Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота

магістра

з теми: «**Методика вивчення елементів теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі математики 11 класу на рівні стандарту**»

Виконала: студент 2 курсу ступеня вищої освіти магістр, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Головацька Діана Вікторівна

Керівник: **Сморжевський Ю.Л.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Рецензент: **Моцик Р.В.**, кандидат педагогічних наук, доцент

Кам'янець-Подільський – 2023 року

Зміст

ВСТУП

Актуальність дослідження. В останній редакції Закону України «Про освіту» і Національній доктрині розвитку освіти України у XXI столітті визначено напрямок розвитку національної системи освіти в країні, спрямований на підвищення інтелектуального потенціалу нації, виховання творчої особистості, здатної до активної участі в розбудові української держави.

Вивчення математики в сучасних умовах набуває особливої актуальності. Зумовлено це тим, що все більше спеціальностей потребують застосувань математичних знань, практичних навичок і умінь високого рівня. Розбудова національної школи України включає в себе удосконалення математичної освіти, основними напрямками якої є оновлення змісту і технології навчання математики. Особистісно-орієнтоване навчання, рівнева і профільна диференціація, які ґрунтуються на розробках стандартів математичної освіти, є основою для створення умов досягнення кожним учнем оптимального для нього рівня математичних знань і умінь, загального та математичного розвитку.

Сучасне і насамперед майбутнє суспільство наполегливо вимагає від працівників знань основ математичного аналізу, математичної логіки, теорії ймовірностей, інформатики, статистики.

Учні 11 класів, які зацікавлені математикою, можуть одержати сучасну підвищену і поглиблену підготовку в основному в школах нового типу, де передбачається високий рівень математичної підготовки для здібних та обдарованих дітей (гімназіях, ліцеях, профільних класах різного спрямування), які набули останнім часом поширення в Україні. Ефективну діяльність таких шкіл і класів можна забезпечувати лише за умови: розробки відповідної методичної системи навчання, зокрема уточнення цілі, завдань і змісту навчання; наявності сучасних підручників для учнів і методичних посібників для вчителів з математики та інформаційних технологій [3].

Сучасна реформа математичної освіти в школі привела до появи в навчальних програмах відносно нових змістових ліній: «Елементи теорії множин. Комбінаторика», «Початки теорії ймовірностей і вступ до статистики». Із введенням стохастичної лінії ставляться за мету вимоги, що стосуються вмінь аналізувати випадкові фактори, оцінювати ймовірність, висувати гіпотези, прогнозувати розвиток ситуації і, нарешті, приймати рішення в ситуаціях, які мають імовірнісний характер. А це передбачає формування ймовірнісно-статистичних уявлень, знань, умінь і розвитку мислення учнів. Вивчення нових для школи тем сприяє реалізації прикладної спрямованості навчання математики.

Якщо до введення нового освітнього стандарту, початки теорії ймовірностей і вступу до статистики розглядалися тільки в класах і школах з поглибленим вивченням математики, то в сучасний період вони стали базовими знаннями і уміннями для учнів. Разом з тим, зазначені теми найменше розроблені в методиці навчання математики, забезпечені досвідом учителів, незважаючи на тривалу історію їх упровадження в шкільному курсі математики [24].

Так, не визначена в повній мірі структура теоретичного матеріалу і практичних умінь в умовах диференціації навчання в школах нового типу, не розроблена методика формування знань і вмінь у процесі вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, не створені навчальні посібники з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики для зазначених класів різного профілю, не розроблена на рівні сучасних вимог система задач з прикладною спрямованістю, не досліджувалося питання наступності між основною і старшою школою, не створено методичних посібників для вчителів із зазначених тем. Перелік невирішених і недостатньо вирішених питань можна було б продовжувати з огляду на те, що проблема вивчення початків теорії ймовірностей і вступу до статистики є багатоаспектною [20].

Тому одна із актуальних на сьогодні *проблем* полягає в тому, щоб, враховуючи сучасний розвиток математики та методики навчання математики, через призму прикладної і диференційованої спрямованості навчання, виходячи із специфіки початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, розкрити можливості ефективної реалізації підвищеної і поглибленої математичної підготовки учнів загальноосвітніх та профільних шкіл, розвитку їхніх математичних здібностей, зокрема необхідних для успішного навчання у ВНЗ за різними спеціальностями, пов’язаними з математикою.

Об’єктом дослідження є процес навчання математики.

Предметом дослідження є методика вивчення початків теорії ймовірностей і математичної статистики в курсі математики 11 класу на рівні стандарту.

Мета дослідження полягає в уточненні цілей і змісту, розробці ефективних методів, форм і засобів навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в 11 класі на рівні стандарту на сучасному етапі розбудови освіти України.

Гіпотеза дослідження. Якщо уточнити цілі, завдання та зміст, розробити ефективні форми, методи і засоби навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, орієнтовані на розв'язання прикладних задач, враховуючи сучасні технології навчання та інформаційні технології, то можна забезпечити той рівень математичної підготовки із зазначених тем, який вимагається нормативними документами. Висунута гіпотеза дозволяє визначити *основні завдання* дослідження:

1) проаналізувати психолого-педагогічну, навчальну, математичну і методичну літературу, яка має відношення до проблеми дослідження та вивчити сучасний стан навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики в 11 класі рівня стандарту;

2) виявити психолого-педагогічні передумови та методичні вимоги до структури змісту теоретичного матеріалу та системи задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики;

3) розробити компоненти методичної системи навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики;

4) експериментально перевірити ефективність розробленої методичної системи та внести необхідні корективи в методичні рекомендації.

Апробація та впровадження результатів дослідження здійснювалися в ході особистого викладання за запропонованими методиками у 11-А класі ліцею №5, м. Кам'янець-Подільський, Хмельницької області.

Структура дипломної роботи. Дипломна робота складається зі вступу, двох розділів, висновків та рекомендацій, списку використаних джерел (28 найменувань).

Розділ I. Аналіз літератури по темі дослідження

1.1. Дидактична суть рівня стандарту змісту освіти

У старшій школі вивчення математики диференціюється за чотирма рівнями змісту освіти: рівнем стандарту, академічним, профільним та рівнем поглибленого вивчення математики. Кожному з них відповідає окрема навчальна програма. Математику в старшій школі на рівні стандарту вивчають на кожному напрямі, передбаченому концепцією. Це свідчить про універсальність курсу математики рівня стандарту. Особливості цього курсу подано в програмі [18]. Відповідно до програми рівня стандарту створено підручники, які цілком відповідають не тільки програмі, але й її духу, спрямованості, особливостям, які відрізняють навчання математики на цьому рівні. Про науково-методичні засади навчання математики на рівні стандарту йшлося в статті, присвяченій усвідомленню, характеристиці особливостей змісту курсу математики рівня стандарту. У ній конкретизовано ці положення стосовно змісту навчання на рівні стандарту.

Програма навчання математики на рівні стандарту [18] проектує загальні цілі й установи навчання на цьому рівні, відповідний склад знань та вмінь, якими мають оволодіти учні. Конкретизація положень програми, створення докладних рекомендацій щодо її реалізації, які враховували б особливості навчання математики на рівні стандарту, є актуальною методичною задачею. Ця актуальність пов'язана з хибними, але широко розповсюдженими уявленнями про навчання математики на рівні стандарту. Найбільш розповсюджена помилка полягає в тому, що навчання на рівні стандарту ототожнюють із навчанням майбутніх гуманітаріїв. Нерідко вважають, що рівень стандарту в навчанні математики – це спрощене, рецептурне, поверхове навчання, розраховане на учнів, які не потребують вивчення повноцінної математики. Це дуже небезпечна точка зору. Вона суперечить одній із головних тез сучасної парадигми освіти – «рівний доступ до якісної освіти».

Насправді це не так. Досвід країн, які виявили в міжнародних дослідженнях високий рівень математичної освіти (середньостатистичний!), свідчить про те, що рівень стандарту – це якісний, добротний рівень освіти, необхідний кожній людині для її соціалізації та розвитку. Спрямованість на розвиток особистості є головною ознакою загальнокультурної спрямованості навчання математики. Можливості навчання математики у формуванні дитини, зокрема її мислення, безмежні. Навчання математики є ефективним засобом розвитку всіх видів мислення: логічного, просторового, алгоритмічного, комбінаторного, абстрактного, візуального тощо. Навчання математики здатне забезпечити розвиток афективної сфери, емоційно-ціннісного сприйняття світу, формування досвіду творчої діяльності. Навчання математики на рівні стандарту має бути спрямованим на реалізацію зазначених можливостей математики.

Програма рівня стандарту визначає зміст навчання предмета, спрямований на завершення формування в учнів уявлення про математику як елемент загальної культури. При цьому не передбачається, що в подальшому випускники школи продовжуватимуть вивчати математику або пов'язуватимуть з нею свою професійну діяльність.

Мета навчання математики на рівні стандарту це, насамперед, оволодіння загальною математичною культурою, вироблення так званого математичного стилю мислення, тобто вміння класифікувати об'єкти, вміння встановлювати закономірності, виявляти зв'язки між різними явищами, вміння приймати рішення тощо. Формування навичок застосування математики є однією із головних цілей викладання математики. Дієвим засобом реалізації прикладної спрямованості шкільного курсу математики є широке систематичне застосування методу математичного моделювання протягом усього курсу. Це стосується введення понять, виявлення зв'язків між ними, характеру ілюстрацій, доведень, системи вправ і, нарешті, системи контролю. Інакше кажучи, математики треба так навчати, щоб учні вміли її застосовувати.

Спектр профілів, типові навчальні плани яких передбачають навчання математики на рівні стандарту, досить широкий. Безумовно, ця широта є однією з головних труднощів у реалізації програми рівня стандарту в підручниках. Потрібно мати принаймні два типи підручників для реалізації цієї програми, щоб вони забезпечували профільну спрямованість навчання математики, тобто допомагали засобами математики становленню особистості, сприяли створенню умов для самовизначення особистості, її соціалізації та професіоналізації. Умовно один із них має бути орієнтованим на гуманітарну сферу діяльності, другий – на природничу.

Програма передбачає як сумісне, так і роздільне вивчення геометрії та алгебри і початків аналізу. Перший підхід в умовах вивчення предмета на рівні стандарту має певні переваги у порівнянні з розподілом курсу «Математика» на два курси – «Алгебра і початки аналізу» і «Геометрія». Він дозволяє забезпечити цілісність навчання математики, можливість концентрації навчальної діяльності на певному відрізку часу навколо невеликої кількості понять і фактів, оптимально розподілити час на вивчення окремих тем з урахуванням особливостей контингенту учнів, забезпечити природні внутрішні й міжпредметні зв’язки тощо. Такий підхід особливо важливий в умовах загальнокультурної спрямованості навчання математики.

1.2. Аналіз психологічної, дидактичної і методичної літератури по темі дослідження

Аналіз психолого-педагогічних джерел дає підстави дійти висновку, що дидактична суть моделювання рівня стандарту змісту освіти являє собою багаторівневий процес підготовки, безпосередньої розробки і експертної перевірки якості моделі змісту навчання учнів у сукупності її складових компонентів у цілях оволодіння ними системою знань, умінь і навичок, тобто системою професійної компетентності, відповідно до вимог державного освітнього стандарту освіти [7].

На сучасному етапі розбудови шкільної математичної освіти основними цілями навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в 11 класі на рівні стандарту є:

1) забезпечення свідомого і міцного оволодіння знаннями, навичками і уміннями з даної змістової лінії, які потрібні в повсякденному житті, майбутній професійній діяльності і яких буде достатньо для вивчення інших предметів, продовження освіти, формування навичок моделювання випадкових явищ під час досліджень природи і суспільства;

2) розвиток імовірнісно-статистичного мислення учнів, математичної інтуїції і культури, формування самостійності, ініціативності, творчості, здатності адаптування до умов, що змінюються;

3) формування наукового світогляду, поваги до національної культури і традицій України, позитивних рис характеру, доброзичливості, толерантності, сміливості, обґрунтованості суджень, економічне, екологічне, трудове виховання, професійна орієнтація [25].

Імовірнісно-статистична змістовно-методична лінія повинна ґрунтуватися на принципах: 1)прикладної спрямованості; 2)інтегрованості; 3)міжпредметних зв'язків; 4) довготривалості; 5) диференціації.

Змістово-методична лінія містить: імовірнісну і статистичну складові, які органічно доповнюють одна одну. Їх взаємозв’язок забезпечує системність уявлень про роль емпіричних засобів і теоретичних методів у пізнанні явищ навколишнього світу і їх імовірнісної структури [9].

Сучасний етап навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики характеризується такими протиріччями:

1) програми для шкіл і класів, що навчаються на рівні стандарту не в повній мірі відповідають сучасним вимогам суспільства і потребам особистості учнів, тоді як володіння ними необхідне кожному учаснику виробничого процесу і суспільного життя;

2) обсяг і рівень складності навчального матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики є завищеним по відношенню до необхідного рівня. Надмірний обсяг і невиправдана складність перешкоджає розумінню і розвивають в учнів невіру у свої сили;

3) існує наявний розрив між знаннями, навичками і вміннями учнів: процес формалізації практичної задачі, пов'язаної з випадковим явищем, викликає великі труднощі навіть при наявності теоретичних знань;

4) більшість учнів не можуть розв'язувати навіть прості ймовірнісні задачі, оскільки нечітко уявляють, що таке випадкова подія, елементарна випадкова подія. Дуже часто плутають поняття незалежність і несумісність випадкових подій. А це в свою чергу призводить до неправильного використання теорем додавання і множення ймовірностей;

5) учні іноді не можуть відрізняти імовірність перетину випадкових подій від умовної ймовірності;

6) не завжди правильно розуміють імовірнісний зміст числових характеристик випадкових величин, не говорячи про економічний, технічний зміст [26].

Для глибокого і правильного розуміння основних положень теорії ймовірності необхідно чітке розуміння змісту початкових фундаментальних понять учнями, потрібен постійний зв'язок теорії з практикою.

Етапи формування стохастичних уявлень, знань і умінь учнів полягають у: знайомстві з найпростішими стохастичними ситуаціями;

накопиченні систематизованих уявлень про явища стохастичної природи; створенні науково-технічної основи стохастичних уявлень [16].

Сформульовані методичні вимоги до навчання елементів стохастики:

1) чітке визначення цілей і завдань навчання нової змістової лінії у зазначених класах;

2) зміст повинен забезпечувати наявність системи теоретичних імовірнісно-статистичних знань, відображати сучасний стан розвитку науки і техніки;

3) забезпечення формування міцних навичок і вмінь при розв'язуванні стохастичних задач;

4) спрямування на встановлення тісного зв'язку ймовірнісних моделей з предметним світом, організацію побудови і тлумачення моделей як провідних форм діяльності учнів;

5) навчання повинно бути націленим на використання творчих можливостей школярів як послідовності самостійних «відкриттів», тобто повинно мати евристичний характер;

6) у навчанні повинні встановлюватися і реалізовуватися міжпредметні зв'язки в якості взаємодії між шкільними дисциплінами, особливо профільними (за профілем класу);

7) навчання повинно здійснюватись на основі профільної і рівневої диференціації;

8) поряд з традиційними засобами навчання мають набути широкого використання засоби інформаційно-комунікаційних технологій [27].

При виборі головних цілей будь-якого курсу теорії ймовірностей належить керуватися такими мотивами:

а) теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона відіграє важливу роль у розвитку мислення учнів 11 класів.

б) теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що її висновки знаходять застосування у повсякденному житті, науці, техніці тощо.

в) теорію ймовірностей необхідно викладати тому, що вона має важливе, ні з чим незрівнянне значення для математичної освіти.

Прокоментуємо коротко ці аргументи.

а) ознайомлення з основними поняттями теорії ймовірностей необхідне для того, щоб ми могли пізнавати оточуючий світ і створювати одну з науково-обгрунтованих картин цього світу. Викладання будь-якого розділу математики благодатно позначається на розумовому розвитку учнів, оскільки прищеплює їм навички ясного логічного мислення, що оперує чітко визначеними поняттями. Все сказане про викладання будь-якого розділу математики в повному обсязі стосується і викладання теорії ймовірностей, але навчання «законам випадку» грає дещо більшу роль і виходить за межі звичайного. Слухаючи курс теорії ймовірностей, учень пізнає, як застосовувати прийоми логічного мислення в тих випадках, коли необхідно мати справу з невизначеністю (а такі випадки виникають на практиці).

Вивчення теорії ймовірностей належним чином впливає і на характер учнів, наприклад, розвиває хоробрість, оскільки дає змогу зрозуміти, що при певних обставинах невдачі можна віднести до випадковостей і, отже, зазнавши невдачі, зовсім не варто відмовлятися від боротьби за досягнення поставленої мети. Люди, що знаходяться на низькому рівні розвитку, схильні до надмірної недовірливості: яка би біда не трапилась з ними, вони схильні приписувати її чиємусь злому наміру, навіть якщо подібні твердження позбавлені найменших підстав. Пояснюється це необізнаністю з таким поняттям, як випадковість. Викладання теорії ймовірностей може принести безперечну користь, оскільки дозволяє остаточно порвати з пережитками магічного мислення кам'яного століття. Вивчаючи теорію ймовірностей, люди стають більш доброзичливими і толерантними до оточуючих, і, отже, легше вписуються в життя суспільства.

б) у повсякденному житті нам постійно доводиться зустрічатися з випадковістю, і теорія ймовірностей вчить нас, як діяти раціонально з урахуванням ризику, пов'язаного з прийняттям окремих рішень. Гарним прикладом застосування теорії ймовірностей у повсякденному житті може слугувати вибір найбільш доцільної форми страхування. При плануванні сімейного бюджету або подорожі за кордон часто доводиться оцінювати витрати, які, у певній мірі, мають випадковий характер. Ці приклади показують, що ознайомлення на тому чи іншому рівні із законами випадку необхідні кожному.

Застосування теорії ймовірностей у науці, техніці, економіці тощо набуває раз у раз зростаючого значення. Саме тому у все більшого числа людей в процесі роботи виникає необхідність у вивченні теорії ймовірностей. Зрозуміло, обсяг курсу теорії ймовірностей залежить від типу навчального закладу. Але не треба забувати и про інше: сучасна освічена людина, незалежно від професії і роду діяльності, повинна мати принаймні загальне уявлення про те, що таке атомна енергія, радіоактивність, генетика і т. ін. Перелік необхідних знань включає в себе і ознайомлення, нехай навіть суто поверхове, з найпростішими поняттями теорії ймовірностей. Нині, коли прогноз погоди містить повідомлення про ймовірність дощу завтра, кожен повинен знати, що власне це означає.

в) вивчення теорії ймовірностей сприяє кращому розумінню взаємозв'язків між дійсністю і математикою, математичних моделей дійсності. Якщо в курсі математики теорія ймовірностей обминається повною мовчанкою, то в учнів складається невірне уявлення про істинний характер математики та її застосування. Люди, не знайомі з теорією ймовірностей, поділяють помилкову думку, нібито математичні методи можна застосовувати лише в тих випадках, коли йдеться про прості й точні залежності між величинами, які можна точно виміряти і обчислити. Нерідко можна почути і твердження, наче математичні методи непридатні для вивчення і опису тих або інших явищ, через те що ті «дуже складні». Подібний забобон живе в свідомості людей, які не вивчали ні математику, ні, тим паче, теорію ймовірностей. Саме ті, хто дотримується цих докорінно невірних поглядів, до недавнього часу перешкоджали (принаймні, у деяких країнах) застосуванню математичних методів в економіці, соціології, біології, психології та інших галузях науки. Не можна не згадати й про думку тих, хто вважає, що викладання теорії ймовірностей не виходить за межі програм з математики в навчальних закладах середнього або нижчого рівня. Ця думка узгоджується з іншими сучасними тенденціями у викладанні математики, що легко пояснити: її поділяють ті, хто викладає теорію ймовірностей і з своєю діяльністю реалізує нові тенденції. Цілком очевидно, що викладання теорії ймовірностей спрощується, якщо учні заздалегідь ознайомлені з теорією множин або теорією булевих алгебр. З іншого боку, вивчення теорії ймовірностей дає чудову нагоду для більш ґрунтовного і глибокого ознайомлення як з теорією множин, так і з теорією булевих алгебр.

В Україні сьогодні відбувається процес впровадження елементів стохастики як рівноправної складової в обов'язкову шкільну освіту. Всі державні освітні документи останніх років містять імовірнісно-статистичну лінію у курсі математики. Програма з математики для 11 класів рівня стандарту [18], розроблена на основі «Проекту освітнього стандарту» передбачає вивчення нової змістової лінії у 11 класі протягом 10 годин; вона закладає основи імовірнісно-статистичних підходів до аналізу явищ повсякденного життя.

Сучасна концепція шкільної математичної освіти орієнтована перш за все на урахування індивідуальності дитини, її інтересів і нахилів. Цим визначаються критерії добору навчального матеріалу, розробка і впровадження нових методик інтерактивного навчання, змін у вимогах до математичної підготовки учнів.

З цієї точки зору, з позиції «математики з людським обличчям», коли мова йде не тільки про навчання математики, а й про формування особистості за допомогою математики, необхідність розвитку у всіх школярів імовірнісної інтуїції і стохастичного мислення стає насущним завданням. До того ж мова сьогодні йде про вивчення елементів стохастики у рамках змістово-методичної лінії протягом усіх років навчання, тому елементи стохастики повинні носити більш глибокий науковий і прикладний характер.

Сучасна теорія ймовірностей являє собою гілку метричної теорії функцій, своєрідну не тільки за методами математичного дослідження, а за постановкою задачі.

А.В. Скороход вважає, що «...теорія ймовірностей посідає серед математичних наук особливе місце, ...теорія ймовірностей виступає до всієї іншої математики як споживач». Спеціалісти з теорії ймовірностей широко використовують у своїй роботі різноманітні математичні методи. Проте спеціалісти з інших математичних наук за незначними винятками не знайомі з азами теорії ймовірностей. Теорія ймовірностей неначе відокремлена від іншої математики напівнепроникною плівкою – результати інших дисциплін легко проникають через цю плівку, а зворотного руху поки що не видно. Беручи до уваги, що живе існування науки – в людській свідомості, легко прийти до висновку, що ця плівка знаходиться у свідомості, причому в свідомості «неймовірнисників». На його думку теорія ймовірностей має такі особливості:

1. Найбільш інтуїтивна серед математичних наук.
2. Досить складний математичний апарат, що використовується для розв'язування задач з простими формулюваннями.
3. Більшість задач можуть бути сформульовані в комбінаторному варіанті (наближено) і розв'язані комбінаторними методами.

Побудова стохастичної змістово-методичної лінії шкільного курсу математики базується на наступних основних принципах: прикладної спрямованості; інтегрованості; міжпредметних зв'язків; довготривалості; диференціації [28].

1.3. Аналіз підручників з математики щодо викладу теми «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики»

На даний час є три діючих підручника з математики для 11 класу рівня стандарту:

1) «Математика 11 клас» О. М. Афанасьєва, Я. С. Бродський, О.Л. Павлов, А. К. Сліпенко [1];
2) «Математика 11 клас» Г.П. Бевз, В.Г. Бевз [2];
3) «Математика 11 клас» М.І. Бурда, Ю.І. Мальований, Т.В. Колесник [6].

Проаналізувавши останній розділ підручника з математики для 11 класу рівня стандарту [1] – «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики», можна зазначити, що оскільки процес формування ймовірнісно-статистичного мислення має розрив (відповідні теми вивчаються в 6, 9 і 11 класах), перший параграф цього розділу присвячено повторенню, систематизації, поглибленню і розширенню матеріалу, що вивчався в основній школі. Певну увагу тут приділено зв'язку між класичним і статистичним підходами до поняття ймовірності, у цьому параграфі формулюється поняття випадкового випробування, випадкової події, ймовірності події, протилежної події, відносної частоти події, подаються властивості ймовірності та відносної частоти, а також наводяться приклади. У другому параграфі цього розділу викладаються елементи комбінаторики, які в основній школі майже не вивчалися (за винятком програмової вимоги до учнів 5 класу щодо вміння розв'язувати найпростіші комбінаторні задачі без вказівки методів). Зважаючи на обмаль навчального часу, можна обмежитися розв'язанням задач на підставі комбінаторних правил множення і додавання, і за допомогою методу розв'язування цих задач вводяться основні правила комбінаторики. У даному параграфі чітко формулюються комбінаторні правила множення та додавання. У підручнику викладено також поняття перестановки, розміщення і комбінації, наведено формули для обчислення їх кількості, але цей матеріал, згідно з програмою, не є обов'язковим і може вивчатися за наявності потреб і можливостей. Останній параграф розділу присвячено вибірковому методу у статистиці. З одного боку, це є спробою уникнути дублювання з матеріалом, що вивчався у 9 класі, з іншого (і це головне) – дає змогу формувати в учнів початкові уявлення про задачі, які розв'язує математична статистика. У параграфі подається поняття статистики як науки, за допомогою наведеної таблиці вводяться поняття варіанти, частот, об'єму сукупності, варіаційного ряду, дискретного та інтервального варіаційного ряду. Розглядається графічне зображення варіаційних рядів, а саме полігон частот та гістограма. Вводяться поняття статистичних характеристик: середнє арифметичне, мода та медіана, подаються формули для обчислення середньої арифметичної та наводяться приклади. А також дається означення таких понять: розмах, генеральна сукупність, вибірка, репрезентативна та випадкова вибірка. У кінці розділу подані задачі для розв'язування, а також наведений підсумок у вигляді основних означень та формул.

Аналізуючи розділ «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» підручника [2], можна зазначити, що вивчення даного розділу розпочинається з подання понять множини та підмножини, наводяться їх приклади. Подається поняття скінченних та нескінченних множин, рівних та порожніх множин, перерізу, об'єднання та різниці множин.

У другому параграфі цього розділу вводиться поняття комбінаторики, а також формулюються комбінаторні правила суми і добутку, і демонструється їх застосування на прикладі задач.

У підручнику також поданні поняття розміщення, перестановки та комбінації, сформульовані правила їх обчислення і наведені приклади задач на застосування цих понять.

У наступному параграфі розглядається поняття статистики як науки про збирання, обробку та вивчення даних, пов'язаних з масовими явищами. За допомогою наведеної таблиці про поширення розмірів чоловічого взуття, вводяться поняття вибірки, частоти, варіанти, варіаційного ряду, розмаху вибірки, моди і медіани вибірки; також подаються поняття середнього арифметичного і середнього квадратичного і формули для їх обчислення.

У цьому підручнику також розглядається графічне подання інформації про вибірки. Тут формулюються такі поняття як статистична таблиця, її підмет і присудок, діаграма, гістограма, полігон розподілу. А також за допомогою малюнків демонструються кругові (секторні) діаграми, стовпчасті діаграми.

У цьому розділі також розглядаються випадкові події та їх ймовірності. Тут деякі поняття, такі як: ймовірнісний експеримент, подія та ймовірність події уже знайомі учням з 9-го класу, тому досить їх пригадати і повторити. Далі вводяться поняття неможливої, достовірної та випадкової події, наводяться їх приклади; дається означення елементарної події, простору елементарних подій, сприятливої події для випадкової події, ймовірності випадкової. Подається класичне означення випадкової події та формула для її обчислення. Розглядається відносна частота події та випадкові величини. Тут використовується поняття статистичної ймовірності. Для цього вводиться поняття відносної частоти події та статистичне означення ймовірності. Формулюється означення таких випадкових величин: математичне сподівання, дисперсія.

У кінці кожного параграфа подані задачі для розв'язування, а в кінці розділу завдання для самостійної роботи.

Висновок

Отже, багато дослідників звертали увагу на необхідність ранньої і довготривалої пропедевтики початкових понять теорії ймовірностей і математичної статистики. Без наявності достатнього багажу життєвого статистичного досвіду, звичок, інтуїції, ідей, уявлень, обумовлених спілкуванням зі світом випадковостей, вивчення теорії ймовірностей натикається на деяке психологічне відчуження, внутрішнє несприйняття учнями. На наш погляд, вивченню ймовірнісних понять повинен передувати процес накопичення інтуїтивних уявлень про конкретні випадкові явища оточуючого світу. До того ж такий процес не повинен бути стихійним і короткотерміновим.

Розділ ІІ. Методика вивчення теми «Елементи теорії ймовірностей та математичної статистики» в курсі математики 11 класу на рівні стандарту

2.1. Методика вивчення елементів комбінаторики

На початку вивчення даної теми учням необхідно дати поняття про такий розділ математики, як комбінаторика, і навести приклади декількох комбінаторних завдань для прищеплення інтересу до цього розділу.

У науці та практиці часто зустрічаються задачі, розв'язуючи які доводиться складати різні комбінації з кінцевого числа елементів і підраховувати кількість комбінацій. Такі завдання отримали назву комбінаторних завдань, а розділ математики, в якому розглядаються подібні завдання, називають комбінаторика. Слово «комбінаторика» походить від латинського слова combinare, яке означає «сполучати, поєднувати». Методи комбінаторики знаходять широке застосування у фізиці, хімії, біології, економіці, теорії ймовірностей та інших галузях знань [3].

Наведемо приклади деяких комбінаторних задач.

1) Скількома способами можна розташувати в електричному ланцюзі 7 різних приладів?

2) Скільки словників треба видати, щоб можна було безпосередньо виконувати переклади з будь-якого з 5 мов: російської, англійської, французької, німецької, італійської, на будь-який інший з цих 5 мов?

3) Вова точно пам'ятає, що у формулі азотної кислоти поспіль йдуть літери H, N, O і що є один нижній індекс – чи то двійка, чи то трійка. Скільки є варіантів, у яких індекс стоїть не на другому місці?

4) Скільки різних типів гамет може дати гібрид, гетерозиготний по 3 незалежним ознаками?

5) Перерахувати всі тризначні числа, у запису яких зустрічаються тільки цифри 1 і 2.

6) Три друга – Антон, Борис і Віктор – придбали два квитки на футбольний матч. Скільки різних варіантів відвідування футбольного матчу для трьох друзів?

Таким чином, розрізняють такі типи комбінаторних завдань:

- завдання, в яких потрібно перерахувати всі рішення (приклад 5).
- завдання, що складаються у вимозі виділити з усіх можливих рішень таке, яке задовольняє заданому додатковій вимозі (приклад 3).
- завдання, в яких потрібно підрахувати число рішень (приклад 1, 2, 6, 4).

Процес навичок підрахунку комбінаторних об'єктів можна розчленувати на три етапи в залежності від часу навчання та методів підрахунку:

- підрахунок методом безпосереднього перебору;
- підрахунок з використанням комбінаторних принципів;
- підрахунок з використанням формул комбінаторики [21].

Кожен з цих етапів готує основу для формування навичок наступних етапів. Тому на початковому етапі з учнями потрібно обов'язково розглянути безформульні методи розв’язування задач [11].

Розглянемо основні методи, використовувані в рішенні комбінаторних задач.

Перебір всіх можливих варіантів

Операція перебору розкриває ідею комбінування, служить основою для формування комбінаторних понять, тому на першому місці має стояти завдання з формування навичок систематичного перебору.

Приклад 1. З групи тенісистів, до якої входять чотири людини – Антонов, Григор'єв, Сергієв і Федоров, тренер виділяє пару для участі у змаганнях. Скільки існує варіантів вибору такої пари?

Складемо спочатку всі пари, в які входить Антонов (для стислості будемо писати перші літери прізвищ). Отримаємо три пари: АГ, АС, АФ.

Випишемо тепер пари, в які входить Григор'єв, але не входить Антонов. Таких пар дві: ГС, ГФ.

Далі складемо пари, в які входить Сергієв, але не входить Антонов і Григор'єв. Така пара тільки одна: СФ.

Інших варіантів складання пар немає, так як всі пари, в які входить Федоров, вже складені.

Отже, ми отримали 6 пар: АГ, АС, АФ, ГС, ГФ, СФ. Значить, всього існує 6 варіантів вибору тренером пари тенісистів з даної групи.

Спосіб міркувань, яким ми скористалися при вирішенні завдання, називають перебором можливих варіантів.

Тут же необхідно пояснити учням, що в даному прикладі нам не важливий порядок вибору пари: Антонов і Григор'єв або Григор'єв і Антонов, і привести приклад задачі, де враховується порядок елементів у комбінації.

Приклад 2. Три друга – Антон, Борис і Віктор – придбали два квитки на футбольний матч на 1-е і 2-е місця першого ряду стадіону. Скільки у друзів є варіантів зайняти ці два місця на стадіоні?

Якщо на матч підуть Антон і Борис, то вони можуть зайняти місця двома способами: 1-е місце - Антон, 2-е - Борис, або навпаки. Аналогічно Антон і Віктор, Борис і Віктор. Таким чином, ми отримали 6 варіантів: АБ, БА, АВ, ВА, БВ, СБ [19].

Наступна система завдань спрямована на формування вмінь учнів систематичного перебору, складання комбінацій з урахуванням і без урахування порядку.

Завдання для учнів:

1. Перерахувати знайомі види чотирикутників.

2. У кафе пропонують дві перші страви: борщ і розсольник – і чотири другі страви: гуляш, котлети, сосиски, пельмені. Вкажіть всі обіди з двох страв, які може замовити відвідувач.

3. Скільки двозначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1, 2, 3, за умови, що цифра в числі не може повторюватися? (Перебір з обмеженням).

4. (Усно) Важливий чи ні порядок у наступних вибірках (комбінаціях):

а) капітан волейбольної команди та його заступник;

б) три ноти в акорді;

в) «шість людей залишаться прибирати клас!»;

г) дві серії для перегляду з нового багатосерійного фільму.

5. Придумайте самі чотири різні ситуації, у двох з яких порядок вибору важливий, а в двох – ні.

6. Стадіон має 4 входи: A, B, C, D. Вкажіть всі можливі способи, якими відвідувач може увійти через один вхід, а вийти через інший. Скільки таких способів?

7. У магазині продають кепки трьох кольорів: білі, червоні і сині. Кіра і Олена купують собі по одній кепці. Скільки існує різних варіантів покупок для цих дівчаток? Перерахуйте їх [15].

Далі слід розглянути два основних правила комбінаторики, за допомогою яких розв'язується багато комбінаторних задач. Вивчення цих правил доцільно розпочати з розгляду задач, а вже потім чітко сформулювати самі правила.

Задача 1. У місті N є два університети — політехнічний та економічний. Абітурієнту подобаються три факультети в політехнічному університеті та два – в економічному. Скільки можливостей має студент для вступу в університет?

Розв'язання: позначимо буквою A множину факультетів, які обрав студент в політехнічному університеті, а буквою B — в економічному. Тоді A={m, n, k}, B={p, s}. Оскільки ці множини не мають спільних елементів, то загалом абітурієнт має 3 + 2 = 5 можливостей вступати в університет. Описану ситуацію можна узагальнити у вигляді твердження, яке називається правилом суми.

Якщо елемент деякої множини A можна вибрати m способами, а елемент множини B – n способами. То елемент з множини A або з множини B можна вибрати m+ n способами.

Правило суми поширюється і на більшу кількість множин.

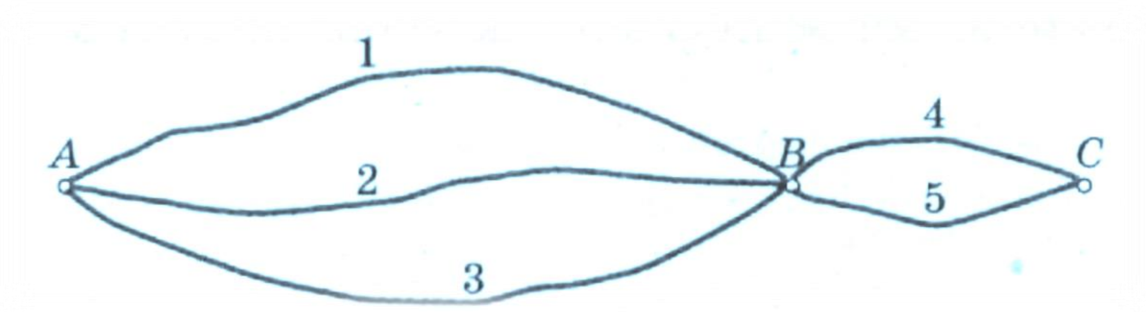
Задача 2. Родина з чотирьох осіб планує літній відпочинок. Діти обрали чотири міста – Одесу, Євпаторію, Ялту, Феодосію. Батьки визначилися з базами відпочинку так: в Одесі – 1, у Євпаторії – 3, в Ялті – 2, в Феодосії – 2. Скільки можливостей вибору літнього відпочинку має родина?

Розв'язання: оскільки всі бази відпочинку різні, то для розв'язання задачі досить знайти суму елементів усіх множин, про які йдеться: 1 + 3 + 2 + 2 = 8. Отже, родина може обирати варіант відпочинку з 8 можливих.

Задача 3. Від пункту A до пункту B ведуть три стежки, а від B до C – 2. Скількома маршрутами можна пройти від A до C?

Розв'язання: щоб пройти від A до B, треба вибрати одну з трьох стежок: 1, 2 або 3(мал. 1). Після цього треба вибрати одну з двох інших стежок: 4 або 5. Усього від A до C ведуть шість маршрутів, або 2 · 3 = 6. Усі ці маршрути можна позначити за допомогою пар:

(1; 4), (1; 5), (2; 4), (2; 5), (3; 4), (3; 5).

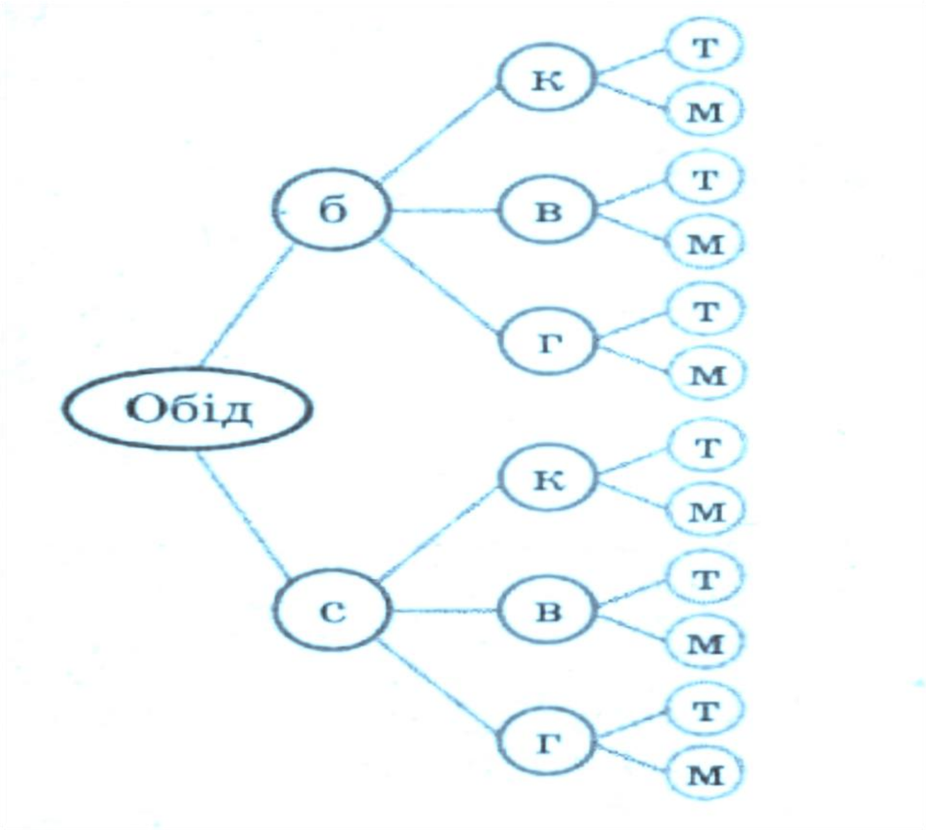


Мал.1.

Узагальнимо описану ситуацію. Якщо перший компонент пари можна вибрати m способами, а другий – n способами, то таку пару можна вибрати mn способами. Це – правило добутку, але його часто називають основним правилом комбінаторики. Потрібно звернути увагу на те, що йдеться про впорядковані пари, складені з різних компонентів [26].

Правило добутку поширюється і на впорядковані трійки, четвірки та будь-які інші впорядковані скінченні множини. Зокрема, якщо перший компонент впорядкованої трійки можна вибрати m способами, другий – n способами, а третій – k способами, то таку впорядковану трійку можна обрати mnk способами. Наприклад, якщо їдальня на обід приготувала 2 перші страви – борщ (б) і суп (с), 3 другі – котлети (к), вареники (в), голубці (г) і 2 десертні тістечка (т) і морозиво 9 (м), то всього з трьох страв їдальня може запропонувати 12 різних наборів, або 2 · 3 · 2 = 12.

Описаній ситуації відповідає діаграма на малюнку 2. Такі діаграми називають деревами.



Мал. 2.

Щоб розв'язувати складніші задачі на визначення ймовірностей подій, корисно навчитись обчислювати раціональним способом кількість різних вибірок з даної множини елементів. Нехай дано множину з m елементів – a, b, …, k. Вибираючи тим чи іншим способом елементи з цієї множини, можна утворити різні вибірки, тобто підмножини даної множини або впорядковані підмножини. Залежно від того, чим відрізняється одна вибірка від інших, їх називають по-різному.

Вибірки, які відрізняються одна від одної або елементами, або порядком їх розміщення, називають розміщеннями.

Наприклад, з 3 елементів a, b, c можна утворити такі розміщення по 2 елементи:

$$ab, ac, ba, bc, ca, cb.$$

Вважають, що існує 6 різних розміщень з 3 елементів по 2. Число розміщень з m елементів по n позначають A_m^n. Тому можна записати: $A_3^2 = 6$. У разі A_m^n завжди $n \leq m$.

Як обчислити A_m^n при різних натуральних значеннях m та n? Нехай маємо множину з m елементів. Перший елемент можна вибрати m способами: взяти будь-який з m елементів. Другий елемент, щоб за першим, доведеться вибирати з решти $m – 1$ елементів, тобто $m – 1$ способами. Тому впорядковані пари двох перших елементів можна вибрати $m(m – 1)$ способами. Третій елемент, щоб записати його після другого, доведеться вибирати з решти $m – 2$ елементів. Якщо за кожною з $m(m – 1)$ різних пар даних елементів записати $m – 2$ способами третій елемент, то утвориться $m(m – 1)(m – 2)$ різних упорядкованих трійок елементів. Аналогічно можна вибрати $m(m – 1)(m – 2)(m – 3)$ упорядкованих четвірок і т.д. Продовжуючи такі міркування, доходимо висновку, що для будь-яких натуральних чисел m та n $A_m^n = m(m – 1)(m – 2)(m – 3) \dots (m – (n – 1))$.

Управій частині рівності — n множників, тому результат можна сформулювати у вигляді такого правила: кількість розміщень з m елементів по n дорівнює добутку n послідовних натуральних чисел, найбільше з яких m.

Наприклад: $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

Задача 4. Скількома способами збори з 20 осіб можуть обрати голову та секретаря?

Розв’язання: йдеться про впорядковані 2-елементні підмножини множини, що складається з 20 елементів. Таким розміщенням буде:

$$A_{20}^{2} = 20 \cdot 19 = 380.$$

Відповідь: 380 способами.

Якщо розглянути розміщення за умови, що n = m, то отримаєм множини, які відрізняються лише порядком.

Розміщення з m елементів по m називаються перестановками. Кількість перестановок з n елементів позначають символом P_n. Наприклад, з трьох елементів a, b, c можна утворити 6 різних перестановок:

abc, acb, bac, bca, cab, cba.

Отже, $P_3 = 6$. А взагалі кількість перестановок з m елементів дорівнює кількості розміщень з m елементів по m, тобто завжди

$$P_m = m(m-1)(m-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1.$$

Завжди $P_m = m!$. Наприклад,

$$P_6 = 6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 720.$$

Задача 5. Скількома способами можна скласти список із 10 прізвищ?

Розв’язання: $P_{10} = 10! = 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 = 3\ 628\ 800$.

Відповідь: 628 800 способами.

Вибірки, які відрізняються одна від одної принаймі одним елементом, а не порядком їх розміщення, називають комбінаціями. Кількість комбінацій з m елементів по n позначають C_m^n. Тут також $n \leq m$. Наприклад, із чотирьох елементів a, b, c, d по три можна скласти 4 комбінації:

abc, abd, acd, bcd.

Якщо з кожної комбінації з m елементів по n зробити P_n перестановок, то дістанемо A_m^n розміщень. Тому $C_m^n \cdot P_n = A_m^n$, звідки

$$C_m^n = \frac{m(m-1)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n}.$$

Якщо помножемо чисельник і знаменник здобутого дробу на (m – n)!, то дістанемо формулу для обчислення з m елементів по n:

$$C_m^n = \frac{m!}{n!(m-n)!}.$$

Наприклад, $C_6^4 = \frac{6!}{4!(6-4)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 1 \cdot 2} = 15$.

Потрібно звернути увагу на те, що $C_m^m = 1$, $C_m^1 = m$.

Задача 6. Скількома способами з 25 учнів можна вибрати на збори два делегати?

Розв’язання: тут m = 25, n = 2 і порядок немає значення, тому

$$C_{25}^2 = \frac{25 \cdot 24}{1 \cdot 2} = 300.$$

Відповідь: 300 способами.

2.2. Методика вивчення елементів теорії ймовірностей

Вивчення поняття події часто поєднується у учнів з труднощами психологічного характеру. Його зазвичай учні сприймають як одиничне виконання якої-небудь дії. Тому формування уявлення про дане поняття має починатися з розгляду найпростіших імовірнісних моделей.

Перші праці, пов'язані з теорією ймовірності належали Галілею. У нашому житті часто доводиться мати справу з випадковими явищами, тобто ситуаціями, результат яких не можна точно передбачити. Наприклад, ми не можемо точно сказати при підкиданні монети впаде вона вгору гербом або цифрою [22]. Аналогічно не можемо точно сказати, скільки очок виб'є стрілок на змаганнях.

Побудова та дослідження моделей різних процесів, пов’язаних з поняттям випадковості, – сфера математичної статистики й теорії ймовірностей. До таких процесів, наприклад, належать ризики на виробництві та в банківській справі, масові захворювання серед рослин, тварин чи людей, азартні ігри.

З 9-го класу ви знаєте, що найважливішими поняттями теорії ймовірностей є: ймовірнісний експеримент (випробування, спостереження), подія (наслідок випробування) та ймовірність події.

Тоді випадковою подією буде називатися будь-яка подія, пов'язана з випадковим експериментом.

Під випробуванням в теорії ймовірностей прийнято приймати спостереження якогось явища при дотриманні певного набору умов, який кожен раз повинен виконуватися при повторенні даного випробування. Якщо те ж саме випробування проводити при іншому наборі умов, то вважається, що це вже інше випробування.

Результати випробувань можна охарактеризувати якісно і кількісно.

Якісна характеристика полягає в реєстрації будь-якого явища, яке може спостерігатися чи ні при даному випробуванні. Будь-яке з явищ називається подією.

Ще одним елементом, що сприяє формуванню уявлення про поняття «подія», є наступна класифікація. Подія буває:

- достовірною (завжди відбувається в результаті випробування);
- неможливою (ніколи не відбувається);
- випадковою (може відбутися або не відбутися в результаті випробування).

Наведемо приклади випробувань та їх окремих наслідків — деяких подій (таблиця 2.1.).

Таблиця 2.1.

№	**Випробування**	**Подія**
1	Падає монета	Упала догори гербом
2	Грають команди А і С	Виграла команда С
3	Людина чекає ранку	Настав ранок
4	Падає гральний кубик	Випало 0 очок

Остання подія неможлива, бо на гранях грального кубика немає нуля. Подія 3 достовірна (вірогідна), бо після ночі завжди наступає ранок. Події 1 і 2 випадкові.

Прийнято вважати, що неможлива і вірогідна події – окремі випадки випадкової події.

Події позначають великими латинськими літерами A, B, C,… або однією латинською буквою з індексом: $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$. Зміст події подають у фігурних дужках. Наприклад, третю подію з таблиці можна записати так:

$$A_3 = \{\text{настав ранок}\}.$$

Сказати наперед про випадкову подію, що вона відбудеться чи не відбудеться, неможливо. Якщо ця подія масова, тобто виконується багато разів і за однакових умов, то ймовірність її настання можна охарактеризувати деяким числом.

Це можна зробити тоді, коли наслідки випробувань становлять скінченну множину і є рівноможливими. Тобто в умовах проведеного випробування немає підстав вважати появу одного з наслідків більш чи менш можливим за інші.

Приклад 1. Кидають один раз правильний однорідний гральний кубик і фіксують суму очок на грані, що випала догори. Результатом такого випробування можуть бути 6 різних подій:

E_1 = {випадкове одне очко};

E_2 = {випадкове два очка};

E_3 = {випадкове три очка};

E_4 = {випадкове чотири очка};

E_5 = {випадкове п’ять очок};

E_6 = {випадкове шість очок}.

Ці шість подій охоплюють і вичерпують усі можливі наслідки експерименту. Вони попарно несумісні, бо щоразу випадає тільки одна кількість очок. Усі шість подій однаково можливі, бо йдеться про однорідний кубик правильної форми, і спритність гравця виключається. У такому разі вважають, що для здійснення кожної події існує один шанс із шести.

Кожну з подій E_1 — E_6 для наведеного вище випробування називають елементарною, а всю їх множину – простором елементарних подій.

Елементарною подією називають кожен можливий наслідок імовірнісного експерименту. Множину всіх можливих наслідків експерименту називають простором елементарних подій.

Якщо простір елементарних подій для деякого випробування складається з n рівноможливих несумісних подій, то ймовірність кожної з них дорівнює $\frac{1}{n}$.

Наприклад, імовірність того, що на підкинутому гральному кубику випаде 5 очок, дорівнює $\frac{1}{6}$. А ймовірність того, що підкинута монета впаде догори гербом, дорівнює $\frac{1}{2}$. Ймовірність події А позначають Р(А). Якщо першу подію позначити буквою А, а другу — В, то $P(A) = \frac{1}{6}$, $P(B) = \frac{1}{2}$.

Існують події неелементарні.

Розглянемо загальний випадок. Нехай випробування має скінченну кількість (n) рівноможливих та несумісних наслідків і A — деяка випадкова подія, пов'язана з даним випробуванням.

Назвемо елементарну подію E_n сприятливою для випадкової події A, якщо настання події E_n внаслідок випробування приводить до настання події A.

Якщо кількість наслідків (елементарних подій), сприятливих події A, позначити через n(A), то ймовірність випадкової події A визначається формулою

$$P(A) = \frac{n(A)}{n}$$

Ймовірністю випадкової події A називають відношення кількості елементарних подій n(A), сприятливих для події A, до кількості всіх рівноможливих і попарно несумісних елементарних подій, які утворюють простір елементарних подій для певного випробування.

Таке означення ймовірності називають класичним.

Наведемо важливі властивості ймовірності випадкової події:

1) Якщо C — подія неможлива, то $P(C) = 0$;
2) Якщо B — подія достовірна, то $P(B) = 1$;
3) Якщо X — подія випадкова, то $0 \le P(X) \le 1$;
4) Якщо $E_1, E_2, E_3, \ldots, E_n$ — елементарні події, що вичерпують деяке випробування, то $P(E_1) + P(E_2) + P(E_3) + \ldots + P(E_n) = 1$.

Задача 1. Під час тестування пральної машини з'ясувалося, що одна з п'яти деталей a, b, c, d, e має дефект. Є можливість за один раз перевірити три деталі, які механік довільно обирає з визначених. Чому дорівнює ймовірність того, що:

а) буде перевірена деталь a (подія M);

б) будуть перевірені деталі a і b (подія N);

в) буде перевірена хоч одна з деталей a і b (подія K)?

Розв'язання: побудуємо простір елементарних подій для цього випробування (з 5 деталей обрано 3). Маємо:

abc, abd, abe, acd, ace, ade, bcd, bce, bde, cde.

а) події М сприяють 6 елементарних подій з 10: abc, abd, abe, acd, ace, ade. Можемо знайти ймовірність події М:

$$P(M) = \frac{n(A)}{n} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}.$$

б) події N сприяють 3 елементарних подій з 10: abc, abd, abe, тому ймовірність події N дорівнює $\frac{3}{10}$.

в) події К сприяють 9 елементарних подій з 10: усі, крім cde, тому ймовірність події К дорівнює $\frac{9}{10}$.

Досі обчислювали ймовірності здійснення елементарних подій, не дуже замислюючись над поняттям «однаково можливі події». А це поняття не таке просте, як здається. Розглянемо приклад про ймовірність народження дитини певної статі. Народження хлопчика чи дівчинки – події, здається однаково можливі (як і падіння монети – гербом догори чи донизу). Але це суперечить істині. Багаторічні спостереження переконливо свідчать, що хлопчики народжуються частіше. На 1000 новонароджених у середньому припадає 517 хлопчиків і 483 дівчинки. Тому вважати, що ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,5 – означає суперечити реальності. У таких випадках користуються поняттям статистичної ймовірності. Вважають, що статистична ймовірність народження хлопчика дорівнює 0,517, а дівчинки – 0,483.

Уявіть: гральний кубик так, що його грань з 6 очками розміщена далі від центра мас, ніж протилежна грань. Такий кубик падає догори гранню з 6 очками частіше. Тут простежується цікава й дуже важлива закономірність. Якби хтось підкинув такий кубик 1000 разів і він упав, наприклад, 300 разів догори гранню з 6 очками, то й інші експериментатори мали б приблизно такі самі результати [23].

Багато масових випадкових подій мають властивість стійкості. За досить великої кількості незалежних випробувань частота появи спостережуваної події коливається близько одного й того самого числа. У справедливості цього багато спеціалістів переконалися експериментально. А математики Я. Бернуллі, П. Чебишов та ін. обгрунтували це твердження і теоретично (закон великих чисел). Тому для таких (статистично стійких) подій раціонально ввести поняття ймовірності.

Якщо в n випробуваннях подія А відбудеться m разів, то дріб $\frac{m}{n}$ визначає частоту події А. У багатьох реальних випадках зі збільшенням n відносна частота події стабілізується й дедалі менше відрізняється від деякого числа р (коли $n \to \infty$, то $\frac{m}{n} \to p$). Це число р називають імовірністю події А.

Таким є статистичне означення ймовірності. Обсяг означуваного ним поняття набагато ширший від того, що відповідає класичному означенню. Класичну ймовірність обчислюють математичними методами, а статистичну – здебільшого визначають експериментально.

Якщо йдеться про ймовірність, то спеціалісти найчастіше мають на увазі статистичну ймовірність. Тому сучасна теорія ймовірностей тісно пов’язується з математичною статистикою. Об’єднання математичної статистики та теорії ймовірностей називають стохастикою. Стохастичний – означає випадковий, імовірний.

Одне з найважливіших понять стохастики – випадкова величина. Величину називають випадковою, якщо вона може набувати наперед невідомих числових значень, що залежать від випадкових подій. Наприклад:

1) виграш на лотерейний квиток;
2) відстань від точки влучання кулі до центра мішені.

Значення першої випадкової велечини – деякі цілі числа. Множина значень другої велечини – деякий неперервний відрізок числової прямої. Такі величини називають неперервними [1].

Задача 2. Випущено 100 лотерейних білетів, з яких 5 мають виграти по 10 грн., 10 – по 5 грн., 40 – по 1 грн., решта – безвиграшні. Який середній виграш припадає на один білет?

Розв'язати цю задачу можна арифметичним способом:

$$(5 \cdot 10 \text{ грн.} + 10 \cdot 5 \text{ грн.} + 40 \cdot 1 \text{ грн.}) : 100 = 1{,}4 \text{ грн.}$$

Проілюструємо на цій задачі поняття випадкової величини. Тут виграш – випадкова величина, яка може набувати значень 0, 1, 5, 10 (грн.) відповідно з імовірностями 0,45, 0,4 і 0,05. Це – дискретна випадкова величина ξ. Описаній ситуації відповідає таблиця 2.2.

Таблиця 2.2.

ξ	0	1	5	10
p	0,45	0,4	0,1	0,05

Зверніть увагу: сума ймовірностей, наявних у другому рядку таблиці дорівнює 1. Вважають, що таку випадкову величину ξ розподілено за ймовірностями.

Якщо випадкова величина ξ набуває значень x_1, x_2, …, x_n з імовірностями відповідно p_1, p_2, …, p_n, то це означає, що величину ξ розподілено за таким законом (таблиця 2.3).

Таблиця 2.3.

ξ_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Середнє значення такої величини називають математичним сподіванням і позначають М(ξ):

$$M(\xi) = x_1 \cdot p_1 + x_2 \cdot p_2 + \ldots + x_n \cdot p_n.$$

Наприклад, для попередньої задачі

$$M(\xi) = 0 \cdot 0{,}45 + 1 \cdot 0{,}4 + 5 \cdot 0{,}1 + 10 \cdot 0{,}05 = 1{,}4.$$

Міру розсіювань випадкової величини навколо її математичного сподівання називають дисперсією. Дисперсію випадкової величини x позначають D(x) і обчислюють за формулою $D(x) = M(x - Mx)^2$, де Mx – математичне сподівання величини x; $(x - Mx)^2$ – квадрати відхилень значень x від Mx. Величина $(x - Mx)^2$ також випадкова. Її математичне сподівання $M(x - Mx)^2$ – дисперсія випадкової величини x.

Щоб знайти дисперсію розглянутої вище випадкової величини ξ, спочатку знайдемо відхилення всіх її значень від математичного сподівання:

$$0 - 1,4 = -1,4;\ 1 - 1,4 = -0,4;\ 5 - 1,4 = -3,6;\ 10 - 1,4 = -8,6.$$

Квадрати цих відхилень: 1,96; 0,16; 12,96; 73,96. Знайдемо математичне сподівання випадкової величини (таблиця 2.4).

Таблиця 2.4.

$(x - Mx)^2$	1,96	0,16	12,96	73,96
p	0,45	0,4	0,1	0,05

$$1,96 \cdot 0,45 + 0,16 \cdot 0,4 + 12,96 \cdot 0,1 + 73,96 \cdot 0,05 = 5,94.$$

Це і є дисперсія розглядуваної випадкової величини: $D(\xi) = 5,94$.

2.3. Методика вивчення елементів статистики

Статистика – це наука про збирання, обробку та вивчення різноманітних даних, пов'язаних з масовими явищами, процесами й подіями. Найчастіше вона використовується в економіці, політиці та експериментальних дослідженнях. Статистичну інформацію збирають за допомогою спостережень, зокрема перепису, опитувань, обліків тощо.

Статистичні відомості про велику сукупність об'єктів (генеральну сукупність) отримують внаслідок аналізу її незначної частини – вибірки. Щоб дізнатися, наприклад, про найпоширеніші розміри чоловічого взуття, досить опитати кілька десятків чоловіків. Припустимо, що, опитавши 60 чоловіків, здобули результати, подані в таблиці 2.5.

Таблиця 2.5.

Розмір взуття	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
Кількість чоловіків	1	2	3	7	10	9	8	8	6	4	1	1

Це – частотна таблиця, в якій числа другого рядка – частоти. Наприклад, частота взуття розміру 32 дорівнює 6. Відносна частота цього розміру – 6 : 60 = 0,1 = 10 %.

Проаналізувавши таку вибірку, роблять загальний висновок: приблизно 10 % чоловічого взуття треба виготовляти 32-го розміру і вдвічі менше – 26-го розміру. Це – наближені відношення, але на практиці таких наближень достатньо [2].

Математичний аналіз різних вибірок – сфера математичної статистики. Її основне завдання – розробляти ефективні методи вивчення великих сукупностей об'єктів на основі порівняно невеликих вибірок. Кожен елемент вибірки називають її варіантою. Вибірка, отримана внаслідок спостережень, буває невпорядкованою. Упорядкувавши її, дістають варіаційний ряд. Різниця між крайніми членами варіаційного ряду – розмах вибірки. Нехай дано вибірку:

4, 3, 7, 9, 6, 8, 2, 6, 1, 7, 7, 3, 2, 5.

Упорядкувавши її за зростанням варіант, маємо варіаційний ряд:

1, 2, 2, 3, 3, 4, 5, 6, 6, 7, 7, 7, 8, 9.

Розмах даної вибірки r = 9 – 1 = 8.

Мода вибірки – її варіанта з найбільшою частотою. Медіана вибірки – число, яке поділяє відповідний варіаційний ряд навпіл. Розглядувана вибірка має моду 7, а медіану 5,5, бо (5 + 6) : 2 = 5,5.

Середнім арифметичним n чисел називають n-ну частину їх суми. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє арифметичне

$$\bar{x} = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \ldots + x_n).$$

Середнім значенням вибірки називаютьсереднє арифметичне усіх її витрат. Наприклад, для вибірки 1, 2, 3, 3, 5, 6, 8 середнє

$$\bar{x} = \frac{1}{7}(1 + 2 + 3 + 3 + 5 + 5 + 6 + 8) = 4$$

Якщо варіанти вибірки повторюються, то суми рівних доданків можна замінити добутками [25].

Задача 1. 7 робітників бригади щомісяця одержують по 2300 грн., 8 – по 2450 грн., а 5 – 2500 грн. Визначте середню місячну зарплату робітника цієї бригади.

Розв’язання: всього робітників у бригаді 7 + 8 + 5 = 20. Тому шукана середня зарплата

$$\bar{x} = \frac{1}{20}(2300 \cdot 7 + 2450 \cdot 8 + 2500 \cdot 5) = 2410.$$

Відповідь: 2410 грн.

У статистиці часто використовують також середнє квадратичне. Якщо дано n чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, то їх середнє квадратичне σ_1 визначається за формулою

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}.$$

За допомогою середнього квадратичного найчастіше оцінюють сукупності похибок або відхилень від норми [2].

Приклад 1. Виточуючи циліндричну деталь радіуса R, токар практично виточує деталь радіуса R + α, де α – деяке відхилення (додатне або від’ємне). Нехай два токарі, виточивши по 6 деталей, допустили такі похибки (у десятих частках міліметра):

перший: 2, –5, 4, –3, –3, 5;

другий: 3, –1, 4, 1, 1, 2.

Хто з них виконав завдання якісніше?

Щоб відповісти на це запитання, обчислюють середні квадратичні допущених відхилень:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{1}{6}(4 + 25 + 16 + 9 + 9 + 25)} \approx 14{,}7;$$

$$\sigma_2 = \sqrt{\frac{1}{6}(9 + 1 + 16 + 1 + 1 + 4)} \approx 5{,}3.$$

Отже,якісніше роботу виконав другий токар.

Статистичні дані зводять у таблиці. Статистична таблиця – це особлива форма раціонального й систематизованого викладу узагальнення характеристик статистичної сукупності. Як і граматичне речення, статистична таблиця має підмет і присудок. У підметі наводиться перелік елементів, явищ, ознак, про які йдеться в таблиці. У присудку подаються кількісні характеристики. Наприклад, у наведеній нижче таблиці 2.6. збору зерна в деяких країнах у 1995 р. підметом є лівий стовпчик, а присудком – числові дані інших стовпчиків [2].

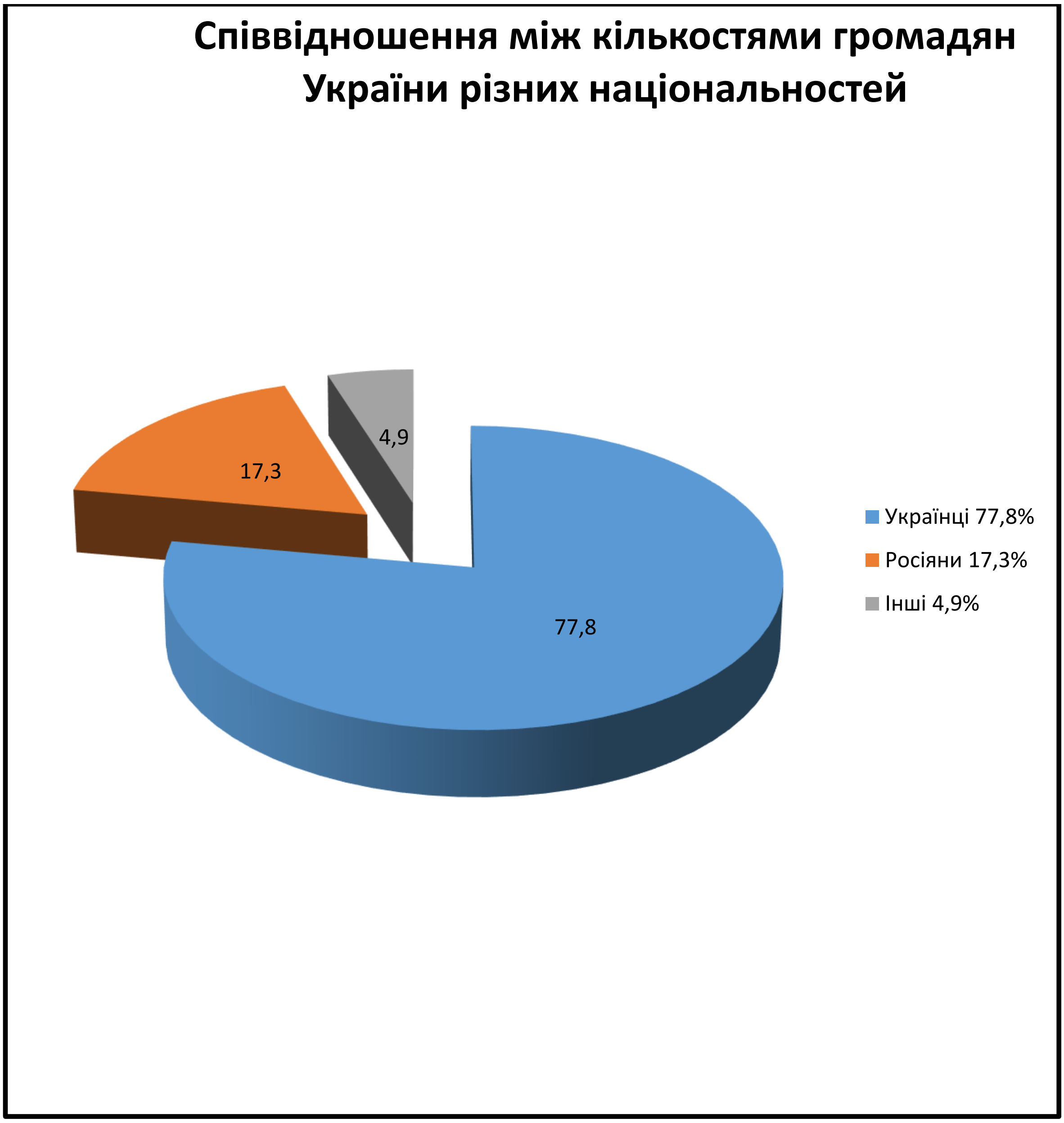
Таблиця 2.6.

Країна	Пшениця	Жито	Ячмінь	Усього
Китай	101	0,6	—	400
США	67	0,3	9,9	353
Росія	46	13,9	25,5	103
Франція	33	—	10,5	60
Німеччина	16	2,4	12,2	35
Україна	19	1,2	10,1	34

Інформацію про ту чи іншу вибірку подають графічно, найчастіше – у формі діаграм. Слово «діаграма» з грецької мови означає малюнок, креслення. Щоправда, тепер цим словом називають не будь-який малюнок, а схематичне зображення відношень між множинами, різні структури, алгоритми дій тощо. Відношення (співвідношення) між множинами та обсягом понять найчастіше зображають у вигляді діаграм-дерев або діаграм Ейлера [17].

Структури моделей, різні діаграми класів і станів зручно подавати у вигляді кругових (секторних) діаграм. На секторній діаграмі 1. зображено співвідношення між кількостями громадян України різних національностей (згідно з переписом 2001 р.) [12].

Діаграма 1.

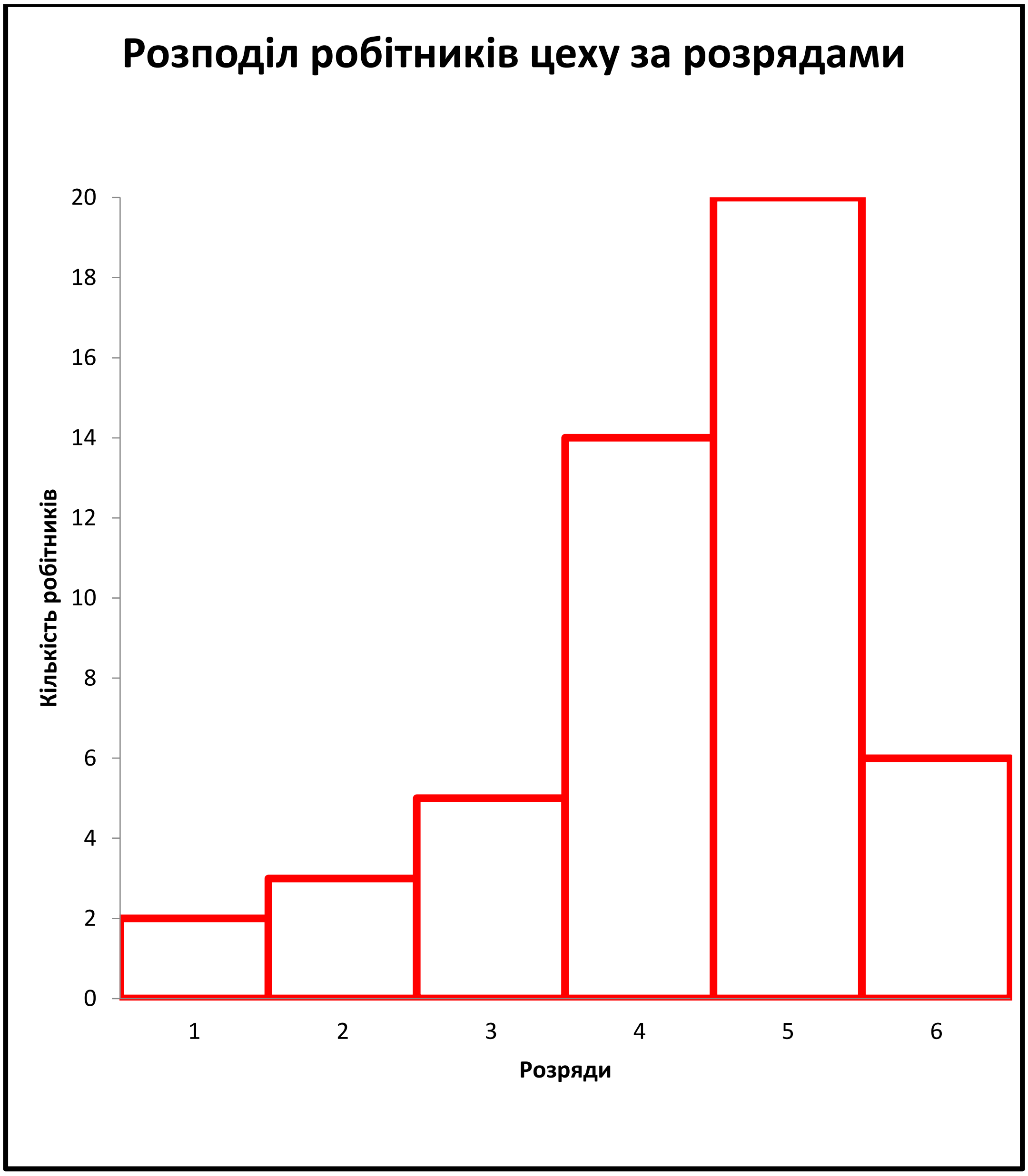


Стовпчасту діаграму зі з’єднаних прямокутників називають гістограмою (діаграма 2.). Нижче зображено гістограму, яка відповідає наведеній таблиці 2.7. розподілу робітників цеху за тарифними розрядами. Іноді замість гістограми будують полігон розподілу, з’єднуючи відрізками середини верхніх основ послідовних прямокутників гістограми. Бувають також інші діаграми.

Таблиця 2.7.

Тарифний розряд	1	2	3	4	5	6	Всього
Кількість робітників	2	3	5	14	20	6	50

Діаграма 2.



2.4. Експериментальна перевірка розробленої методики

Дуже важливо, щоб вчитель систематично одержував об'єктивну інформацію про хід навчально-пізнавальної діяльності учнів. Таку інформацію він може одержати, лише здійснюючи контроль та діагностування процесу навчання.

Діагностика освітньої діяльності учнів включає: контроль, перевірку, облік, оцінювання, накопичення статистичних даних та їх аналіз, виявлення динаміки освітніх змін і особистісних здобутків учнів, уточнення освітніх програм, коригування процесу навчання, прогнозування подальшого розвитку діяльності.

За допомогою контролю вчитель може виявити, встановити і оцінити реальний рівень знань учнів, тобто визначити об'єм та якість засвоєння навчального матеріалу, прогалин в знаннях і відповідно одразу їх усувати, вносити корективи в процес навчання та вдосконалювати його зміст, методи, засоби та форми організації. При цьому оцінювання має ґрунтуватись на позитивному принципі, що визначає рівень засвоєння знань [14].

Експериментальна перевірка розробленої методики проводилась в Кам’янець-Подільському ліцеї № 5. За експериментальну групу було взято 11-А клас. Середній бал успішності в даному класі за минулий навчальний рік становив 5,9 бала. За контрольну групу було взято учнів 11-Б класу. Середній бал успішності в цьому класі складав 6 балів.

Контрольна робота

І варіант

1. З 28 учнів класу 18 захоплюються музикою, решта – футболом. Яка ймовірність того, що навмання вибраний учень захоплюється футболом?

А	Б	В	Г
$\frac{5}{9}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{9}{14}$

2. Монету підкинули двічі. Знайти ймовірність того, що хоча б один раз випаде герб?

А	Б	В	Г
0,5	0,75	0,25	0,6

3. Імовірність того, що під час підкидання грального кубика випаде число 5, дорівнює 0,4, а ймовірність того, що випаде число 6, дорівнює 0,3. Яка ймовірність того, що випаде число більше ніж 4?

А	Б	В	Г
0,12	0,88	0,7	0,3

4. У коробці лежать 12 кольорових олівців, з яких 2 – сині. Яка ймовірність того, що навмання взятий із коробки олівець буде синім?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$

5. Рибалка піймав 5 окунів, 8 коропів і 3 щуки і вкинув їх у відро. Яка ймовірність того, що навмання взяти з відра рибина буде щукою?

А	Б	В	Г
$\frac{3}{5}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{16}$	$\frac{1}{3}$

6. Скільки чисел у ряду, якщо його медіаною є п'ятнадцятий член?

А	Б	В	Г
14	15	28	29

7. Ряд даних вибірки має вигляд: 2; 8; 8; 4; 2; 2; 6; 7; 6; 2. Установіть відповідність між статистичними характеристиками цього ряду даних та їх значеннями.

1. Розмах вибірки А) 2
2. Мода Б) 4,5
3. Медіана В) 4,7
4. Середнє значення Г) 5

8. В кошику міститься 8 білих і 12 чорних кульок. Навмання виймають 3 кульки. Яка ймовірність того, що хоч би одна з них буде білою?

9. Два стрільці намагаються влучити в одну мішень. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішень влучить тільки один з них.

10. Три учні незалежно один від одного розв'язують задачу. Перший учень помиляється в 10% випадків, другий – в 15%, а третій в 80% розв'язує задачу правильно. Яка ймовірність того, що хоча б один учень при розв'язанні задачі помилиться?

11. При грі в шахи Остап Бендер шахраює з ймовірністю 0,6. При цьому він виграє з ймовірністю 0,1, грає внічию з ймовірністю 0,2, в інших випадках програє. Знайти ймовірність того, що в одній навмання взятій грі Бендер 1) шахраював і не виграв; 2) не шахраював і не програв?

12. У коробці лежать кульки, з яких 12 – білих, а решта – червоні. Скільки в коробці червоних кульок, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться червоною, становить $\frac{5}{9}$.

13. При грі в «Спортлото» на картці відмічається 6 номерів із 49. Під час тиражу визначають 6 виграшних номерів. Яка ймовірність вгадати рівно 3 виграшних номера?

14. Куб, всі грані якого пофарбовані, розрізали на 1000 рівних кубиків. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний кубик має рівно дві пофарбовані грані?

II варіант

1. З 24 цукерок, що лежать в коробці, 18 шоколадних, решта – карамельки. Яка ймовірність того, що навмання витягнута цукерка буде карамелькою?

А	**Б**	**В**	**Г**
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$

2. Імовірність того, що стрілець одним пострілом влучає у ціль, дорівнює 0,4. Стрілець виконав два постріли. Знайти ймовірність того, що обома пострілами стрілець влучив у ціль..

А	Б	В	Г
0,4	0,8	0,16	0,6

3. Імовірність того, що під час підкидання грального кубика випаде число 1, дорівнює 0,2, а ймовірність того, що випаде число 2, дорівнює 0,4. Яка ймовірність того, що випаде число менше ніж 3?

А	Б	В	Г
0,3	0,8	0,6	0,9

4. У коробці лежать 15 кольорових олівців, з яких 3 – червоні. Яка ймовірність того, що навмання взятий із коробки олівець буде червоним?

А	Б	В	Г
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{3}{4}$

5. Кидають дві однакові монети. Яка ймовірність того, що випадуть «герб» і «число»? ?

А	Б	В	Г
0,5	0,75	0,25	0,4

6. Скільки чисел у ряду, якщо його медіаною є тринадцятий член?

А	Б	В	Г
29	14	26	27

7. Ряд даних вибірки має вигляд: 4; 5; 7; 10; 11; 8; 5; 5; 6; 7. Установіть відповідність між статистичними характеристиками цього ряду даних та їх значеннями.

1. Розмах вибірки А) 6,5
2. Мода Б) 5
3. Медіана В) 7
4. Середнє значення Г) 5,5

8. В кошику міститься 8 білих і 12 чорних кульок. Навмання виймають 3 кульки. Яка ймовірність того, що хоч би одна з них буде чорною?

9. Два стрільці намагаються влучити в одну мішень. Імовірність влучення в мішень першим стрільцем дорівнює 0,6, а другим – 0,9. Знайти ймовірність того, що в мішень влучить тільки один з них.

10. Три учні незалежно один від одного розв’язують задачу. Перший учень помиляється в 10% випадків, другий – в 15%, а третій в 80% розв’язує задачу правильно. Яка ймовірність того, що хоча б один учень розв’яже задачу правильно?

11. При грі в шахи Остап Бендер шахраює з ймовірністю 0,6. При цьому він виграє з ймовірністю 0,1, грає внічию з ймовірністю 0,2, в інших випадках програє. Знайти ймовірність того, що в одній навмання взятій грі Бендер 1) не шахраював і не виграв; 2) шахраював і не програв?

12. У коробці лежать кульки, з яких 20 – чорні, а решта – білі. Скільки в коробці білих кульок, якщо ймовірність того, що вибрана навмання кулька виявиться білою, становить $\frac{7}{12}$.

13. З 10 лотерейних білетів два виграшних. Знайти ймовірність того, що серед узятих 5 білетів один виграшний.

14. Куб, всі грані якого пофарбовані, розрізали на 64 рівних кубиків. Знайти ймовірність того, що навмання вибраний кубик має рівно дві пофарбовані грані?

Наведемо результати контрольної роботи по даній темі в експериментальній та контрольній групах.

Учні цих класів отримали такі оцінки:

Таблиця 2.8.

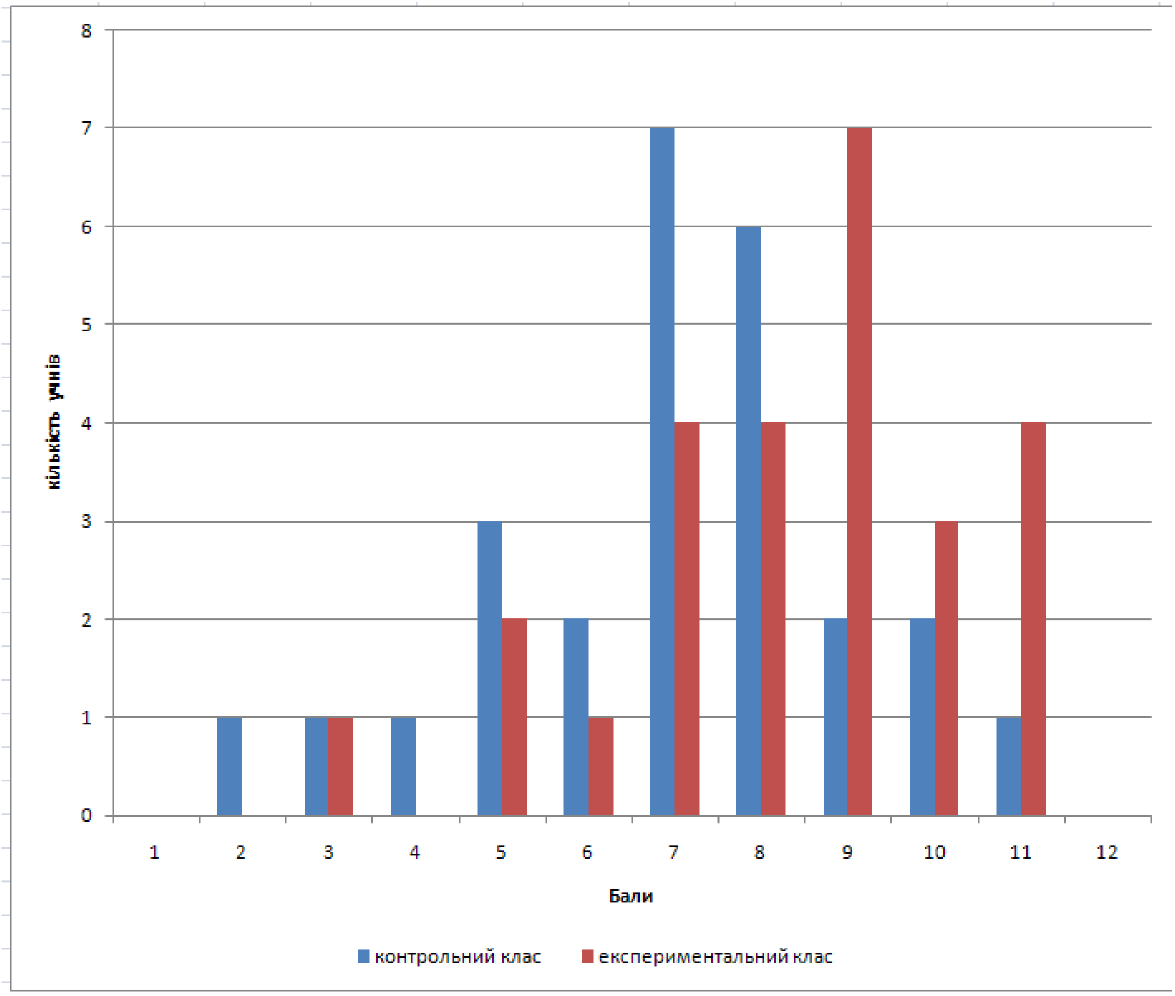
Контрольна робота № 1

Бали	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**
А	*0*	*1*	*1*	*1*	*3*	*2*	*7*	*6*	*2*	*2*	*1*	*0*
Б	*0*	*0*	*1*	*0*	*2*	*1*	*4*	*4*	*7*	*3*	*4*	*0*

А – кількість учнів, що одержали відповідні бали (в контрольному класі);
Б – в експериментальному класі.

Графічно результати контрольної роботи зображено на діаграмі 3.

Діаграма 3.



Із діаграми 3 бачимо, що учні експериментальної групи контрольну роботу написали дещо краще. Для того, щоб з'ясувати процес формування та закріплення математичних знань, обґрунтуємо дослідження формулами. Для цього визначимо коефіцієнт кореляції. Чим більше він наближається до одиниці, тим більша ефективність розробленої методики. В протилежному випадку коефіцієнт кореляції буде близьким або рівним нулю.

$$r = \frac{SP_{xy}}{\sqrt{SS_x SS_y}},$$

де SS_x – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum x^2 - \frac{(\sum x)^2}{N}$,

SS_y – сума квадратів відхилень $SS_x = \sum y^2 - \frac{(\sum y)^2}{N}$,

SP_{xy} – сума скоректованих добутків $SP_{xy} = \sum xy - \frac{\sum x \sum y}{N}$,

де N – кількість учнів.

Таблиця 2.9.

<table>
<tr><th rowspan="2">Кількість учнів</th><th colspan="2">Загальна кількість балів</th><th colspan="3">Допоміжні розрахунки</th></tr>
<tr><th>В контрольному класі</th><th>В експериментальному класі</th><th>$\sum xy$</th><th>$\sum x^2$</th><th>$\sum y^2$</th></tr>
<tr><td>N</td><td>26</td><td>26</td><td>5357</td><td>5948</td><td>8758</td></tr>
</table>

1. Знаходимо суму квадратів відхилень $SS_x = 3188$; $SS_y = 8702$;
2. Суму скоректованих добутків $SP_{xy} = 3845$;
3. Коефіцієнт $r = 0{,}73$.

Бачимо, що одержані коефіцієнти кореляції близькі до 1. Це свідчить про існування тісного зв'язку між застосованою методикою і досягнення учнями відповідного рівня знань. Тому можна говорити про доцільність впровадження даної методики в навчальний процес. Її використання в шкільній практиці забезпечить засвоєння учнями навчального матеріалу, сприятиме розвитку в учнів стійкого інтересу до вивчення математики.

Висновок

При вивченні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики, як і при вивченні будь-якої змістової лінії алгебри і початків аналізу, найбільші труднощі викликає використання теорії для розв’язання практичних і прикладних задач.

У ході *експерименту* була здійснена перевірка ефективності запропонованої методики навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики.

ВИСНОВКИ І РЕКОМЕНДАЦІЇ

Науковий аналіз літератури з філософії, педагогіки, психології, дозволив розкрити сутність творчого компонента як наскрізного складника змісту освіти, що завдяки модульній структурі сприяє усвідомленню процесу відбору елементів для конструювання процесу навчання як узагальнюючого об'єкта пізнання. Досвід творчої діяльності впливає на засвоєння учнями інших компонентів змісту освіти через самостійне перенесення досвіду в життєві ситуації, формування грамотності на основі комбінування відомих способів діяльності в новій, розпізнавання структури наукового об'єкта, альтернативне бачення проблем, побудову нових способів їх вирішення.

Слід залучати учнів до активної творчої роботи з цілеполяганням змісту освіти, добору навчального матеріалу, конструювання змістовних блоків за темами навчальних програм, добираючи види творчої діяльності учнів за їх бажанням та інтересами [10].

Структура дидактичного творчого модуля як компонента конструктивної діяльності учнів включає сприймання, створення, виконання навчального матеріалу. Дидактичний творчий модуль є одиницею більш розгорнутої системи навчання, яка впливає на ефективність вибору його цілей, змісту, методів, форм для отримання якісних результатів освітньої діяльності школярів.

Подальші дослідження передбачається провести в напрямку вивчення інших проблем творчого підходу до конструювання змісту освіти в умовах модульного навчання.

Все вище зазначене дає підстави стверджувати, що існуючі методики навчальних дисципліни розглядаються в тісному зв'язку з дидактикою і спираються на обґрунтовані в ній закономірності побудови різних типів навчальних дисциплін. Дослідження дозволило визначити загальні вимоги дидактичного моделювання змісту навчання відповідно до змісту навчальних програм і тематичних планів навчальних дисциплін.

У ході нашого дослідження, у відповідності до його цілей і завдань, отримані такі **результати**:

1. Проведено ретроспективний огляд втілення в шкільну освіту елементів імовірнісно-статистичних знань.

2. Уточнено мету і цілі навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

3. Сформульовані основні завдання навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики з урахуванням особистісно орієнтованого підходу, рівневої та профільної диференціації.

4. Висунуті і обґрунтовані принципи побудови імовірнісно-статистичної змістово-методичної лінії.

5. Виділені складові змістово-методичної лінії: а) імовірнісна; б) статистична, які органічно доповнюють одна одну. Їх взаємозв'язок забезпечує системність уявлень про роль емпіричних засобів і теоретичних методів у пізнанні явищ навколишнього світу і їх імовірнісної структури.

6. Виявлені протиріччя у навчанні початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

7. Виділені етапи формування стохастичних уявлень в учнів, які мають здібності до математики.

8. Визначена сукупність методичних вимог до навчання початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

Також викладені рекомендації:

1. Розроблені вимоги, що визначають необхідний рівень стохастичних знань, навичок і вмінь, якими повинен володіти школяр на різних рубіжних етапах навчального процесу, будуть корисні для учнів.

2. Запропоновані зміни програми основної школи з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики мають пропедевтичний характер, що сприятимуть кращому засвоєнню вивченого матеріалу.

3. Розроблені і теоретично обґрунтовані методичні рекомендації про введення основних понять: випадкова подія, ймовірність, випадкова величина

і її числові характеристики. Вказані рекомендації передбачають диференціацію рівня розкриття питань залежно від вікової групи, профілю навчання, рівня научуваності.

4. Розроблена нами методика, система задач якої побудована за такими принципами: доступності, прикладної спрямованості і міжпредметних зв'язків, різноманітності, диференціації навчання, повторення та послідовного наростання труднощів, реалізації контролюючої функції, відповідності наявності часу, експериментально-дослідницький, сприятиме оптимізації роботи вчителя.

5. Запропонована система поточного і тематичного контролю, система індивідуальних задач, диференційованих за рівнями. Використання при поточному контролі комп'ютерного тестування передбачає економію часу, як для учнів, так і для вчителя, дає змогу контролювати і закріпляти отримані знання, навички і вміння з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики.

6. Ефективність розроблених методичних рекомендацій підтвердилась експериментально. У ході проведення педагогічного експерименту знайшли підтвердження теоретичні основи роботи і висунута гіпотеза, що свідчить про можливість застосування даної методики.

Отже, основними складовими взаємозв'язків наступності у процесі навчання початкам теорії ймовірностей і вступу до статистики є: пропедевтика і наступність; наступність і повторення; наступність і міжпредметні зв'язки; наступність і перевивчення.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Афанасьєва О. М. Математика: підруч. для 11 кл. загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / О.М. Афанасьєва, Я.С. Бродський, О.Л. Павлов, А.К. Сліпенко. – К: Богдан, 2011. – 241с.

2. Бевз Г. П. Математика. 11 клас: Підруч. для загальноосвіт. навч. закл.: рівень стандарту / Г. П. Бевз, В. Г. Бевз. – К.: Генеза, 2010. – 272 с.

3. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Навч. посібник / Г.П. Бевз. – К.: Вища школа, 1989. – 367 с.

4. Бевз Г. П. Методика викладання математики: Практикум / Г. П. Бевз. – К.: Вища школа, 1981. – 200 с.

5. Бондар В.І. Дидактика / В.І. Бондар. – Київ: Либідь, 2005. – 261 с.

6. Бурда М.І. Математика. Підручник для 11 класу загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту / М.І. Бурда, Т.В. Колесник, Ю.І. Мальований та ін. – К.: «Зодіак-ЕКО», 2010. – 285 с.

7. Бурда М.І. Рівні навчальної діяльності // М.І. Бурда / Зміст і технології шкільної освіти: Матеріали звітної наукової конференції Інституту педагогіки АПН України. 26-28 березня 2002 року. – Ч.1. – К.: Пед. думка, 2002. – С. 4 – 5.

8. Васьков Ю.В. Добір і конструювання теоретичного компонента змісту освіти в середній загальноосвітній школі. / Ю.В. Васьков. – Харків, 1996. – 204 с.

9. Голік Л. До питання про диференціацію навчання старшокласників математики / Л. Голік // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 11 – 13.

10. Зайченко І.В. Педагогіка: Навчальний посібник для студентів вищих пед. навч. закладів / І.В. Зайченко. – К.: «Освіта України», 2006. – 528 с.

11. Конет І.М. Теорія ймовірності і математична статистика / І.М. Конет. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський державний педагогічний університет, інформаційно-видавничий відділ, 1999. – 214 с.

12. Красуля Л. Наочність на уроках математики / Л. Красуля // Математика в школі. – 2005. – №18. – С. 7 – 9.

13. Лозова В.І., Троцко Г.В. Теоретичні основи виховання і навчання: Навчальний посібник / Харк. держ. пед. ун-т ім. Г.С. Сковороди. – 2-е вид., випр. і доп. – Харків: ОВС, 2002. – 400 с.

14. Малафіїк І.В. Дидактика: Навч. посібник / І.В. Малафіїк. – К.: Кондор, 2005. – 389 с.

15. Марнянський І. Корисний посібник з методики математики / І. Марнянський // Математика в школі. – 1999. – №2. – С. 3.

16. Моторіна В.Г. Технології навчання математики в сучасній школі / В. Г. Моторіна. – Харків, 2001. – 262 с.

17. Огурцов А.П. Підвищення інформативності навчального тексту засобами його наочного представлення / А.П. Огурцов, Л.М. Мамаєв, В.В. Заліщук // Нові технології навчання: Наук.-метод. збірник. – К.: Наук.-метод. центр вищої освіти, 2003. – Вип. 35.

18. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. 10-11 класи. Математика. – К., 2010. – 111 с.

19. Скороход А.В. Особливий характер теорії ймовірностей в математичних науках // У світі математики. – 1997. – Т.3. – Випуск 2. – С. 2 – 4.

20. Слєпкань З.І. Методика навчання математики: Підручник. – 2-е вид., допов. і переробл. / З.І. Слєпкань. – К: Вища шк., 2006. – 582 с.

21. Слєпкань З.І. Ще раз про диференціацію навчання математики і роль в ній освітнього стандарту / З.І. Слєпкань // Математика в школі. – 2002. – №2. – С. 29 – 30.

22. Слепкань З.И. Психолого-педагогические основы обучения математике: Метод. пособие / З.И. Слєпкань. – К.: Рад. школа, 1983. – 192 с.

23. Сморжевський Л.О. Методика використання наочності на уроках алгебри і геометрії в основній школі: Навчальний посібник / Л.О. Сморжевський, Ю.Л. Сморжевський. – Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка, 2010. – 184 с.

24. Тихомиров В. Математична освіта (мета, концепція, структура, перспективи) / В. Тихомиров // Математика в школі. – 2003. – №4. – С. 2 – 5.

25. Трунова О.В. Методика структурування і вивчення теоретичного матеріалу з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики в умовах диференціації навчання // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецк: ТЕАН, 2006. – Вип. 3(13). – С. 60 – 66.

26. Трунова О.В. Про доцільність введення елементів стохастики в програму середньої школи // Вісник ЧДПУ імені Т.Г. Шевченка. Серія: педагогічні науки: Збірник. – Чернігів: ЧДПУ, 2001. №4. – С. 161 – 164.

27. Трунова О.В. Система задач з початків теорії ймовірностей і вступу до статистики і методика їх розв’язування // Дидактика математики: проблеми і дослідження. Міжнародний збірник наукових робіт. – Донецк: Дон-НУ, 2006. – Вип. 26. – С. 96 – 104.

28. Трунова О.В. Про вивчення початків теорії ймовірностей та елементів статистики в ліцеях і класах з поглибленим вивченням математики / О.В. Трунова. – 2005. – №2. – С. 40 – 47.