поняття мають вивчатися, починаючи з аналізу умов їх походження та розвитку. Саме це дозволяє суб'єктам навчального пізнання зробити висновки про необхідність їх введення та побудови науково обґрунтованої теорії.

5. Вирішальна роль у змісті навчання має належати різного виду задачам, оскільки саме в процесі реалізації задачного підходу здійснюється формування та розвиток навчально-професійної діяльності учнів.

6. Зміст навчання має задовольняти вимоги фундаментальності освіти. Обсяг теоретичних знань, засвоєних способів навчально-пізнавальних дій має бути достатнім для самостійного продовження навчання, проектування індивідуальної траєкторії учіння, самореалізації й саморозвитку в майбутній професійній діяльності.

Список використаних джерел

1. Апостолова Г. В. Геометрія 11 клас: Дворівневий підручник / Г. В. Апостолова. – К.: Генеза, 2011. – 304 с.
2. Афанасьєва О. М. Математика 11 клас: підручник / О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О. Л. Павлов, А. К. Сліпенко. – Тернопіль: Навчальна книга – Богдан, 2011. – 480 с.
3. Бевз Г. П. Геометрія 11 клас: підручник / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз, Н. Г. Владімірова, В. М. Владіміров – К.: Генеза, 2011. – 335 с.
4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навчальний посібник / Г. П. Бевз. – 3-те вид., пероб. і допов. – К.: Вища шк.., 1989. – 367 с.
5. Бевз Г. П. Урок математики в школі / Г. П. Бевз – К.: Рад. Шк., 1977. – 112 с.
6. Бех І. Д. Виховання особистості. Кн. 1: Особистісно орієнтований підхід: теоретико-технологічні засади: наук. Видання / І. Д. Бех. – К.: Либідь, 2003. – 280 с.
7. Блох О. Я. Методика викладання математики в середній школі / О. Я. Блох. – Х.: Основа, 1992. – 303 с.
8. Бродський Я., Павлов О. Шляхи оновлення змісту шкільної математичної освіти // Математика в школі. – 2008, № 1, С. 24 – 29.
9. Буковська О. Сучасний урок-лекція на тему «Вектори на площині та в просторі» // Математика в школі – 2008. - № 2.
10. Власенко О. І. Методика викладання математики / О. І. Власенко. – К., 1974. – 260 с.
11. Дендеренко О. О., Шарко В. Д. Проблемне навчання, як освітня технологія // Відкритий урок. – 2002. - № 2. – с. 13-14.
12. Дичаківська І. М. Інноваційні педагогічні технології: Навчальний посібник / І. М. Дичаківська. – К.: Академвидав, 2004. – 352 с.
13. Дубовик В. П. Вища математика / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: А.С.К., 2001. – 566 с.
14. Жовнір Я. М. П'ятсот задач з методики викладання математики / Я. М. Жовнір. – Х.: Основа, 1997. – 390 с.

15. Касьяненко М. Д. Підвищення ефективності навчання математики / М. Д. Касьяненко. – К., 1980. – 230 с.
16. Конет І. М. Практикум з математичної статистики / І. М. Конет, В. А. Недокіс. — Кам'янець-Подільський : Видавництво Абетка-Світ, 2009. — 216 с.
17. Лоповок Л. М. Як забезпечити ґрунтовні знання з математики / Л. М. Лоповок. – К.: Вища школа, 1987. – 334 с.
18. Методика викладання математики: Практикум / За ред. Г. П. Бевз. – 1981. – 250 с.
19. Основи педагогічної майстерності: навчально-методичний посібник / За ред. Е. І. Федорчук. – Кам'янець-Подільський: АБЕТКА, 2006. – 240 с.
20. Погорєлов О. В. Геометрія 10-11 / О. В. Погорєлов. – К.: Освіта, 2000. – 138 с.
21. Программа для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика. – К.: Навчальна книга, 2003. – 428 с.
22. Програма з елементарної математики, розроблена на основі концепції розвивальної освіти. – Житомир.: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка. – 2008. – 88 с.
23. Рой Н. Ефективне використання проблемного навчання під час викладання математики // Освіта. Тенікуми. Коледжі. – 2007. – 248 с.
24. Семененко Т. Проблемний підхід до навчання математики // Відкритий урок. – 2002. - № 3-4. – С. 24-31.
25. Семенець С. Особистісно розвивальний підхід до математичної освіти. Пізнавально-задачний метод навчання // Математика в школі. – 2008, № 11-12. – С. 26-30.
26. Слєпкань З. І. Психолого-педагогічні та методичні основи розвивального навчання математики / З. І. Слєпкань. – Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 240 с.
27. Сорока Г. І. Сучасні виховні системи та технології / Г. І. Сорока. – Харків: Веста і видавництво «Ранок», 2002. – 193 с.

28. Хмара Т. М. Навчання учнів математичної мови / Т. М. Хмара. – К.: Освіта, 2004. – 180 с.
29. Черкасов Р. С., Столяр А. А. Методика викладання математики в середній школі. / Р. С. Черкасов, А. А. Столяр. – Х.: «Основа» при Харк. ун-ті. – 304 с.
30. http://www.osvita-ukrainy.com.ua/
31. http://www.exponenta.com.ua/