Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

ДИПЛОМНА РОБОТА (ПРОЄКТ)
магістра

з теми:

«ДИДАКТИЧНЕ ЗАБЕЗПЕЧЕННЯ ВИВЧЕННЯ РОЗДІЛУ «КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ТА НЕРІВНОСТІ»

Виконав:
студент 2-го курсу групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Катричук Віталій Володимирович

Керівник:
Теплінський Ю.В., доктор фізико-математичних наук, професор кафедри математики

Рецензент:
Моцик Р.В., кандидат педагогічних наук, доцент кафедри комп’ютерних наук

м. Кам’янець-Подільський – 2023 р.

ЗМІСТ

ВСТУП……………………………………………………………………….3
РОЗДІЛ 1. КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ`ЯЗУВАННЯ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ……………………………………………...……………...5
1.1. Неповні квадратні рівняння…………………………………….…5
1.2. Формули коренів квадратного рівняння…………………..…….…8
1.3. Теорема Вієта…………………………………………………...…...11
1.4. Квадратні рівняння з параметром……………………………………..14
1.5. Розв’язування рівнянь, які зводяться до квадратних рівнянь……………18
1.6. Розв’язування рівнянь методом заміни змінної…………………………...26
1.7. Розв’язання текстових задач, які зводяться до складання квадратних рівнянь…………………………………………………………………………29
1.8. Олімпіадні завдання……………………………………………………33
РОЗДІЛ 2. КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ’ЯЗАННЯ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ……………………………………………………………43
2.1. Розв’язування квадратних нерівностей графічним методом…………………43
2.2. Метод інтервалів………………………………………………………48
ВИСНОВКИ……………………………………………………………………...51
СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ……………………………...52
ДОДАТКИ ……………………………………………………………………55

ВСТУП

Актуальність роботи. У зв'язку з постійним розвитком суспільства освіта зазнає помітних змін. З одного боку, під впливом реформування системи вищої освіти першочерговим завданням є належне забезпечення спеціальної підготовки здобувачів вищої освіти, формування і розвиток їх як майбутніх висококваліфікованих, професійно підготовлених, компетентних фахівців. З іншого боку, під впливом інформатизації у закладах освіти склалися передумови появи і розвитку нового напрямку в освіті – дистанційного навчання, що ґрунтується, здебільшого, на самостійні роботі студентів.

Мета дипломного дослідження: провести узагальнення сучасного навчального матеріалу шкільного курсу алгебри в розділі «Квадратні рівняння та нерівності» та розробити пропозиції щодо впровадження їх методів для самостійного опрацювання та поглибленого вивчення теми на факультативних заняттях учнями та вчителями закладів загальної середньої освіти і професійно-технічних закладів освіти, а також здобувачами вищої освіти фізико-математичного факультету.

Завдання дипломної роботи:

1. Розглянути теоретичний матеріал розділу «Квадратні рівняння та нерівності».

2. Навести приклади та алгоритми розв'язування завдань.

3. Опрацювати олімпіадні завдання з математики, які були запропоновані учням на олімпіадах.

Об'єктом дипломного дослідження є: застосування квадратних рівнянь та нерівностей у вивчені курсу алгебри; прикладні задачі на знаходження коренів рівняння та нерівностей; розв`язування задач, які зводяться до квадратних рівнянь.

Предмет дипломного дослідження: підходи до викладання розділу «Квадратні рівняння та нерівності» в курсах алгебри в закладах загальної середньої освіти.

Гіпотеза: ефективність навчання і якість знань учнів і студентів зросте з можливістю поєднання практичних занять з належним дидактичним забезпеченням вивчення розділу «Квадратних рівнянь та нерівностей».

Методи дипломного дослідження:

- метод порівняння та узагальнення історичних методів алгебри рівнянь та нерівностей;
- метод аналітичного розв'язування характерних математичних завдань;
- метод графічного розв'язування характерних математичних завдань.

Практичне значення. Цей розділ займає неабияке місце в професійній підготовці майбутнього вчителя. Тому розроблений комплекс, який об'єднує властивості звичайного підручника, задачника і практикуму, створює хорошу базу для ефективного використання його в практичній діяльності.

Структура дипломної роботи. Робота складається з вступу, двох розділів, висновку, списку використаної літератури та додатків.

У першому розділі дипломної роботи розглянуто та проаналізовано методи розв`язування квадратних рівнянь та задач, які зводяться до квадратних рівнянь. У другому розділі подані методи розв`язування квадратних нерівностей та наведені приклади їх застосування.

РОЗДІЛ 1

КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

1.1. Неповні квадратні рівняння

Найпростіші лінійні рівняння та задачі на складання рівнянь учні розв'язують ще у 1-6 класах. Основним способом розв'язування є використання залежностей між компонентами та результатами арифметичних дій. У 6-мо класі розглядається також перенесення членів рівняння з однієї частини в іншу. Починаючи з 7-го класу в курсі алгебри основної школи істотного розвитку набуває лінія розв'язування рівнянь і нерівностей, де проводиться певне узагальнення. Вже з 8-го класу розглядаються квадратні рівнянні, а у 9-му класі учні розглядають біквадратні рівняння та систему рівнянь другого степеня. Також розв'язуються задачі на складання квадратних рівнянь та нерівностей, які зводяться до квадратних.

Алгоритм розв'язування квадратних рівнянь задають формулою кореня квадратного рівняння.

Означення 1

Квадратним рівнянням називають рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$, де x – змінна, а a, b, c – деякі числа, причому $a \neq 0$.

Числа a, b, c – коефіцієнти квадратного рівняння: a – перший коефіцієнт, b – другий, c – вільний член.

Квадратне рівняння називають ще рівнянням другого степеня, оскільки його ліва частина є многочленом другого степеня.

Означення 2

Рівняння, в яких перший коефіцієнт a=1, називають **зведеними** квадратними рівняннями.

Згідно з означення, перший коефіцієнт квадратного рівняння не може дорівнювати нулю. Якщо хоч один з коефіцієнтів b або c дорівнює нулю, то квадратне рівняння називають **неповним.**

Неповні квадратні рівняння бувають трьох видів:

1. $ax^2 = 0;$

2. $ax^2 + bx = 0;$

3. $ax^2 + c = 0.$

Розглянемо розв’язування рівнянь кожного з цих видів:

1) Рівняння виду $ax^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$ і тому воно завжди має тільки один корінь $x = 0$.

2) Рівняння виду $ax^2 + bx = 0$ рівносильне рівнянню $x(ax+ b) = 0$ і завжди має два корені $x_1 = 0$ та $x_2 = -\frac{b}{c}$**.**

3) Рівняння $ax^2 + c = 0$ подамо у вигляді $x^2 = \frac{-c}{a}$.

Оскільки $c \neq 0$, то можливі два випадки: $\frac{-c}{a} < 0$ або $\frac{-c}{a} > 0$. Очевидно, що у першому випадку рівняння дійсних коренів немає. У другому випадку рівняння має два дійсних корені: $x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}$ і $x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$.

Отримані результати можна представити у наступній таблиці:

Таблиця 1.1.1.

Значення коефіцієнтів b і c	**Рівняння**	**Корені**
$b = c = 0$	$ax^2 = 0$	$x = 0$
$b \neq 0, c = 0$	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0,\ x_2 = \frac{-b}{a}$
$b = 0, \frac{-c}{a} < 0$	$ax^2 + c = 0$	Коренів немає
$b = 0, \frac{-c}{a} > 0$	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = \sqrt{\frac{-c}{a}}, x_2 = -\sqrt{\frac{-c}{a}}$

Приклад 1.1.1. Розв’яжіть рівняння $5x^2 + 4x = 0$.

Розв’язання

Винесемо змінну x за дужки: $x(5x + 4) = 0$.

Отже, $x = 0$ або $5x + 4 = 0$.

Розв`яжемо дані рівняння і отримаємо корені заданого рівняння:

$x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{4}{5} = -0{,}8$.

Відповідь: $0; -0{,}8$.

Приклад 1.1.2. Розв’яжіть рівняння $4x^2 - 3 = 0$.

Розв’язання

Перетворимо дане рівняння до виду $x^2 = \frac{3}{4}$. Тоді квадратних коренів з числа $\frac{3}{4}$ є два: $x_1 = \sqrt{\frac{3}{4}}$ та $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Відповідь: $\sqrt{\frac{3}{4}}; -\sqrt{\frac{3}{4}}$.

Приклад 1.1.3. Розв’яжіть рівняння $5x^2 = 0$.

Розв’язання

Неповне квадратне рівняння $5x^2 = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 = 0$ і тому має єдиний корінь $x = 0$.

$5x^2 = 0$,

$x^2 = 0$,

$x = 0$.

Відповідь: $x = 0$.

1.2. Формули коренів квадратного рівняння

Для виведення формул квадратного рівняння доцільно спочатку показати прийом виділення повного квадрата двочлена і потім перейти до загального випадку та провести такі самі міркування.

Приклад 1.2.1. Розв'яжемо для прикладу рівняння $x^2 + 6x - 112 = 0$.

Розв'язання

Якщо до виразу $x^2 + 6x$ додати та відняти 9, то отримаємо повний квадрат двочлена $(x + 3)$ та додаткове число -9:

$x^2 + 6x + 9 - 9 - 112 = 0$, еквівалентне $(x + 3)^2 = 121$.

Отже, $x + 3 = \pm 11$, звідки два корені $x_1 = 8$, $x_2 = -14$.

Відповідь: $8; -14$.

Розв'яжемо подібним способом рівняння $ax^2 + bx + c = 0$.

Помноживши обидві частини рівняння на $4a$ (за означенням $a \neq 0$), отримаємо:

$4a^2x^2 + 4a \cdot bx + 4ac = 0;$

$(2ax)^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b + b^2 - b^2 + 4ac = 0;$

$(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac.$

<u>Означення 3</u>

Вираз $b^2 - 4ac$ називають **дискримінантом** даного квадратного рівняння і позначають буквою D.

- ✓ Якщо $D < 0$, то дане рівняння не має дійсних коренів, також не існує такого дійсного значення x, при якому б значення виразу $(2ax + b)^2$ було від'ємним.
- ✓ Якщо $D = 0$, то $2ax + b = 0$, звідки $x = -\dfrac{b}{2a}$ – єдиний корінь рівняння.
- ✓ Якщо $D > 0$, то дане квадратне рівняння рівносильне рівнянню:

$$(2ax + b)^2 = (\sqrt{D})^2$$

Звідки отримаємо два розв'язки:

$2ax + b = +\sqrt{D}$, $x_1 = \frac{-b+\sqrt{D}}{2a}$

або

$2ax + b = -\sqrt{D}$, $x_2 = \frac{-b-\sqrt{D}}{2a}$.

У цьому випадку дане рівняння має два корені, які відрізняються тільки знаками перед коренем дискримінанту $\sqrt{D}$.

Коротко розв'язок формули коренів квадратного рівняння $ax^2 + bx + c = 0$ записують:

$$x_{1,2} = \frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}, \text{ де } D = b^2 - 4ac.$$

Користуючись нею, можна розв'язати будь-яке квадратне рівняння.

Приклад 1.2.2. Розв'язати квадратні рівняння:

а) $3x^2 - 5x + 2 = 0$;

б) $x^2 + 6x + 9 = 0$;

в) $5x^2 - x + 1 = 0$.

Розв'язання

Розглянемо три випадки застосування формули коренів квадратного рівняння.

Знайдемо за формулою дискримінанти даних рівнянь:

а) $D = 25 - 24 = 1$.

При $D > 0$, отримаємо розв'язок:

$x_{1,2} = \frac{-5\pm\sqrt{1}}{6} = \frac{-5\pm 1}{6}$.

Відповідь: 1; $\frac{2}{3}$.

б) $D = 36 - 36 = 0$.

При $D = 0$, одержимо:

$x_1 = \frac{-6\pm 0}{2} = -3$

Відповідь: -3.

в) $D = 1 - 20 = -19$.

При $D < 0$ рівняння розв`язку немає.

Відповідь: дійсних коренів немає.

Приклад 1.2.3. Розв'язати квадратне рівняння: $x^2 + 6|x| - 16 = 0$.

Розв'язання

Це рівняння рівносильне сукупності двох систем: $\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 + 6x - 16 = 0; \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 6x - 16 = 0. \end{cases}\end{array}\right.$

Розв'яжемо кожну систему сукупності окремо:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ x^2 + 6x - 16 = 0. \end{cases}$$

Рівняння цієї системи має два корені : *–8 і 2.*

Тоді можна записати:

$$\begin{cases} x \ge 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = -8. \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідси випливає, що $x = 2$.

$$\begin{cases} x < 0, \\ x^2 - 6x - 16 = 0. \end{cases}$$

Тоді:

$$\begin{cases} x < 0, \\ \left[\begin{array}{l} x = -2, \\ x = 8. \end{array}\right. \end{cases}$$

Звідси маємо $x = -2$.

Відповідь: *–2*; *2.*

Приклад 1.2.4. Розв'язати рівняння $9x^2 - 8x + \frac{5}{x-1} = 1 + \frac{5}{x-1}$.

Розв'язання

Задане рівняння рівносильне системі рівнянь:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x = 1, \\ x - 1 \neq 0. \end{cases}$$

Отримаємо:

$$\begin{cases} 9x^2 - 8x - 1 = 0, \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left[\begin{aligned} & x = 1, \\ & x = \frac{-1}{9}; \end{aligned} \right. \\ x \neq 1. \end{cases}$$

$x = \frac{-1}{9}$.

Відповідь: $\frac{-1}{9}$.

1.3. Теорема Вієта

Найчастіше формулюють і використовують теорему Вієта для зведеного квадратного рівняння.

У підручнику Бевз Г.П. Алгебра 8 клас попередньо до теореми Вієта дається означення зведеного квадратного рівняння.

Означення 4

Квадратне рівняння називають **зведеним**, якщо його перший коефіцієнт $a=1$.

Теорема 1 (Вієта): якщо зведене квадратне рівняння має два корені, то їх сума дорівнює другому коефіцієнту рівняння, взятому з протилежним знаком, а добуток – вільному члену.

$$x_1 + x_2 = -\ p,$$

$$x_1 \cdot x_2 = q.$$

Доведення. Якщо рівняння $x^2 + px + q = 0$ має корені x_1, x_2, то їх можна знаходити за формулами:

$$x_1 = \frac{-p - \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \quad \text{і} \quad x_2 = \frac{-p + \sqrt{p^2 - 4q}}{2} \qquad (1)$$

Додавши і перемноживши ці корені, отримаємо:

$$x_1 + x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} + \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = -\ p,$$

$$x_1 x_2 = \frac{-p-\sqrt{p^2-4q}}{2} \cdot \frac{-p+\sqrt{p^2-4q}}{2} = \frac{(-p)^2 - (\sqrt{p^2-4q})^2}{4} = q.$$

Отже: $x_1 + x_2 = -\ p,$

$x_1 \cdot x_2 = q,$

що і треба було довести.

Примітка. Якщо $p^2 - q = 0$, то рівняння $x^2 + px + q = 0$ має два однакові корені $x_{1,2} = -\frac{p}{2}$.

Кожне квадратне рівняння виду $ax^2 + bx + c = 0$ при $a \neq 0$ рівносильне зведеному квадратному рівнянню $x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$

Тому, якщо таке рівняння має два корені x_1, x_2, то:

$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ та $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$.

Теорема 2 (обернена до теореми Вієта): якщо сума і добуток чисел m і n дорівнюють відповідно $-\ p$ і q, то m і n – корені рівняння $x^2 + px + q = 0.$

Доведення. Нехай $m + n = -p$ і $m \cdot n = q$. За цими умовами рівняння $x^2 + px + q = 0$ рівносильне рівнянню $x^2 - (m + n)x + mn = 0.$

Підставимо в це рівняння замість змінної x значення m і n та одержимо:

$m^2 - (m + n)m + mn = m^2 - m^2 - mn + mn = 0$

$n^2 - (m + n)n + mn = n^2 - n^2 - mn + mn = 0$

Як видно з розв\`язку цих рівнянь, числа m і n – корені рівняння, що і потрібно було довести.

Під час розв’язування квадратних рівнянь застосовують **формули скороченого множення многочленів**:

1. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y)$
2. $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)(x + y)$
3. $x^2 - 2xy + y^2 = (x - y)(x - y)$

Приклад 1.3.1. Скласти квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3.

Розв'язання

$-p = 2 + 3 = 5,\ q = 2 \cdot 3 = 6.$

Шукане рівняння таке: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Відповідь: $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Пізніше можна буде пояснити учням, як такі задачі розв'язувати іншим способом.

А тепер треба зробити зауваження, що сформульована вище задача взагалі невизначена. Ми склали одне рівняння, що має корені 2 і 3, а таких квадратних рівнянь існує безліч:

$2x^2 - 10x + 12 = 0,$

$5x^2 - 2{,}5x + 3 = 0$ і т. д.

Щоб позбутися цієї невизначеності, формулювання задачі можна уточнити: «Скласти зведене квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3» або «Скласти квадратне рівняння за даними його коренями 2 і 3, щоб його перший коєфіцієнт дорівнював 5».

У шкільному підручнику є багато і таких вправ, в яких вимагається скласти квадратне рівняння, корені якого були б пов'язані певною мірою з коренями іншого рівняння.

Приклад 1.3.2. Не розв'язуючи даного рівняння, скласти квадратне рівняння, корені якого були б на 5 більші за корені рівняння $x^2 + 6x + 8 = 0$.

Розв'язання

Нехай корені даного рівняння x_1 *і* x_2.

$x_1 + x_2 = -6,$

$x_1 \cdot x_2 = 8.$

Корені шуканого рівняння на 5 більші від коренів даного, тобто:

$z_1 = x_1 + 5,\ z_2 = x_2 + 5.$

Отже,

$-p = z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + 10 = -6 + 10 = 4,$

$q = z_1 \cdot z_2 = (x_1 + 5)(x_2 + 5) = x_1 \cdot x_2 + 5(x_1 + x_2) + 25 = 3.$

Відповідь: $z^2 - 4z + 3 = 0$.

Приклад 1.3.3. Не розв'язуючи рівняння $x^2 - px + q = 0$, скласти квадратне рівняння, корені якого були б обернені до коренів даного.

Розв'язання

Нехай корені заданого рівняння x_1, x_2.

Тоді за теоремою Вієта:

$x_1 + x_2 = p, \quad x_1 \cdot x_2 = q.$

Позначимо корені шуканого рівняння через z_1 і z_2.

Тоді: $z_1 = \frac{1}{x_1}, \qquad z_2 = \frac{1}{x_2}.$

Через значення z_1 і z_2 виразимо:

$z_1 + z_2 = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_1} = \frac{p}{q}.$

$z_1 \cdot z_2 = \frac{1}{x_1 \cdot x_1} = \frac{1}{q}.$

Отримали шукане рівняння:

$z^2 - \frac{p}{z} z + \frac{1}{q} = 0$

або

$qz^2 - p\, z + 1 = 0$

Відповідь: $z^2 - \frac{p}{z} z + \frac{1}{q} = 0$ або $qz^2 - p\, z + 1 = 0.$

1.4. Квадратні рівняння з параметром

Задачі з параметрами в курсі шкільної програми не вивчаються. І тому учню дуже важко зрозуміти умову задачі такого змісту.

Такі задачі вимагають дослідження та знаходження всіх можливих значень параметра, при яких задача має розв’язок.

Означення 5

Рівняння виду $A(a)x^2 + B(a)x + C(a) = 0,$ де $A \neq 0,$ називається **квадратним**.

$y = A(a)x^2 + B(a)x + C(a)$ – квадратний тричлен, коєфіцієнт якого залежний від параметра a.

$x_0 = -\frac{B}{2A}$ – абсциса вершини параболи;

$y_0 = -\frac{D}{4A}$ – ордината вершини параболи.

$y(a) = f(a) = Aa^2 + Ba + c$ – значення квадратного тричлена при $x = a$,

$D = B^2 - 4AC$ – дискримінант квадратного рівняння.

Якщо: $D > 0$, то рівняння має два дійсні корені;

$D = 0$, то $x_1 = x_2$;

$D < 0$ – рівняння дійсних коренів немає.

Зауваження. Якщо x_1 і x_2 – корені квадратного рівняння $A(a)x^2+B(a)x+C(a)=0$, де:

$x_1 = \frac{-B-\sqrt{D}}{2A}$; $x_2 = \frac{-B+\sqrt{D}}{2A}$,то: при $A > 0$ маємо $x_1 < x_2$,

при $A < 0$, $x_1 > x_2$.

Дійсно, знак різниці $x_2 - x_1 = \frac{\sqrt{D}}{A}$ визначається знаком коєфіцієнта A, що й доводить дане зауваження.

Класифікація задач на дослідження квадратного тричлена

a) Розв’язування квадратних рівнянь з коєфіцієнтами, залежними від параметра.

b) Знаходження знаків дійсних коренів квадратного рівняння.

c) Розв’язування задач на дослідження розташування коренів квадратного рівняння відносно заданої точки чи проміжку.

d) Розв’язування квадратних рівнянь, в яких вказана залежність одного кореня від іншого.

Приклад 1.4.1. Розв’язати рівняння: $(a + 1)x^2 + 2ax + a - 2 = 0$.

Розв’язання

1) Якщо $a + 1 = 0$, тобто $a = -1$, то задане рівняння буде мати вигляд: $-2x - 3 = 0$, $x = -\frac{3}{2}$.

2) Якщо $a + 1 \neq 0$ $(a \neq -1)$, то одержимо квадратне рівняння, дискримінант

якого $D = 4(a + 2)$. Тому розглянемо три випадки:

а) якщо $D = 0$, тобто $4(a + 2) = 0$, то $a = -2$ і $x = -2$;

б) якщо $D < 0$, тобто $4(a + 2) < 0$ $(a < -2)$, то дійсних коренів немає;

в) якщо $D > 0$: $4(a + 2) > 0$; $a > -2$ і $a \neq -1$, тобто:

$-2 < a < -1$ і $a > -1$, то квадратне рівняння має два різні дійсні корені:

$$x_1 = \frac{-a - \sqrt{a+2}}{a+1} \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{a+2}}{a+1}.$$

Відповідь: якщо $a = -1$, то $x = -\frac{3}{2}$;

якщо $a \neq -1$ і $a \geq -2$, то $x = \dfrac{-a \pm \sqrt{a+2}}{a+1}$.

Приклад 1.4.2. При яких значеннях параметра a рівняння $2ax^2 - (a+1)x + 4a + 1 = 0$ має єдиний розв'язок?

Розв'язання

Оскільки в умові не сказано, що рівняння є квадратним, то спочатку розглянемо випадок, коли $a = 0$, тобто рівняння $-4x + 1 = 0$, яке має один розв'язок $x = \frac{1}{4}$.

Решту значень параметра a отримаємо з умови, коли $D = 0$:

$D = 16(a+1)^2 - 4 \cdot 2a \cdot (4a+1)$,

$2a^2 - 3a - 2 = 0$,

$a_1 = -\frac{1}{2}$ і $a_2 = 2$.

Відповідь: при $-\frac{1}{2}$; 0; 2.

Приклад 1.4.3. Знайти всі значення параметра a, при кожному з яких рівняння $(a + 1)x^2 - (1 - 2a)x + a + 1 = 0$ має два різні корені.

Розв'язання

Оскільки за умовою дане рівняння має два різних корені, то воно є квадратним, отже, $a + 1 \neq 0$.

Знайдемо дискримінант:

$D = (1 - 2a)^2 - 4(a + 1)^2 = -12a - 3$.

Щоб рівняння мало два різні корені, дискримінант повинен бути додатним, тобто: $-12a - 3 > 0$, $a < -\frac{1}{4}$ $(a \neq -1)$.

Тоді: $x_1 = \dfrac{1 - 2a + \sqrt{-12a-3}}{2(a+1)}$, $x_2 = \dfrac{1 - 2a - \sqrt{-12a-3}}{2(a+1)}$.

Відповідь: при a є $(-\infty;-1)\cup(-1; -\frac{1}{4})$.

Приклад 1.4.4. При якому значенні параметра a один з коренів рівняння $x^2(-2a + 1)x + a^2 + 2 = 0$ вдвічі більший від іншого?

Розв'язання

За теоремою Вієта та умовою задачі отримуємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 2a + 1, \\ x_1 \cdot x_2 = a^2 + 2, \\ x_1 = 2x_2. \end{cases}$$

Підставивши значення x_1 з третього рівняння в перше та друге, одержимо:

$$\begin{cases} 3x_2 = 2a + 1, \\ 2x_2^2 = a^2 + 2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 = \dfrac{2a+1}{3}, \\ 2x_2^2 = a^2 + 2. \end{cases}$$

Отже, $2(\frac{2a+1}{3})^2 = a^2 + 2$.

Розв'яжемо отримане рівняння:

$8a^2 + 8a + 2 = 9a^2 + 18,$

$a^2 - 8a + 16 = 0,$

$(a - 4)^2 = 0,$

$a = 4.$

Відповідь: при $a = 4$.

Приклад 1.4.5. Визначити числове значення параметра a, при якому сума квадратів коренів рівняння $x^2 - ax + a - 2 = 0$ буде найменшою.

Розв'язання

За теоремою Вієта: $x_1 + x_2 = a;$

$x_1 \cdot x_2 = a - 2.$

Крім того, $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a - 2) = (a - 1)^2 + 3$.

Отриманий вираз набуває найменшого значення при $a = 1$.

Зауважимо, що найменше значення цього виразу дорівнює 3.

Відповідь: при $a = 1$.

Приклад 1.4.6. Відомо, що $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$, де x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2 + x + a = 0$. Визначити параметр a.

Розв'язання

Оскільки $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{x_1 + x_2}{x_1 \cdot x_2}$, а за теоремою Вієта:

$x_1 + x_2 = -1;$

$x_1 \cdot x_2 = a$, то $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{-1}{a} = \frac{1}{6}$.

Отже, $a = -6$.

Відповідь: $a = -6$.

Приклад 1.4.7. Визначити кількість цілих значень параметра m, при яких квадратне рівняння $2x^2 + mx + 2m = 0$ не має дійсних коренів.

Розв'язання

Рівняння не має дійсних коренів, якщо $D < 0$.

Тому $m^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2m < 0;$

$m^2 - 16m < 0;$

$m(m - 16) < 0;$

$m \in (0;16)$.

Цілі значення: $1; 2; 3; 4; 5; \ldots\ldots 15$.

Відповідь: 15.

1.5. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.

У програмі є тема «Приклади рівнянь і систем, що зводяться до квадратних». Цю тему можна тлумачити по-різному. Адже є багато логарифмічних, тригонометричних та інших рівнянь, розв'язування яких зводиться до розв'язування квадратних рівнянь. Зрозуміло, що тут йдеться, насамперед, про дробово-раціональні рівняння, що зводяться до квадратних, а також системи двох рівнянь, з яких одне – першого степеня, а друге – другого степеня.

Далі розглянемо такі рівняння і системи.

1.5.1. Дробові рівняння

З дробовими рівняннями, що зводяться до рівнянь першого степеня, учні вже мали справу. Тому тут немає потреби повідомляти щось нове з теорії. Бажано тільки повторити, що, розв'язуючи такі рівняння, обидві частини множимо на вираз, який містить невідоме. А від цього може утворитись рівняння, не рівносильне даному. Звичайно, в даному випадку доводиться множити обидві частини на цілий алгебраїчний вираз, який має значення при всіх значеннях невідомого. Тому втрати коренів при цьому не буває. Але сторонні корені можуть появитися. Розв'язуючи такі рівняння, обов'язково треба робити перевірку. Тут перевірка є обов'язковою складовою частиною розв'язання.

Приклад 1.5.1.1. Розв'язати рівняння $\frac{3x}{2x-1} = \frac{4}{x+1} + 1$.

Розв'язання

Зведемо рівняння до нормального вигляду:

$3x(x+1) = 4(2x-1) + (2x-1)(x+1)$,

$3x^2 + 3x = 8x - 4 + 2x^2 + 2x - x - 1$,

$x^2 - 6x + 5 = 0$.

Звідки

$$x_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{36-3}}{2}.$$

$x_1 = 5, \qquad x_2 = 1.$

Перевірка. Підставимо знайдені корені *5* і *1* у дане рівняння:

1) $\frac{3 \cdot 5}{2 \cdot 5 - 1} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$ і $\frac{4}{5+1} + 1 = \frac{5}{3}$;

2) $\frac{3 \cdot}{2 \cdot 1 - 1} = 3$ і $\frac{4}{1+1} + 1 = 3$.

Обидва корені утвореного квадратного рівняння задовольняють і дане рівняння.

Відповідь: 5; 1.

Приклад 1.5.1.2. Розв'язати рівняння $\frac{2}{x^2-4}+\frac{x+4}{x^2+2x}=\frac{1}{x^2-2x}$.

Розв'язання

$$\frac{2}{(x-2)(x+2)}+\frac{x+4}{x(x+2)}=\frac{1}{x^2-2x},$$

$2x + (x + 4)(x - 2) = x + 2,$

$2x + x^2 - 2x + 4x - 8 = x + 2,$

$x^2 + 3x - 10 = 0,$

$x_1 = 2,\ x_2 = -5.$

Перевірка. Перший корінь не задовольняє дане рівняння, бо при $x = 2$ вирази $\frac{2}{x^2-4}$ і $\frac{1}{x^2-2x}$ не мають ніяких значень.

Другий корінь $x = -5$ задовольняє рівняння, бо

$$\frac{2}{(-5)^2-4}+\frac{(-5)+4}{(-5)^2+2(-5)}=\frac{1}{35} \text{ і } \frac{1}{(-5)^2-2(-5)}=\frac{1}{35}.$$

Відповідь: рівняння має один корінь: $x = -5$.

Приклад 1.5.1.3. Розв'язати рівняння $\frac{x}{x-3}-\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{1}{x-1}$.

Розв'язання

$$\frac{x\,(x-1)}{x-3}-\frac{2x}{(x-1)(x-3)}=\frac{1\,(x-3)}{x-1},$$

$x\,(x - 1) - 2x = x - 3,$

$x^2 - x - 2x = x - 3,$

$x^2 - 4x + 3 = 0.$

Звідки

$x_1 = 1,\ x_2 = 3.$

Перевірка. При $x = 1$ права частина даного рівняння не має змісту;

при $x = 3$ ліва частина рівняння не має змісту.

Відповідь: рівняння розв'язків не має.

На жаль, у шкільному збірнику немає жодної такої вправи, щоб обидва корені здобутого квадратного рівняння не задовольняли заданого дробового. Тому вчителям варто скласти кілька таких вправ самостійно.

Можна скласти одне рівняння з параметром, а потім, підставляючи замість цього параметра різні числа, дістати багато рівнянь даного виду.

Наприклад, рівняння $\frac{(x-2)(x-a)}{(x-2)(x-a)} = 0$ зводиться до квадратного, обидва корені якого не задовольняють задане дробове рівняння. Залишається його перетворити:

$$\frac{x^2 - 2x - ax + 2a(x-a)}{(x-2)(x-a)} = 0,$$

$$\frac{(x^2 - ax) - (2x-4) + (2a-4)}{(x-2)(x-a)} = 0,$$

$$\frac{x(x-a)}{(x-2)(x-a)} - \frac{2(x-2)}{(x-2)(x-a)} + \frac{2(a-2)}{(x-2)(x-a)} = 0.$$

Звідки

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2(a-2)}{(x-2)(x-a)} = \frac{2}{x-a}.$$

Підставляючи в це рівняння замість *a* числа *3, 4, 5, ...,* дістанемо скільки завгодно однотипних рівнянь:

$$\frac{x}{x-2} + \frac{2}{(x-2)(x-3)} = \frac{2}{x-3},$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{4}{(x-2)(x-4)} = \frac{2}{x-4},$$

$$\frac{x}{x-2} + \frac{6}{x^2 - 7x + 10} = \frac{2}{x-5} \text{ і т. д.}$$

Кожне з цих рівнянь не має жодного розв'язку, хоч приводить до квадратного рівняння, яке має дійсні розв'язки *2* і *a.*

Звичайно, не тільки такі дробові рівняння не мають жодного розв'язку. Може трапитись, що дане рівняння зводиться до такого квадратного, яке не має дійсних коренів.

Наприклад, рівняння $\frac{x}{2x-c} = \frac{1}{cx+2}$ зводиться до рівняння $cx^2 + c = 0$, яке при $c \neq 0$ не має дійсних розв'язків. Тому, немає жодного розв'язку і кожне з таких рівнянь:

$\frac{x}{2x-1} = \frac{1}{x+2}$, $\frac{x}{2x-3} + \frac{1}{3x+2} = 0$ і т.п.

1.5.2. Системи рівнянь другого степеня

У школі можна давати учням для розв'язування тільки найпростіші системи рівнянь другого степеня з двома невідомими, де степінь зводяться до квадратних рівнянь. Спочатку потрібно повторити, яке рівняння називають рівнянням другого степеня з двома невідомими.

<u>Означення 6</u>

Загальний вигляд рівняння другого степеня з двома невідомими x і y такий: $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0.$

Тут коефіцієнти a, b, c, d, e, f – довільні числа, тільки a, b і c не можуть одночасно дорівнювати нулю (бо інакше рівняння не було б рівнянням другого степеня).

Приклади рівнянь другого степеня з двома невідомими:

$x^2 + 3xy + 0{,}2y^2 – 5y = 0,$

$3z^2 – 2t^2 + t = 0,$

$xy + 5 = 0.$

Варто навести і контрприклади. Так, рівняння $x^2+5xy^2+2 = 0$ не є рівнянням другого степеня з двома невідомими, бо многочлен $5xy^2$ не другого, а третього степеня.

Розв'язком одного рівняння з двома невідомими (будь-якого степеня) називають кожну пару значень невідомих, що задовольняють це рівняння.

Наприклад, рівняння $2x^2 – y = 0$ має такі розв'язки:

$x_1 = 1,\ y_1 = 2;$

$x_2 = 2,\ y_2 = 8;$

$x_3 = 3,\ y_3 = 18$ і т. д.

Якби для тих пар чисел, що задовольняють це рівняння, побудували на координатній площині точки з відповідними абсцисами і ординатами, то дістали б параболу, бо рівності $2x^2 - y = 0$ і $y = 2x^2$ виражають одну і ту саму залежність.

Розглянуте вище рівняння має безліч розв'язків. Але не треба думати, що кожне рівняння другого степеня з двома невідомими має безліч розв'язків. Рівняння $x^2 + (y - 1)^2 = 0$ має тільки один розв'язок: $x = 0,\ y = 1$. Рівняння $x^2+3y^2=-1$ не має жодного розв'язку, бо квадрати – числа невід'ємні і їх сума не може дорівнювати -1.

Приблизно так можна пояснити учням рівняння другого степеня з двома невідомими. Потім бажано коротко сказати про розв'язування систем рівнянь, з яких одне першого степеня, а друге – другого.

Розглянемо, як розв'язувати систему рівнянь виду

$$\begin{cases} ax^2 + bxy + cy^2 + ax + ey + f = 0, \\ mx + ny + k = 0. \end{cases}$$

Такі системи можна розв'язувати способом підстановки. Треба в рівнянні першого степеня виразити одне невідоме через друге, наприклад y через x, і підставити це значення в рівняння другого степеня. В результаті дістанемо рівняння з одним невідомим x, не вище як другого степеня. Розв'язавши його, знайдемо щонайбільше два значення x. Підставивши їх у рівняння першого степеня, дістанемо відповідні значення невідомого y.

Така система рівнянь може мати не більш як два розв'язки (бо отримане рівняння з одним невідомим не може мати більш як два розв'язки).

Спочатку бажано розглянути найпростіші приклади систем, до яких можна застосувати теорему, обернену до теореми Вієта. Потім слід поступово ускладнювати їх.

Приклад 1.5.2.1. Розв'язати систему $\begin{cases} x - y = 4, \\ xy = 32. \end{cases}$

Розв'язання

Перший спосіб. З другого рівняння маємо: $y = \frac{32}{x}$. Підставимо це значення в перше рівняння:

$x - \frac{32}{x} = 4,\ x^2 - 4x - 32 = 0,$

$x_1 = -4,\ x_2 = 8.$

Тоді:

$y_1 = \frac{32}{-4} = -8,\ y_2 = \frac{32}{8} = 4.$

Відповідь: система має два розв'язки: $x_1 = -4,\ y_1 = -8$ *і* $x_2 = 8,\ y_2 = 4.$

Другий спосіб. Перепишемо дану систему так:

$$\begin{cases} x + (-y) = 4, \\ x \cdot (-y) = -32. \end{cases}$$

За теоремою, оберненою до теореми Вієта, маємо, що x і $-y$ – корені рівняння $z^2 - 4z - 32 = 0.$

Розв'яжемо його: $z_1 = -4,\ z_2 = 8.$

Отже, $x_1 = z_1 = -4,\ y_1 = -z_2 = -8;\ x_2 = z_2 = 8,\ y_2 = -z_1 = 4.$

Третій спосіб (графічний). Побудуємо в одній системі координат графіки рівнянь даної системи (або, що те саме, графіки функцій $y = x - 4$ і $y = \frac{32}{x}$.). Абсциси і ординати точок перетину цих графіків (рис. 1) будуть: $x_1 = -4,\ y_1 = -8;\ x_2 = 8,\ y_2 = 4.$

Це і є шукані два розв'язки даної системи.

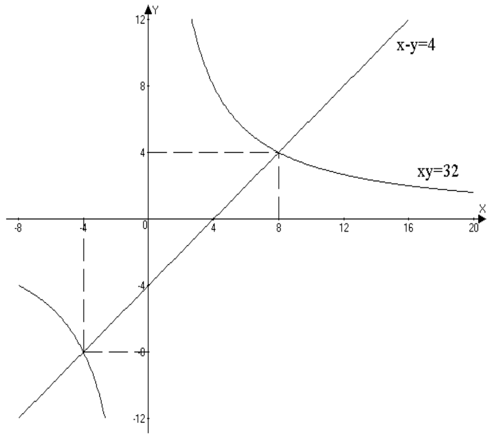


Рис. 1.5.1

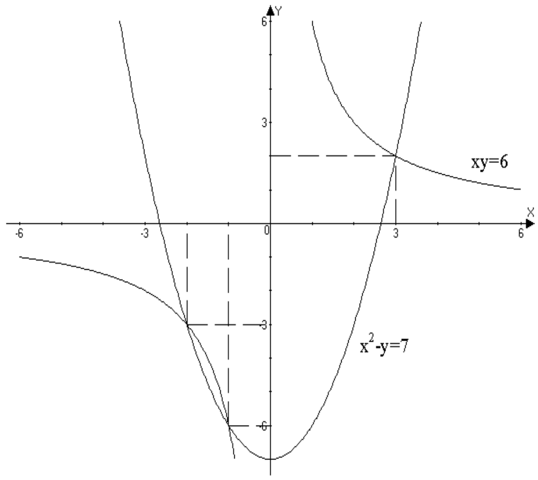


Рис.1.5.2

Не обов'язково всі ці способи розглядати одночасно. Краще спочатку розв'язати кілька систем способом підстановки, а інші способи розглядати пізніше.

Систем рівнянь, з яких кожне – другого степеня, семикласникам давати не треба, бо ці системи зводяться до рівнянь третього і четвертого степенів, а їх учні 7 класу розв'язувати не вміють. Хіба що в сильному класі можна запропонувати графічним способом розв'язати одну-дві таких системи.

Приклад 1.5.2.2. Розв`язати симтему $\begin{cases} xy = 6, \\ x^2 - y = 7. \end{cases}$

Розв'язання

Графіком першого рівняння є гіпербола. Графік другого рівняння – парабола. Справді, це рівняння можна подати у вигляді $y = x^2 - 7$, а графік такого рівняння, як відомо, – парабола, симетрична відносно осі ординат. Вітки її спрямовані вгору, а вершина знаходиться в точці (0; –7). Побудувавши графіки обох рівнянь (рис. 2), бачимо, що вони перетинаються в трьох точках:

(3; 2), (-2;-3) і (– 1; – 6).

Відповідь: система рівнянь має три розв'язки:

1) $x_1 = 3$, $y_2 = 2$;

2) $x_2 = -2$, $y_2 = 3$;

3) $x_3 = -1$, $y_3 = -6$.

Перевірка показує, що це точні розв'язки.

1.6. Розв`язування рівнянь методом заміни змінної

Даний метод дає змогу раціоналізувати розв`язування багатьох видів алгебраїчних рівнянь вищих степенів.

Означення 7

Рівняння $ax^{2n} + вx^{n} + c = 0$, *де* $a \neq 0$ називаються **тричленними** і заміною $x^{n} = t$ зводяться до квадратних.

Приклад 1.6.1. Розв`язати рівняння $x^4 + 2x^2 - 8 = 0$.

Розв`язання

$x^4 + 2x^2 - 8 = 0,$

$x^2 = t, t \geq 0,$

$t^2 + 2t - 8 = 0,$

$D = 4 + 32 = 36,$

$t_1 = \dfrac{-2-6}{2} = -4,$

$t_2 = \dfrac{-2+6}{2} = 2.$

Враховуючи те, що -4<0, то, повертаючись до заміни, матимемо:

$x^2 = 2, x_{1,2} = \pm\sqrt{2}.$

Якщо розв'язувати задане рівняння, не обмежуючись дійсною множиною, то:

$x^2 = -4, x_{3,4} = \pm\sqrt{-4} = \pm\sqrt{(-1)\cdot 4} = \pm\sqrt{i^2 \cdot 4} = \pm\sqrt{i^2}\cdot\sqrt{4} = \pm 2i.$

Відповідь: $\{\pm\sqrt{2}\,;\pm 2i\}$.

Означення 8

Ціле раціональне рівняння виду $a_0x^{n} + a_1x^{n-1} + ... + a_1x + a_0 = 0,\ a \neq 0$ (2) називають **симетричним** рівнянням *n*-го степеня.

Розглянемо симетричні рівняння 3-го, 4-го, 5-го степенів.

Означення 9

Рівняння $ax^3 + bx^2 + bx + a = 0$, *де* $a \in r \backslash \{0\}$, $b \in r$ називається **симетричним** рівнянням 3-го степеня.

Симетричні рівняння 3-го степеня мають корінь $x = -1$, тому діленням многочлена $ax^3 + вx^2 + вx + a = 0$ на двочлен $x + 1$ рівняння зводиться до квадратного.

Приклад 1.6.2. Розв`язати рівняння $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$.

Розв'язання

	3	-7	-7	3
1	3	-4	-11	8
-1	3	-10	3	0

Значить:

$$3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(3x^2 - 10x + 3) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -1 \\ 3x^2 - 10x + 3 = 0; \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1, \\ x = 3, \\ x = \frac{1}{3}. \end{array} \right.$$

Відповідь: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$.

<u>Означення 10</u>

Симетричне рівняння 4-го степеня можна записати у вигляді:

$$a x^4 + в x^3 + c x^2 + в x + a = 0, \ a \neq 0. \qquad (3)$$

Число $x = 0$ не є коренем цього рівняння, тому поділивши обидві частини рівняння (3) на x^2, тримаємо рівносильне йому рівняння:

$$ax^2 + bx + c + \frac{b}{x} + \frac{a}{x} = 0;$$

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Введемо змінну $y = x + \frac{1}{x}$, тоді:

$$y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x},$$

$$x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2.$$

Отже, розв`язування рівняння (3) зводиться до розв`язування квадратного рівняння $a(y^2 -2) + by + c=0.$

Приклад 1.6.3. Розв`язати рівняння $x^4 + 5x^3 + 4x^2 – 5x + 1= 0.$

Розв'язання

Поділимо обидві частини рівняння на $x^2 \neq 0$:

$$x^4 + 5x^3 + 4x^2 – 5x + 1= 0 \Leftrightarrow \left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x – \frac{1}{x}\right) + 4 = 0,$$

$$\begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = t, \\ t^2 + 5t + 6 = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - \dfrac{1}{x} = t, \\ \left[\begin{array}{l} t = -2, \\ t = -3, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \dfrac{1}{x} = -2 \\ x - \dfrac{1}{x} = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x \neq 0, \\ \left[\begin{array}{l} x^2 + 2x - 1 = 0, \\ x^2 + 3x - 1 = 0, \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \pm \sqrt{2}, \\ x = \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}. \end{array}\right.$$

Відповідь: $\left\{-1 \pm \sqrt{2}; \dfrac{-3 \pm \sqrt{13}}{2}\right\}$.

Означення 11

Симетричне рівняння 5-го степеня можна записати у вигляді:

$$ax^5 + вx^4 + cx^3 + cx^2 + вx. + a = 0, \ де \ a \neq 0. \qquad (4)$$

Число $x = –1$ є коренем цього рівняння, тому

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = (x+1)(ax^4 + (b–a)x^3 + (c–b+ a)x^2 + (b–a)x + a.$$

Отже, розв`язування рівняння (4) зводиться до розв`язування симетричного рівняння четвертого степеня.

В загальному випадку, будь-яке симетричне рівняння непарного степеня $2n+1$ має корінь $x =–1$ і його розв`язування зводиться до розв`язування симетричного рівняння парного степеня $2n$. Будь-яке симетричне рівняння парного степеня $2n$ заміною $y = x + \dfrac{1}{x}$ зводиться до розв`язування цілого раціонального рівняння степеня n.

Приклад 1.6.4. Розв`язати рівняння $x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0$.

Розв'язання

Поділимо многочлен на двочлен $x + 1$.

	1	-1	-3	-3	-1	1
1	1	0	-3	-6	-7	-6
-1	1	-2	-1	-2	1	0

$$x^5 - x^4 - 3x^3 - 3x^2 - x + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)(x^4 - 2x^3 - x^2 - 2x + 1) = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ x + \dfrac{1}{x} = t, \\ t^2 - 2t - 3 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ x + \dfrac{1}{x} = 3, \\ x + \dfrac{1}{x} = -1; \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ x^2 - 3x + 1 = 0, \\ x^2 + x + 1 = 0; \end{array}\right. \Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{l} x = -1, \\ x = \dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}, \\ x = \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}, \end{array}\right.$$

Відповідь: $\{\dfrac{3 \pm \sqrt{5}}{2}; -1; \dfrac{-1 \pm i\sqrt{3}}{2}\}$.

1.7. Задачі, які зводяться до складання квадратних рівнянь.

З методичного погляду розв'язування задач на складання квадратних рівнянь майже не відрізняється від розв'язування задач на складання лінійних рівнянь. В обох випадках учневі доводиться виконувати те саме: уважно вивчити задачу, вибрати невідоме, виразити через це невідоме кілька величин, про які говориться в задачі, скласти рівняння, розв'язати його і т. ін. Тому всі ті методичні зауваження, які звичайно даються до розв'язування задач на складання лінійних рівнянь, залишаються в силі і для задач на складання квадратних рівнянь. Проте деякі особливості ці задачі все-таки мають. Звичайно задачі на складання квадратних рівнянь важчі (хоч і не завжди) від задач на складання лінійних рівнянь. Можна вказати й істотнішу відмінність. Усі задачі на складання лінійних рівнянь можна розв'язати арифметичними методами, всі вони – типові арифметичні задачі. А задачі, які зводяться до квадратних рівнянь, за небагатьма винятками, розв'язувати арифметичними методами не можна.

Під час розв'язування задач, що зводяться до квадратних рівнянь, більше уваги доводиться приділяти дослідженню розв'язку. Навіть якщо задача і не містить буквених даних, все одно доводиться робити деяке дослідження – з'ясовувати, який з двох коренів квадратного рівняння задовольняє задачу. При цьому, часто треба виходити за межі математики, досліджувати, чи може трапитися та чи інша ситуація в житті, чи ні.

Приклад 1.7.1.

Розглянемо задачу:

«Тепловоз, пройшовши перший перегін 24 км, був затриманий деякий час, а тому наступний перегін проходив з швидкістю, більшою, ніж попередня, на 4 км за годину. Незважаючи на те, що другий перегін був довший від першого на 15 км, тепловоз пройшов його за час, тільки на 20 хв більший, ніж потрібно було на проходження першого перегону. Визначити початкову швидкість тепловоза».

Розв'язання

Позначимо початкову швидкість тепловоза буквою *x*. Тоді перший перегін він пройшов за $\frac{24}{x}$ год. Другий перегін завдовжки *24* км + *15* км = *39* км тепловоз пройшов з швидкістю *(x + 4)* км/год, тому затратив на це $\frac{39}{x+4}$ год.

У задачі відомо, що другий перегін тепловоз проходив на $\frac{1}{3}$ *год* довше, ніж перший.

Отже,

$$\frac{39}{x+4} - \frac{24}{x} = \frac{1}{3},$$

Звідки

$x^2 – 41x + 288 = 0,$

$x_1 = 9, x_2 = 32.$

Відповідь: 9 км/год.

Як бачимо, складене за умовою задачі рівняння має два корені. Деякі учні вважають, що задача має два розв'язки. Інші перший корінь відкидають, пояснюючи, що тепер тепловози не їздять з такою малою швидкістю. Перші не погоджуються: тепловоз може йти з швидкістю 9 км/год, якщо машиніст має якесь спеціальне завдання, наприклад перевірити, чи не пошкоджені рейки, або якщо цей тепловоз несправний, і т. д.

Звичайно, на уроці корисно хвилину-дві поговорити на таку тему, але пропонувати таку задачу на контрольну роботу не варто.

Способи розв’язування задач

Переважну більшість задач на складання квадратних рівнянь, які розв'язуються в школі, можна розв'язати кількома способами. Для прикладу розглянемо задачу.

Приклад 1.7.2.

«Колгосп мав засіяти 200 га до певного строку, але він засівав щодня на 5 га більше, ніж було передбачено планом, і тому закінчив сівбу на 2 дні раніше строку. За скільки днів колгосп закінчив сівбу?»

Розв'язання

<u>*Перший спосіб*</u>. Нехай сівба тривала *x* днів. Тоді за планом вона мала тривати *(x + 2)* дні. Колгосп засівав щодня по $\frac{200}{x}$ га. Мав засівати щодня по $\frac{200}{x+2}$ га.

За умовою задачі, колгосп засівав щодня на *5* га більше, ніж передбачалось планом, тому $\frac{200}{x}$ більше від $\frac{200}{x+2}$ на *5*. Маємо рівняння:

$$\frac{200}{x} - \frac{200}{x+2} = 5,$$

Звідси випливає:

$x^2 + 2x - 80 = 0,$

$x_1 = -10, \quad x_2 = 8.$

Від'ємне значення x задачу не задовольняє, тому $x = 8$.

Відповідь: 8 днів.

Другий спосіб. Нехай колгосп засівав щодня по x га; мав засівати по $(x - 5)$ га; сівба тривала всього $\frac{200}{x}$ днів; мала тривати $\frac{200}{x-5}$ днів.

За умовою задачі відомо, що колгосп закінчив сівбу на 2 дні раніше строку, тому $\frac{200}{x}$ менше від $\frac{200}{x-5}$ на 2. Отже, маємо рівняння:

$$\frac{200}{x-5} - \frac{200}{x} = 2,$$

Звідси випливає:

$x^2 - 5x - 500 = 0,$

$x_1 = -20, \quad x_2 = 25.$

Від'ємне значення x задачу не може задовольняти, тому його відкидаємо. Залишається $x = 25$.

По стільки гектарів засівали в колгоспі щодня. Але всього засіяли 200 га, отже, сівба тривала 200 : 25 = 8 (днів).

Відповідь: 8 днів.

Третій спосіб. Нехай сівба тривала x днів. Оскільки колгосп щодня засівав на 5 га більше, то за x днів він засіяв на 5 x більше, ніж мав засіяти за x днів. Виходить, $5x$ га він мав засіяти за 2 дні. Тоді за день він мав сіяти по $\frac{5}{2}x$ га. З другого боку, він за день мав засівати по $\frac{200}{x+2}$ га.

Отже,

$$\frac{5}{2}x = \frac{200}{x+2}$$

або

$x^2 + 2x - 80 = 0,$

$x_1 = -10, \quad x_2 = 8.$

Задачу задовольняє другий корінь: 8 днів.

Відповідь: 8 днів.

Четвертий спосіб. Припустимо, що колгосп сіяв усього x днів по y га щодня, мав сіяти $(x + 2)$ днів по $(y - 5)$ га щодня. Він засіяв і мав засіяти всього 200 га. Тому:

$$\begin{cases} xy = 200, \\ (x + 2)(y - 5) = 200, \end{cases}$$

Звідси отримаємо одне рівняння з невідомим x:

$$(x + 2)\left(\frac{200}{x} - 5\right) = 200,$$

$$x^2 + 2x - 80 = 0,$$

$$x_1 = -10, \quad x_2 = 8.$$

Відповідь: 8 днів.

Розглянуто чотири досить відмінні один від одного способи. Взагалі є понад десять різних способів розв'язування цієї задачі. Те саме можна сказати і про більшість інших задач, що їх розв'язують учні на уроках алгебри.

Зрозуміло, не треба щоразу вимагати, щоб учні одну й ту саму задачу розв'язували кількома способами. Але іноді корисно проаналізувати кілька способів. Тоді учні краще вдумуються у зміст не тільки цієї задачі, а й взагалі задач даного типу.

1.8. Олімпіадні задачі

Олімпіадна задача з математики – це задача підвищеної складності, нестандартна як за формулюванням, так і за методами розв'язування. Серед олімпіадних задач зустрічаються такі, для розв'язування яких потрібні незвичні ідеї та спеціальні методи, так і задачі більш стандартні, але деякі із них можна розв'язувати оригінальними способами.

В даному підрозділі наведені приклади олімпіад них завдань та способи їх розв`язання.

9 клас

Завдання 1. При яких значеннях параметра a корені рівняння $x^2-2(a-3)x-a+3=0$ належать проміжку *(-3; 0)*?

Розв`язання

Вказівка:

Нехай $f(x)=x^2-2(a-3)x-a+3$, D – дискримінант, а x_0 – абсциса вершини параболи. Оскільки корені рівняння належать проміжку*(- 3; 0)*, то

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ f(-3)>0, \\ f(0)>0, \\ -3<x_0<0; \end{cases} \Leftarrow \begin{cases} 4(a-3)(a-2)\geq 0, \\ 5a-6>0, \\ 3-a>0, \\ -3<a-3<0; \end{cases} \Rightarrow a\in(1{,}5;2].$$

Відповідь: $a\in(1{,}5;2]$.

Завдання 2. Відомо, що x_1 і x_2 – корені рівняння $x^2-(2a-3)x+a^2-4=0$. Знайдіть значення a, при яких виконується рівність $3x_1+3x_2=x_1x_2$.

Розв`язання

Вказівка:

За теоремою Вієта, $x_1+x_2=2a-3,\ x_1x_2=a^2-4.$ Маємо систему:

$$\begin{cases} D\geq 0, \\ 3(2a-3)=a^2-4. \end{cases}$$

Відповідь: *a=1.*

Завдання 3. Числа x і y такі, що виконується рівність: $\frac{xy}{x^2+6y^2}=\frac{1}{5}$. Знайти значення виразу $\frac{xy}{x^2-6y^2}$.

Розв'язання

$5xy=x^2+6y^2,\ x^2-5xy+6y^2=0\ \big|\ :\ y^2$**,**

$\left(\frac{x}{y}\right)^2-5\left(\frac{x}{y}\right)+6=0$**;**

$\frac{x}{y} = 3;$ $\frac{x}{y} = 2;$

$x = 3y$ $x = 2y$;

$$\frac{xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{3y^2}{9y^2 - 6y^2} = \frac{3}{3} = 1,$$

$$\frac{xy}{x^2 - 6y^2} = \frac{2y^2}{4y^2 - 6y^2} = \frac{2}{-2} = -1.$$

Відповідь: - 1.

Завдання 4. Скільки розв'язків має рівняння $\frac{2}{|1-x|+|x+1|} = a$ залежно від параметра a ?

Розв'язання

Вказівка:

Побудуємо графікі функцій:

$$f(x) = \frac{2}{|1-x| + |x+1|} \Leftrightarrow f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x}, \text{ якщо } x < -1, \\ 1, \text{ якщо } x \in [-1;1], і \quad y = a, \\ \frac{1}{x}, \text{ якщо } x > 1. \end{cases}$$

Зрозуміло, що рівняння матиме стільки розв'язків, скільки спільних точок мають графіки функцій $f(x)$ і $y = a$.

Відповідь: порожня множина, якщо $a \in (-\infty;0) \cup (1;\infty)$; два корені, якщо 0< a<1, безліч коренів, якщо a=1.

Завдання 5. Знайдіть усі натуральні значення n, для яких одночасно числа $9n + 28$ та $n + 5$ є точними квадратами цілих чисел.

Розв`язання

Припустимо, що n задовольняє умови задачі, тоді позначимо $9n + 28 = x^2$ та $n + 5 = y^2$, де $x, y > 0$. Тоді маємо: $9y^2 - x^2 = (3y - x)(3y + x) = 45 - 28 = 17$.

Тоді можливі такі варіанти, оскільки $3x+y>0$: $\begin{cases}3y-x=1,\\3y+x=17,\end{cases}$ $\begin{cases}3y-x=17,\\3y+x=1.\end{cases}$

Звідси ми знаходимо, що $y=6$ та $n=4$. Перевіркою переконуємось, що це значення задовольняє умову.

Відповідь: $n=4$.

Завдання 6. Розв'язати рівняння $x^2(x-2)^2-3(x-1)^2-1=0$.

Розв`язання

Приведемо рівняння до вигляду: $(x^2-2x)^2-3(x^2-2x+1)-1=0;$ $\left(x^2-2x\right)^2-3\left(x^2-2x\right)-4=0.$

Введемо заміну: $x^2-2x=t$.

Отримаємо рівняння: $t^2-3t-4=0.$

Звідки $\left[\begin{array}{l}t=-1,\\t=4;\end{array}\right.$ або $\left[\begin{array}{l}x^2-2x+1=0,\\x^2-2x-4=0;\end{array}\right.$ $x_1=1,$ $x_{2,3}=1\pm\sqrt{5}$.

Відповідь: $1;\ 1\pm\sqrt{5}.$

Завдання 7. Розв'яжіть рівняння: $(x-1)\cdot|x^2+1|+|x-1|\cdot(x^2+1)=0$.

Розв'язання

Оскільки $|x^2+1|=x^2+1>0$, то задане рівняння можна переписати у вигляді: $(x-1)+|x-1|=0$, або $|x-1|=-(x-1)$. Це рівносильне умові $x-1\le 0$, тобто розв'язком рівняння є множина чисел $x\le 1$.

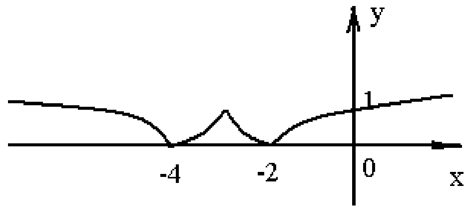
Відповідь: $x\le 1$.

10 клас

Завдання 1. Визначте кількість розв'язків рівняння $\left|1-\sqrt{|x+3|}\right|=a$ залежно від значення параметра *a*.

Розв`язання

Вказівка:



Розв'язки рівняння $\left|1-\sqrt{|x+3|}\right|=a$ – це точки перетину графіка функції $y=\left|1-\sqrt{|x+3|}\right|$ з прямою $y=a$. При $a<0$ – немає розв'язків; при $a=0$ – 2 розв'язки; при $0<a<1$ – 4 розв'язки; при $a=1$ – 3 розв'язки; при $a>1$ – 2 розв'язки.

Відповідь:

при $a<0$ – немає розв'язків;

при $a=0$ – 2 розв'язки;

при $0<a<1$ – 4 розв'язки;

при $a=1$ – 3 розв'язки;

при $a>1$ – 2 розв'язки.

Завдання 2. Скільки коренів має рівняння $\left|x^2-4|x|\right|=a$ залежно від значення параметра *a*?

Відповідь: якщо a<0, то рівняння не має коренів; якщо *a*=0, то рівняння має 3 корені; якщо $0<a<4$, то рівняння має 6 коренів; якщо *a*=4, то рівняння має 4 корені; якщо a>4, то рівняння має 2 корені.

Завдання 3. Знайдіть пари натуральних чисел a, b, які задовольняють рівність:

$$(a^2+1)(b^2+1)+45=2(2a+1)(3b+1).$$

Розв'язання

Розкриємо дужки та перегрупуємо усі доданки таким чином:

$$a^2b^2+a^2+b^2+44-12ab-4a-6b=0 \Leftrightarrow$$

$$(a^2b^2-12ab+36)+(a^2-4a+4)+(b^2-6b+9)=5 \Leftrightarrow$$

$$(ab-6)^2+(a-2)^2+(b-3)^2=5.$$

Зрозуміло, що сума трьох квадратів може давати в сумі 5 лише якщо $5 = 0 + 1 + 4$. Залишається розглянути випадки. По черзі подивимось, яка дужка дорівнює нулеві.

Перший випадок. $b = 3$, тоді $\begin{cases}(3a-6)^2 = 1,\\ (a-2)^2 = 4,\end{cases}$ або навпаки $\begin{cases}(3a-6)^2 = 4,\\ (a-2)^2 = 1.\end{cases}$

У обох системах a – не ціле.

Другий випадок. $a = 2$, тоді $\begin{cases}(2b-6)^2 = 1,\\ (b-3)^2 = 4,\end{cases}$ або навпаки $\begin{cases}(2b-6)^2 = 4,\\ (b-3)^2 = 1.\end{cases}$

У першій системі b – не ціле. У другій $b = 4$ та $b = 2$.

Третій випадок. $ab = 6$, тоді $\begin{cases}(b-3)^2 = 1,\\ (a-2)^2 = 4,\end{cases}$ або навпаки $\begin{cases}(b-3)^2 = 4,\\ (a-2)^2 = 1.\end{cases}$

З першої системи $b = 4$ або $b = 2$, та $a = 0$ або $a = 4$.

Це суперечить першій умові.

З другої системи $b = 5$ або $b = 1$, та $a = 1$ або $a = 3$.

Знову суперечить першій умові.

Відповідь: $a = 2, b = 2$ або $a = 2, b = 4$.

Завдання 4. Знайдіть всі пари цілих чисел *x* і *y*, які задовольняють систему нерівностей:

$$\begin{cases}2x^2 + 2y^2 + 24x - 28y + 167 < 0,\\ x + 2y < 15/2.\end{cases}$$

Розв`язання

Перша нерівність зводиться до вигляду: $2(x+6)^2 + 2(y-7)^2 < 3$. Ця нерівність в цілих числах виконується тільки в трьох випадках: $\begin{cases}x + 6 = 0,\\ y - 7 = 0,\end{cases}$ $\begin{cases}|x + 6| = 1,\\ y - 7 = 0,\end{cases}$ $\begin{cases}x + 6 = 0,\\ |y - 7| = 1.\end{cases}$

Розв’язавши ці системи і виконавши перевірку для другої нерівності вихідної системи одержимо два розв’язки: (-6; 6), (-7; 7).

Відповідь: (-6; 6), (-7; 7).

Завдання 5. Скільки коренів має квадратне рівняння $ax^2+bx+c=0,$ якщо $|a+c|=|b|,\ a\neq c$?

Розв`язання

Оскільки при заданих умовах $D=(a-c)^2>0$.

Відповідь: два.

Завдання 6. Знайти дійсні значення параметра a, при яких нерівність $x^2-|a-1|x+a+1>0$ справедлива для всіх тих значень х, які задовольняють нерівність $|x|<1$.

Розв`язання

Дискримінант квадратного тричлена дорівнює: $D=(a+1)^2-4(a+1)=(a+1)(a-3)$. Розглянемо можливі випадки:

а. $D<0$, тобто $-1<a<3$. Розв'язком нерівності є всі дійсні числа, зокрема й такі, що $|x|<1$.

б. $D=0$, тобто $a=-1$, або $a=3$. У випадку $a=-1,\ x^2>0$ для всіх x, крім $x=0$, який входить у розв'язок нерівності $|x|<1$, тобто $a=-1$ не задовольняє умові. Якщо $a=3$, то $x^2-4x+4>0$, $(x-2)^2>0$ для всіх x, крім $x=2$, що не входить до розв'язків нерівності $|x|<1$, тобто $a=3$ задовольняє умові задачі.

с. $\mathrm{D}>0$, $a<-1$, або $a>3$. У випадку $a<-1$, розв'язок нерівності $\left(-\infty;\frac{-a-1-\sqrt{D}}{2}\right)\cup\left(\frac{-a-1+\sqrt{D}}{2};+\infty\right)$ не задовольняє розв'язку нерівності $|x|<1$. При $a>3$ розв'язок нерівності $\left(-\infty;\frac{a+1-\sqrt{D}}{2}\right)\cup\left(\frac{a+1+\sqrt{D}}{2};+\infty\right)$ задовольняє нерівності $|x|<1$.

Відповідь: $a>-1$.

Завдання 7. Розв'яжіть рівняння: $\sqrt{x^2-4}\cdot|x|+\sqrt{x^2-4}\cdot x=0$.

Розв'язання

Оскільки $\sqrt{x^2-4}\geq 0$, то розглянемо два випадки.

Перший випадок. $\sqrt{x^2-4}=0$, звідки $x=\pm 2$ – розв’язки.

Другий випадок. $\sqrt{x^2-4}>0$, звідки $|x|>2$. Тоді задане в умові рівняння можна переписати таким чином: $|x|+x=0$. Звідси випливає, що розв’язком останнього рівняння є проміжок $x\le 0$.

З урахуванням першого випадку та умови $|x|>2$ маємо наведену відповідь.

Відповідь: $x\in(-\infty;\,-2]\bigcup\{\,2\,\}$.

11 клас

Завдання 1. При яких значеннях параметра a рівняння $x^3-13x^2+ax-27=0$ має три дійсних корені, які утворюють геометричну прогресію?

Розв`язання

Вказівка:

Нехай x, qx, q^2x – корені даного рівняння. За теоремою Вієта:

$$\begin{cases} x+qx+q^2x=13, \\ x^2q+q^2x^2+q^3x^2=a, \\ x^3q^3=27. \end{cases}$$

Тоді $\begin{cases} x=1, \\ q=3, \\ a=39 \end{cases}$ або $\begin{cases} x=9, \\ q=\dfrac{1}{3}, \\ a=39. \end{cases}$

Тоді $x^3-13x^2+39x-27=0;\ (x-1)(x-3)(x-9)=0.$

Відповідь: *a*=39.

Завдання 2.Знайдіть усі пари дійсних чисел $(x;y)$, які задовольняють нерівність $\sqrt{x^2-6x+18}\cdot\sqrt{y^2+14y+50}\le 3.$

Розв`язання

Вказівка:

Запишемо вираз, який стоїть у лівій частині рівності, так:

$\sqrt{(x-3)^2+9}\cdot\sqrt{(y+7)^2+1}$. Оскільки $(x+3)^2+9\geq 9$, а $(y+7)^2+1\geq 1$, то $\sqrt{(x-3)^2+9}\cdot\sqrt{(y+7)^2+1}\geq 3$. Тому рівність може виконуватися лише за умови $x-3=0, \quad y+7=0$.

Відповідь: $(3;-7)$.

Завдання 3. При яких значеннях параметра *a* нерівність $\cos^2 x-(2a-1)\cos x+a^2-a>0$ виконується при всіх дійсних значеннях *x*?

Розв`язання

Вказівка:

Виконуємо заміну $\cos x=t$. Маємо: $t^2-(2a-1)t+a^2-a>0$. Числа $t_1=a-1$ і $t_2=a$ – корені тричлена $t^2-(2a-1)t+a^2-a=0$. Маємо: $(t-(a-1))(t-a)>0$. Умова задачі виконуватиметься у двох випадках: якщо $t_1=a-1>1$ або $t_2=a<-1$.

Відповідь: $a\in(-\infty;-1)\cup(2;+\infty)$.

Завдання 4. Розв'яжіть рівняння $x+\sqrt{1-x}+1=\sqrt{x}+3\sqrt{x-x^2}$.

Розв`язання

Областю допустимих значень рівняння є відрізок $[0;1]$. Запишемо рівняння у вигляді $\left(\sqrt{x}\right)^2+\sqrt{1-x}+\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2-\sqrt{x}-3\sqrt{x}\sqrt{1-x}=0$.

Розкладаючи ліву частину рівняння на множники, одержимо: $\left(\sqrt{x}-\sqrt{1-x}\right)\left(2\sqrt{x}-\sqrt{1-x}-1\right)=0$.

Залишається розв'язати стандартними методами рівняння $\sqrt{x}-\sqrt{1-x}=0$, $2\sqrt{x}=\sqrt{1-x}+1$.

Відповідь: $\frac{1}{2};\frac{16}{25}$.

Завдання 5. Нехай для додатних дійсних чисел x і y має місце рівність $x^2+y^2+\frac{8xy}{x+y}=16$. Доведіть, що $x+y=4$.

Доведення

Задана рівність рівносильна таким співвідношенням:

$$\left(x^2+y^2\right)(x+y)+8xy=16(x+y),$$

$$\left((x+y)^2-2xy\right)(x+y)-16(x+y)+8xy=0,$$

$$(x+y)^3-16(x+y)-2xy(x+y)+8xy=0,$$

$$(x+y)\left((x+y)^2-16\right)-2xy(x+y-4)=0,$$

$$(x+y)(x+y-4)(x+y+4)-2xy(x+y-4)=0,$$

$$(x+y-4)\left((x+y)(x+y+4)-2xy\right)=0.$$

Для $x>0$ та $y>0$ $(x+y)(x+y+4)-2xy=x^2+y^2+4(x+y)>0$, що й потрібно було довести.

РОЗДІЛ 2

КВАДРАТНІ НЕРІВНОСТІ ТА МЕТОДИ ЇХ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ В ОСНОВНІЙ ШКОЛІ

2.1. Розв'язання квадратних нерівностей графічним методом

У дев'ятому класі учні знайомляться з квадратними нерівностями та методами їх розв'язування.

Починати дану тему варто з розгляду нерівності та формування алгоритму розв'язування.

$$f(x) = ax^2 + bx + c \geq 0, \text{ де } a \neq 0. \qquad (2.1)$$

Якщо $D = b^2 - 4ac < 0$, то нерівність (2.1) виконується при всіх $x \in R$ при $a > 0$ і нерівність (2.1) не виконується ні в одній точці при $a < 0$.

Якщо $D = b^2 - 4ac = 0$, то нерівність (2.1) завжди виконується в точці $x_0 = -\frac{b}{2a}$

Нерівність (2.1) виконується при $x \neq x_0$ при $a > 0$ і не виконується при $x \neq x_0$ при $a < 0$.

При $D = b^2 - 4ac > 0$, знаходимо корні рівняння $f(x) = 0$:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (2.2)$$

При $a > 0$ нерівність виконується при $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$.

При < 0 нерівність виконується при $x \in [x_2; x_1]$.

Можна сформувати просте правило.

<u>Означення 12</u>

Якщо квадратна нерівність $f(x)=ax^2+bx+c\geq 0$, де $a\neq 0$, виконана при великих значеннях $|x|$, то воно виконується поза межами відрізка, обмеженого коренями рівняння $f(x) = 0$. Якщо нерівність (2.1) не виконується при великих значеннях $|x|$, то вона виконується на відрізку, обмеженому коренями рівняння $x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$, $x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$.

Приклад 2.1. Розв'яжемо нерівність $x^2 + 4x + 3 \leq 0$.

Розв`язання

Оскільки нерівність не виконується при великих значеннях $|x|$, то вона виконується між коренями рівняння:

$x^2 + 4x + 3 = 0$,

$x_1 = -1, x_2 = -3$.

Таким чином, нерівність виконується на проміжку між коренями при $x \in [-3; -1]$.

Відповідь: $x \in [-3; -1]$.

Приклад 2.2. Розв'яжемо нерівність $-x^2 + 4x - 5 \leq 0$.

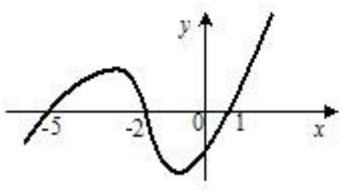
Розв`язання

Нерівність $-x^2 + 4x - 5 \leq 0$ виконується при великих значеннях модуля $|x|$, то вона буде виконуватись поза межами інтервалу, обмеженого коренями рівняння $-x^2 + 4x - 5 = 0$, тобто на проміжку поза коренями (зліва та справа) при $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty; -1] \cup [5; +\infty)$.

Приклад 2.3.

На рисунку зображено графік деякої функції $y = f(x)$, областю визначення якої є множина дійсних чисел:



За допомогою цього графіка легко визначити проміжки знакосталості функції f:

$y > 0$ на кожному з проміжків $(-5; -2)$ і $(1; \infty)$;

$y < 0$ на кожному з проміжків $(-\infty; -5)$ і $(-2; 1)$.

Встановивши проміжки знакосталості функції f, ми тим самим розв'язали нерівності $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$.

Проміжки $(-5; -2)$ і $(1; +\infty)$ разом складають множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$.

У таких випадках кажуть, що множина розв'язків нерівності $f(x) > 0$ є **об'єднанням** зазначених проміжків. Об'єднання проміжків записують за допомогою спеціального символу $\cup$.

Тобто, множину розв'язків нерівності $f(x) > 0$ можна записати так:

$(-5; -2) \cup (1; \infty)$.

Множину розв'язків нерівності $f(x) < 0$ можна записати так:

$(-\infty; -5) \cup (-2; 1)$.

Такий метод розв'язування нерівностей $f(x) > 0$ і $f(x) < 0$ за допомогою графіка функції $y = f(x)$ називають графічним.

Покажемо, як за допомогою цього методу розв'язують квадратні нерівності.

Нерівності виду $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c < 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$, $ax^2 + bx + c \leq 0$, де x — змінна, a, b, і c –деякі числа, називають квадратними.

З'ясуємо, які параметри визначають положення графіка квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис.

Наявність і кількість нулів квадратичної функції $y = ax^2 + bx + c$ визначаються за допомогою дискримінанта D квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$:

якщо $D > 0$, то нулів у функції два,

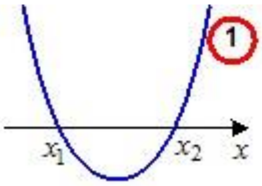
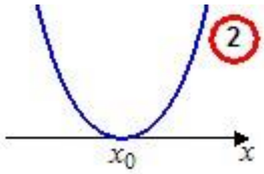
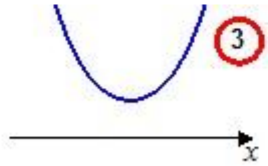
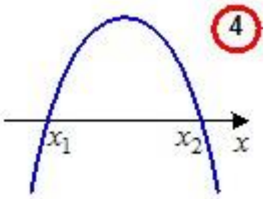
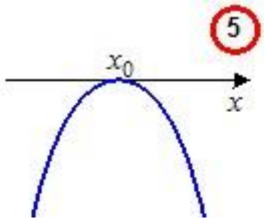
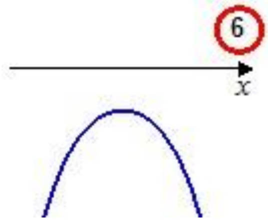
якщо $D = 0$, то нуль один,

якщо $D < 0$, то нулів немає.

Знак старшого коефіцієнта квадратного тричлена $ax^2 + bx + c$ визначає напрям віток параболи $y = ax^2 + bx + c$. При $a > 0$ вітки направлені вгору, при $a < 0$ –вниз.

Схематичне розміщення параболи $y = ax^2 + bx + c$ відносно осі абсцис залежно від знаків чисел a і D відображено в таблиці (x_1 і x_2 – нулі функції, x_0 –

абсциса вершини параболи):

	$D > 0$	$D = 0$	$D < 0$
$a > 0$			
$a < 0$			

Пояснимо, як цю таблицю використовувати для розв'язування квадратних нерівностей.

Наприклад, потрібно розв'язати нерівність $ax^2 + bx + c > 0$, де $a < 0$ і $D > 0$. Цим умовам відповідає клітинка 4 таблиці.

Тоді зрозуміло, що відповіддю буде проміжок $(x_1; x_2)$, на якому графік відповідної квадратичної функції розміщено над віссю абсцис.

Приклад 2.1.4.

Розв'яжіть нерівність $2x^2 - x - 1 > 0$.

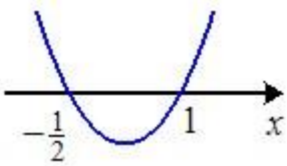
Розв'язання

Для квадратного тричлена $2x^2 - x - 1$ маємо: $a = 2 > 0$, $D = 9 > 0$.

Цим умовам відповідає клітинка 1 таблиці.

Розв'яжемо рівняння $2x^2 - x - 1 = 0$. Отримаємо $x_1 = -\frac{1}{2}$, $x_2 = 1$.

Тоді схематично графік функції $y = 2x^2 - x - 1$ можна зобразити так:



Із рисунка видно, що відповідна квадратична функція набуває додатних значень на кожному з проміжків $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)$ і $(1;+\infty)$.

Відповідь: $\left(-\infty;-\frac{1}{2}\right)\cup(1;+\infty)$

Приклад 2.1.5. Розв’яжіть нерівність $-9x^2 + 6x - 1 < 0$.

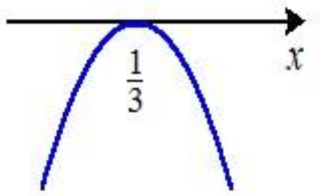
Розв’язання

Маємо: $a = -9$, $D = 0$.

Цим умовам відповідає клітинка 5 у таблиці.

Встановлюємо, що $x_0 = \frac{1}{3}$.

Тоді схематично графік функції $y = -9x^2 + 6x - 1$ можна зобразити так:



Із рисунка видно, що розв’язками нерівності є всі числа, крім $\frac{1}{3}$.

Зауважимо, що цю нерівність можна розв’язати іншим способом.

Перепишемо дану нерівність так:

$$9x^2 - 6x + 1 > 0.$$

Тоді $(3x - 1)^2 > 0$.

Виходячи з цього, маємо той самий висновок.

Відповідь: $\left(-\infty; \frac{1}{3}\right) \cup \left(\frac{1}{3}; +\infty\right)$.

Приклад 2.1.6. Розв’яжіть нерівність $3x^2 - x + 1 < 0$.

Розв’язання

Маємо: $a = 3 > 0$, $D = -11 < 0$.

Цим умовам відповідає клітинка 3 таблиці.

У цьому випадку графік функції $y = 3x^2 - x + 1$ не має точки з від’ємними ординатами.

Відповідь: розв’язків немає.

Приклад 2.1.7. Розв’яжіть нерівність $0{,}2x^2 + 2x + 5 \le 0$.

Розв’язання

Оскільки $a = 0{,}2$, $D = 0$, то даному випадку відповідає клітинка 2 у таблиці, причому $x_0 = -5$.

Але у цьому випадку квадратична функція набуває тільки невід’ємних значень.

Отже, дана нерівність має єдиний розв’язок $x = -5$.

Відповідь: –5.

2.2. Метод інтервалів

Метод інтервалів застосовується при розв’язуванні багатьох нерівностей, але простіше всього застосовується при розв’язуванні раціональних нерівностей вигляду

$$(x - x_1)^{\alpha}(x - x_2)^{\beta} \dots (x - x_n)^{\gamma} \ge 0. \qquad (2.2.1)$$

де $\alpha, \beta, \dots, \gamma$ – натуральні показники степеня.

Для розв’язування нерівностей знаходять корені лівої частини нерівностей і наносять на числову вісь. Потім приводять криву так, що крива вище найбільшого кореня лівої частини нерівності. При переході через корінь x_n лівої частини нерівності (2.2.1):

- крива залишається з тієї ж сторони від вісі x, якщо показник γ – парний;
- переходить на другу від вісі x, якщо показник γ – непарний.

Приклад 2.2.1. Розв’яжемо нерівність $x(x - 1)\,(x - 2)^2(x - 3) > 0$.

Розв`язання

Наносимо корені $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$, $x_4 = 3$ на вісь x і малюємо криву, визначаючи знаки лівої частини нерівності.

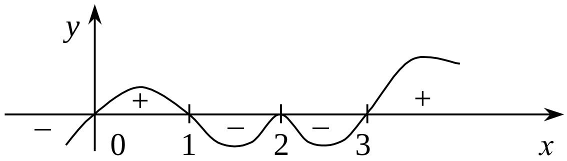


Рис. 2.2.1

Нерівності мають розв’язок *x є (0; 1) ∪ (3; + ∞).*

Відповідь: x є (0; 1) ∪ (3; + ∞).

Приклад 2.2.2. Розв’яжіть нерівність $(x-1)(x^2-1)(x^3-1)(x^4-1) \le 0.$

Розв`яання

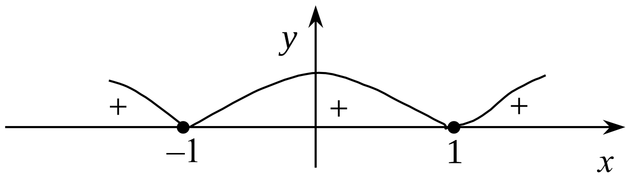
Розкладемо ліву частину нерівності на множники:

$(x+1)^2(x-1)^4(x^2+1)(x^2+x+1) \le 0.$

Можна поділити ліву частину на множники (x^2+1), (x^2+x+1), які завжди додатні.

$(x+1)^2(x-1)^4 \le 0.$

Відкладаємо на числовій осі O_x точки $x_1 = -1$, $x_2 = 1$.



Розв’язком нерівності є тільки значення $x = \pm 1$.

Розв’яжемо більш складніші раціональні нерівності.

Приклад 2.2.3. Розв’яжіть нерівність

$$\frac{(x+2)^2(x+1)^3(x)^2(x-1)^3(x-2)^4(x-4)^3}{(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)^2(x-5)^2} \ge 0.$$

Відкладемо на числовій вісі точки $x_1 = -3$, $x_2 = -2$, $x_3 = -1$, $x_4 = 0$, $x_5 = 1$, $x_6 = 2$, $x_7 = 3$, $x_8 = 4$, $x_9 = 5$, в яких ліва частина нерівності може змінити свій знак.

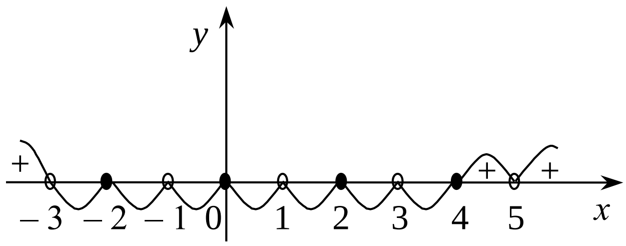


Рис. 2.2.3

Точки $x_1 = -3$, $x_3 = -1$, $x_5 = 1$, $x_7 = 3$, $x_9 = 5$, в яких нерівність не виконується, відмічаємо пустим кружечком.

Утворюється розв'язок нерівності:

$x \in (-\infty;-3) \cup \{-2\} \cup \{0\} \cup \{2\} \cup [4;5) \cup (5;+\infty)$.

Відповідь: $x \in (-\infty;-3) \cup \{-2\} \cup \{0\} \cup \{2\} \cup [4;5) \cup (5;+\infty)$.

ВИСНОВОК

Згідно з завданнями дипломного дослідження:

1. Проведено узагальнення навчальних програм і традиційних методів викладання тем розділу «Квадратні рівняння та нерівності», розподілених в курсах алгебри 7-10 класів закладів загальної середньої освіти.

2. Наведені 58 прикладів розв’язування рівнянь та нерівностей з усіх розділів шкільної програми алгебри, які наочно доводять, що на другому та третьому рівні складності методів розв’язування рівнянь та нерівностей у 9 та 10 класах виникає потреба в графічних й аналітичних методах попереднього аналізу області допустимих значень та інтервалів знаходження коренів рівнянь і координат точок множин нерівностей.

3. Проаналізована обґрунтованість інноваційних напрямків розробки методів і наочності викладання тем розділу «Квадратні рівняння та нерівності» в курсах алгебри 7-10 класів закладів загальної середньої освіти та доведено, що суттєвою проблемою у викладанні традиційних методів розв’язування рівнянь та нерівностей є проблема рівносильності тотожних перетворень рівнянь і нерівностей у процесі пошуку коренів та відповідних інтервалів. Для вирішення цієї проблеми запропоновані методи інноваційного підходу з застосуванням додаткового аналізу ОДЗ рівнянь та нерівностей на всіх етапах послідовного процесу перетворень, що суттєво зменшує ризик отримання «зайвих» та «загублених» коренів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Бевз Г.П., Бевз В.Г. Алгебра: підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. К. : Видавничий дім «Освіта», 2017. 272 с.
2. Збірник задач з математики для вступників до вузів / За редакцією М.І. Сканаві. Київ : Вища школа, 1992. 445 с.
3. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 8-го кл. закл. заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Київ : Генеза, 2021. 272 с.
4. Істер О.С. Алгебра : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закл. Київ : Генеза, 2017. 264 с.
5. Істер О., Єргіна О. Алгебра і початки аналізу : (профіл. рівень) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 416 с.
6. Кравчук В., Підручна М., Янченко Г. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Тернопіль : Підручники і посібники, 2017. 264 с.
7. Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я. Інноваційні методи навчання математики : Науково-методичний посібник. Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008. 148 с.
8. Кушнір В., Кушнір Г., Петюренко А. Формування творчого мислення учнів при розв'язуванні рівнянь та нерівностей. *Математика в школі*, 2005, №5. С. 35-40.
9. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2019. 352 с.
10. Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А., Полонський В.Б., Якір М.С. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівент стандарту : підруч. для 10 кл. закладів загальної середньої освіти. Х. : Гімназія, 2018. 256 с.
11. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підруч. для 8-го кл. закладів заг. серед. освіти. 2-ге вид., переробл. Х. : Гімназія, 2021. 240 с.
12. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закладів. Х. : Гімназія, 2017. 272 с.

13. Мерзляк А.Г., Полонський В.Б., Якір М.С. Алгебра для загальноосвітніх навчальних закладів з поглибленим вивченням математики : підруч. для 9-го кл. загальноосвіт. навч. закладів.. Х. : Гімназія, 2017. 416 с.
14. Михалін Г.О. Професійна підготовка вчителя математики у процесі навчання математичного аналізу. Київ : НПУ імені М. П. Драгоманова, 2003. 320 с.
15. Модельні навчальні програми для 5-9 класів Нової Української Школи (запроваджується поетапно з 2022 року) URL: https://is.gd/pxGijf (дата звернення: 15.12.2022).
16. Навчальні програми для 6-9 класів URL: https://mon.gov.ua/ua/osvita/zagalna-serednya-osvita/navchalni-programi/navchalni-programi-5-9-klas (дата звернення: 15.12.2022).
17. Навчальна програма для поглибленого вивчення математики в 8-9 класах загальноосвітніх навчальних закладів URL: https://mon.gov.ua/storage/app/media/zagalna%20serednya/programy-5-9-klas/matematika-algebra-geometriya.pdf (дата звернення: 15.12.2022).
18. Прокопенко Н.С., Захарійченко Ю.О., Кінащук Н.Л. Алгебра : підруч. для 9 кл. загальноосвіт. навч. закл. Харків : Вид-во «Ранок», 2017. 288 с.
19. Резуненко В.О., Ярмак В.О. Тригонометричні рівняння і нерівності для старшокласників і абітурієнтів. Х. : Вид. група «Основа», 2011. 94 с.
20. Репета В.К. Рівняння, нерівності та системи рівнянь, що містять знак абсолютної величини. *Математична газета*, 2006. №5. С.27-32.
21. Ріжняк Р.Я., Левшин М.М., Прохур Ю.З., Фурсикова Т.В. Системно-діяльнісне навчання як засіб реалізації інтегративного підходу (на прикладі вивчення курсів математики та інформатики). Київ, Науково-методичний центр вищої освіти, 2004. Випуск 39. С. 33-48.
22. Слепкань З.І. Методика навчання математики. Підручник для студентів мат. спец. пед. навч. закладів. К. : Зодіак - ЕКО, 2000. 512 с.
23. Тарасенкова Н.А., Богатирьова І.М., Коломієць О.М., Сердюк З.О. Алгебра : підруч. для 9 класу загальноосвіт. навч. закл. К. : УОВЦ «Оріон», 2017. 272 с.

24. Титаренко О.М. 5770 задач з математики з відповідями. 2 е вид. випр. Харків : ТОРГСІНГ ПЛЮС, 2007. 336 с.
25. Титаренко О.М. Форсований курс шкільної математики : Навчальний посібник. Х. : Торсінг, 2003. 368 с.
26. Фурман М.С. Збірник задач з алгебри і початків аналізу. 11 клас. Х. : Вид. група «Основа», 2010. 159 с.

ДОДАТКИ

ДОДАТОК А

НЕПОВНІ КВАДРАТНІ РІВНЯННЯ

І рівень. *Найпростіша відтворювальна самостійна робота (за зразком)*

Розв’язування неповних квадратних рівнянь

<table>
<tr><th>Коефіцієнт</th><th colspan="2">$b=0$</th><th>$c=0$</th><th>$b=0$ і $c=0$</th></tr>
<tr><td>Вигляд</td><td colspan="2">$ax^2+c=0$</td><td>$ax^2+bx=0$</td><td>$ax^2=0$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Загальний розв’язок</td><td colspan="2">$ax^2=-c,$
$x^2=-\frac{c}{a}.$</td><td rowspan="3">$x(ax+b)=0,$
$x_1=0$ або $ax+b=0,$
$ax=-b,$
$x_2=-\frac{b}{a}.$
Два розв’язки
Відповідь: $0;-\frac{b}{a}.$</td><td rowspan="3">$x^2=0,$
$x=0.$</td></tr>
<tr><td>Якщо
$-\frac{c}{a}>0$</td><td>Якщо
$-\frac{c}{a}<0$</td></tr>
<tr><td>$x_{1,2}=\pm\sqrt{-\frac{c}{a}}$</td><td>Рівняння розв’язків немає</td></tr>
<tr><td>Приклад</td><td colspan="2">$2x^2-18=0,$
$2x^2=18,$
$x^2=9,$
$x_{1,2}=\pm3.$
Відповідь: ±3.</td><td>$2x^2-7x=0,$
$x(2x-7)=0,$
$x=0$ або $2x-7=0,$
$2x=7,$
$x=3,5.$
Відповідь: 0; 3,5.</td><td>$7x^2=0,$
$x^2=0,$
$x=0.$
Відповідь: 0.</td></tr>
<tr><td>Розв’яжи сам</td><td colspan="2">$2x^2-8=0$</td><td>$2x^2+3x=0$</td><td>$9x^2=0$</td></tr>
</table>

1. Розв’яжіть рівняння за зразком:

$x-6x=0$,	$0,5x^2-7,5=0$,	$x^2=2$,
$3x^2-11=0$,	$x^2=81$,	$3-x^2=0$,
$8x-x^2=0$,	$x^2-25=0$,	$5x^2-15x=0$,
$-x^2-11=0$,	$6084-x^2=0$,	$49x-x^2=0$,
$x^2=0,09$,	$2x^2-98=0$,	$2x^2+x=0$,
$x^2+4x=0$,	$x^2=-3$,	$49x^2=0$,
$x^2=-961$,	$2x^2+8=0$,	$3x^2+75=0$,
$4-2x^2=6$,	$7x^2=21952$,	$0,1x^2-547,6=0$.

2. Запишіть квадратне рівняння, коефіцієнти якого дорівнюють:

Коефіцієнти			**Квадратне рівняння**
a	***b***	***c***	$ax^2+bx+c=0$
7	-2	5	
-11	4	0	
1	8	-3	
-1,8	0	-2,3	

II рівень. ***Реконструктивно-варіативна самостійна робота***

1. Доведіть, що:

   а) кожне з чисел 7 та -7 є коренем рівняння $2x^2-98=0$;

   б) кожне з чисел 0 та -4 є коренем рівняння $x^2-98=0$.

2. Розв’язуючи рівняння $0,5x^2-7,5=0$, учень знайшов, що корені дорівнюють 3 та -3. Доведіть, що він помилився.

3. При яких значеннях b рівні значення двочленів b^2+6b та $3b^2-b$?

4. Складіть квадратне рівняння, у якому:

   1) старший коефіцієнт дорівнює 6, другий коефіцієнт дорівнює 7, а вільний член дорівнює 2;

   2) старший коефіцієнт дорівнює 1, другий коефіцієнт дорівнює –8, а вільний член дорівнює $-\dfrac{1}{3}$;

   3) старший коефіцієнт дорівнює 7,2, другий коефіцієнт дорівнює –2, а вільний член дорівнює 0.

5. Розв’яжіть рівняння:

$$(3x-1)(2x-2)=(x-4)^2+6;$$
$$6x-6(x-4)=(2x-1)(2x+1);$$
$$(3x-4)^2-(5x+2)(2x+8)=0;$$
$$(2x-1)(2x+3)-(x+2)^2=0.$$

6. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{x^2-3}{5}-\frac{x^2-1}{2}=2; \qquad \frac{x^2-8x}{6}=x;$$
$$\frac{x^2-4}{5}-\frac{x^2-1}{3}+1=0; \qquad \frac{x^2-x}{2}+\frac{x}{3}=0.$$

III рівень. *Частково пошукова самостійна робота*

1. Розв’яжіть рівняння:

$$\frac{x}{3}=\frac{2883}{x};$$
$$\frac{8}{3}=\frac{2883}{x};$$
$$2x^2-\frac{3x^2}{|x|}=0.$$

2. Складіть квадратне рівняння, яке має такі корені:

а) 5 і 7; б) 4 і – 4; в) 0 і 11.

3. Подайте задане рівняння у вигляді $ax^2+bx+c=0$, укажіть значення коефіцієнтів *a, b* і *c*:

$$6x(3-x)=7-2x^2,$$
$$(5x-1)^2=(x+4)(x-2).$$

4. Розв’яжіть рівняння:

$$(5x-1)^2-(3x+2)+(x-1)(x+1)=x-4,$$
$$12x^2-(3x+2)^2+(x+4)(5x-1)=x^2-8,$$
$$\frac{5x^2-4}{2}-\frac{x^2+5}{3}=5;$$

$$\frac{13x^2-1}{4}-\frac{x^2+8}{9}-2=0.$$

IV рівень. *Творча, дослідницька самостійна робота*

1. Сума квадратів двох послідовних цілих чисел на 17 більша за подвоєне більше з них. Знайдіть ці числа.

2. При якому значенні m не є квадратним рівняння:

$$\left(m-4\right)x^2+mx+7=0,$$
$$\left(m^2-8m\right)x^2+\left(m+8\right)x+10=0,$$
$$\left(m^2-81\right)x^2-6x+m=0.$$

3. Складіть квадратне рівняння з числовими коефіцієнтами, корені якого пов’язані співвідношенням $2x_1=3x_2$.

4. Розв’яжіть відносно x рівняння, в якому $a\neq 0$:

$$ax^2=9,$$
$$ax^2-\frac{1}{a}=0,$$
$$6,25-a^2x^2=0,$$
$$ax^2-\frac{6}{a}=0.$$