Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«ЗАДАЧА ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ЗАМКНЕНОЮ КУЛЕЮ ТА ОПУКЛОЮ МНОЖИНОЮ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ТА ДЕЯКІ ЇЇ ЧАСТКОВІ ВИПАДКИ»**

Виконав: студент II курсу, М1-М22 групи
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Коберник Денис Олександрович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Рецензент: **Щирба В. С.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

В роботі досліджується задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору.

Актуальність теми. Постановка задачі. Відомо, що останнім часом велика увага приділяється математичним екстремальним задачам теорії апроксимації. Це зумовлено, перш за все, їх практичним змістом. Адже ідея теорії апроксимації полягає в тому, що складні математичні об’єкти наближаються (замінюються) найкращим чином простими і зручними у використанні (обчисленні) математичними об’єктами. Так, наприклад, складна неперервна дійснозначна функція замінюється найкращим способом алгебраїчним многочленом, значення якого обчислюється просто (в результаті виконання лише операції додавання, віднімання та множення дійсних чисел).

В процесі дослідження задач теорії наближення складних функції простими стало зрозумілим, що задачі найкращого наближення складних функцій простими допускають загальну постановку в термінах нормованих просторів, якщо в якості міри відхилення розглядається норма простору. Ця задача в лінійному нормованому просторі $(Z, \|\cdot\|)$ формуються таким чином: в Z фіксується точка z_0 та вибирається множина B цього простору. Потрібно знайти таку точку $y^* \in B$, для якої

$$\inf_{y\in B}\|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|, \tag{0.1}$$

тобто таку точку множини B , відстань від точки z_0 до якої не перевищуватиме відстаней від z_0 до інших точок множини B (є найменшою з відстаней від z_0 до точок множини B). Точку y^* в цьому випадку називають найкращим наближенням точки z_0 в множині B або просто екстремальним елементом для величини (0.1).

Основні результати дослідження величини (0.1) подані, зокрема, у монографіях Н.І. Ахієзера [1], В.К. Дзядика [2], М.П. Корнєйчука [3], П.-Ж. Лорана [4], О.І. Степанця [5,6] та ін.

Якщо в задачі відшукання величини (0.1) точку z_0 замінити замкненою кулею $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ з центром у точці z_0 і радіусом r, то прийдемо до задачі практичного змісту, а саме до задачі відшукання величини між замкненою кулею $B_r(z_0)$ лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ та множиною B цього простору, тобто до задачі відшукання величини

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\|. \tag{0.2}$$

Оскільки задача відшукання величини (0.1) є частковим випадком задачі відшукання величини (0.2), то результати загального характеру, отримані при дослідженні задачі (0.2), представляють самостійний інтерес і можуть бути відправним пунктом при дослідженні задачі (0.1) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.2).

Актуальним, зокрема, є питання зв'язку між величинами (0.1) та (0.2), між їх оптимальними роз'язками, питання існування цих оптимальних розв'язків, їх єдиності, характеризації та інші питання, які вирішуються в теорії апроксимації при розгляді подібних задач.

Задача відшукання величини (0.2) і згадані вище питання та інші питання, які, зазвичай, розглядаються в теорії апроксимації і стосуються дослідження апроксимаційних задач розглядаються в дипломній роботі.

Отже, задача, що досліджується в роботі – це задача такого змісту.

Нехай Z - лінійний над полем дійсних чисел простір, а $\|\cdot\|$ - норма, задана на просторі Z.

Для $z_0 \in Z$ та $r \geq 0$ позначимо через $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$ - кулю з центром у точці z_0 радіуса r. Через B будемо позначати довільну фіксовану опуклу множину простору $(Z, \|\cdot\|)$. Відстанню між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та множиною B будемо називати величину

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\|. \tag{0.3}$$

Поставимо задачу відшукання цієї величини. Отже, в роботі розглядається задача (0.3) відшукання відстані (найкращої) між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та довільною фіксованою опуклою множиною B лінійного нормованого простору Z.

Якщо елемент $(z^*, y^*) \in B_r(z_0) \times B$ такий, що $\|z^* - y^*\| \leq \|z - y\|$ для всіх $(z, y) \in B_r(z_0) \times B$, тобто $\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\|$, то цей елемент (z^*, y^*) будемо називати екстремальним елементом для величини (0.3).

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є повторення або ознайомлення з поняттями та твердженнями, які використовуються як допоміжні при виконанні роботи; побудова задачі еквівалентної до задачі (0.3), встановлення зв'язку між цими задачами; встановлення зв'язку між величинами (0.1) та (0.3), їх екстремальними послідовностями та екстремальними елементами; встановлення та доведення теорем існування екстремального елемента для задачі (0.3) в загальному випадку; доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (0.1) та (0.3) в банаховому просторі, в якому в якому має місце «нерівність паралелограма»; доведення теореми єдиності екстремального елемента для задачі (0.1) та (0.3) у строго нормованому просторі; встановлення співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.3), критеріїв екстремального елемента для цієї величин, основаних на співвідношенні двоїстості та їх конкретизація на окремі часткові випадки.

Об'єктом дослідження є задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору.

Предметом дослідження є такі питання теорії екстремальних задач в лінійних нормованих просторах, як побудова еквівалентних їм екстремальних задач; які є простішими для дослідження; встановлення теореми існування та єдиності екстремальних елементів цих задач; встановлення двоїстих співвідношень між досліджуваною задачею та двоїстою їй задачею. Встановлення критеріїв екстремальності допустимих розв'язків двоїстих задач, основаних на співвідношенні двоїстості.

Задачами дослідження є:

1. Побудова в лінійному нормованому просторі задачі відшукання величини (2.4),еквівалентної досліджуваній задачі (2.1),встановлення зв'язку між цими величинами та їх екстремальними елементами.

2. Встановлення зв'язку між величинами (2.1) та (2.2), їх екстремальними послідовностями та екстремальними елементами.

3. Встановлення та доведення теорем існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце « нерівність паралелограма».

5. Доведення теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1) та (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлення співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведення критерія екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизація критерія екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в задачі відшукання величини (2.1), є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

При вирішенні зазначених вище задач в дипломній роботі використовувались методи метематичного, функціонального, опуклого аналізів; теорії оптимізації, апроксимації, екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів. Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Побудовано в лінійному нормованому просторі задачу оптимізації (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі (2.1) відшукання найкращої відстані від замкненої кулі до опуклої множини.

Встановлено зв'язок між оптимальними значеннями їх цільової функції та між їх екстремальними елементами.

2. Встановлено зв'язок між шуканою величиною (2.1) та величиною (2.2) найкращого наближення центра кулі опуклою множиною, що фігурують у постановці задачі відшукання величини (2.1), між екстремальними послідовностями та екстремальними елементами цих величин.

3. Встановлено та доведено теореми існування екстремального елемента для величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величин (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма».

5. Доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1); (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведено критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основані на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизовано критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в задачі відшукання величини (2.1) є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

Практичне застосування отриманих результатів. Дипломна робота має теоретичний характер. Її результати можна використати при відшукані відстані між замкненою кулею та опуклою множино в тому числі між замкненою кулею та опуклим конусом, підпростором, скінченновимірним підпростором; між точкою лінійного нормованого простору та опуклою множиною (підпростором, скінченновимірним підпростором). Результати дипломної роботи можна використати також при дослідженні, розв’язуванні й інших екстремальних задач, розвитку їх теорії.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано в працях:

Коберник Д. Задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору та деякі її часткові випадки. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [http://elar.kpnu.edu.ua:8081/xmlui/bitstream/handle/123456789/7648/Konferentsiia-studentska-fiz-mat-2023.pdf?sequence=3&isAllowed=y]. Кам’янець-

Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С.10-12.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі розглянуто деякі поняття та твердження, які використовуються в дипломній роботі при дослідженні поставленої в ній задачі (поняття лінійного нормованого простору, замкненої та відкритої кулі, опуклої множини; відстані між двома множинами лінійного нормованого простору; скінченновимірного підпростору; банахового та гільбертового просторів; лінійного неперервного функціонала тощо).

У другому розділі поставлено задачу відшукання величини (2.1) та її екстремального елемента; побудовано задачу відшукання величини (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі відшукання величини (2.1), встановлено зв’язки між величинами (2.1) та (2.4) та їх екстремальними елементами; встановлено зв’язки між величинами (2.1) та (2.2) і їх екстемальними елементами та екстремальними послідовностями; доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в загальному випадку.

У третьому розділі доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величини (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма»; доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1),(2.2) у строго нормованому просторі; встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1); доведено критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1); конкретизовано критерії екстремального елемента для величини (2.1) на випадок, коли множина B є опуклим конусом, з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором.

РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ПОНЯТТЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ. ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ. КУЛІ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ. ВІДСТАНЬ МІЖ ДВОМА МНОЖИНАМИ. СКІНЧЕННОВИМІРНІ ПІДПРОСТОРИ. БАНАХОВІ ТА ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ. СПРЯЖЕНІ ПРОСТОРИ.

1.1. Лінійний над полем дійсних чисел нормований простір. Приклади. Властивості норми. Метрика, асоційована з нормою.

В дипломній роботі через Z позначається лінійний над полем дійсних чисел простір, тобто це така множина, на якій задана операція додавання її елементів та операція множення дійсного числа на елемент із Z, результати яких не виходять за межі Z, тобто $(\forall x, y \in Z)\; x + y \in Z$ і $(\forall \alpha \in R)(\forall x \in Z)\alpha x \in Z$ та, крім того $\forall x, y, z \in Z$; $\alpha, \beta \in R$ справедливі такі співвідношення :

1) $x + y = y + x$;
2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;
3) $\exists\, 0 \in Z : x + 0 = x\ \forall x \in Z$;
4) $(\forall x \in Z)(\exists(-x) \in Z)\;\; x + (-x) = 0$;
5) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;
6) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$;
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;
8) $1 \cdot x = x$.

(див., наприклад, [7, с.75])

Прикладом лінійного над полем дійсних чисел простору може бути простір $C[a, b]$ всіх неперервних на відрізку $[a, b]$ дійсних функцій.

Легко переконатися, що для $C[a, b]$ виконуються всі умови, про які йшла мова вище.

(див., наприклад, [7, с. 76]).

Якщо Z є лінійним над полем дійсних чисел простором і кожним $x, y, z, \cdots$, що належить Z, поставлено у відповідність числа $\|x\|, \|y\|, \|z\|, \cdots$ такі, що

1) $\|x\| \geq 0; \|x\| = 0$ тоді і тільки тоді, коли $x = 0$;
2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|, \alpha \in R$;
3) $\|y + x\| \leq \|x\| + \|y\|$,

то функцію $x \in Z \to \|x\|$, задану в такий спосіб на Z, називають нормою, заданою на лінійному над полем дійсних чисел просторі Z, а умови 1) – 3) називають аксіомами норми.

Лінійний над полем дійсних чисел простір Z, на якому задана $\|\cdot\|$ $(x \in Z \to \|x\|)$, називають лінійним нормованим простором і позначають $(X, \|\cdot\|)$. (див., наприклад, [7, с. 94])

Як відомо (див. вище), $C[a, b]$ є лінійних над полем дійсних чисел простором, елементами якого є функції, неперервні на $[a, b]$. Нехай $x = x(t)$ є неперервною на $[a, b]$ функцією, а $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$.

Маємо, що :

1) $\|x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| \geq 0$; якщо $x = x(t) = 0$, то $\|x\| = \|0\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|0| = 0$; якщо ж $x = x(t)$ є функцією, заданою і неперервною на $[a, b]$, та $\|x\| = 0$, то $|x(t)| = 0$ для всіх $t \in [a, b]$. Звідси випливає, що $x(t) = 0, t \in [a, b]$, тобто, що $x = 0$.

Перша аксіома норми виконується;

2) якщо $x = x(t) \in C[a, b], \alpha \in R$, то $\|\alpha x\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|\alpha x(t)| =$
$= \max\limits_{t\in[a,b]}|\alpha||x(t)| = |\alpha| \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| = |\alpha|\|x\|, \|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$.

Друга аксіома норми виконується.

3) нехай $x, y \in C[a,b]$. Тоді $\|x+y\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)+y(t)| \leq$
$\leq \max\limits_{t\in[a,b]}(|x(t)|+|y(t)|) \leq \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)| + \max\limits_{t\in[a,b]}|y(t)| = \|x\|+\|y\|$.

Отже, $\|x+y\| \leq \|x\|+\|y\|$. Третя аксіома норми виконується.

З приведених вище міркувань робимо висновок, що $(C[a,b], \|\cdot\|)$, де $\|x\| = \|x(t)\| = \max\limits_{t\in[a,b]}|x(t)|$ для всіх $x = x(t) \in C[a,b]$, є лінійним нормованим простором. З прикладами інших лінійних нормованих просторів можна ознайомитись, зокрема, у праці [7, с. 93-98].

Розглянемо далі деякі властивості норми лінійного нормованого простору, якими будемо користуватися при подальшому викладі матеріалу роботи.

Має місце таке твердження.

Твердження 1.1.1. (див., наприклад, [11, с. 64]). Нехай $(Z, \|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором, $x, y \in Z$. Мають місце такі співвідношення:

1) $\|x-y\| = \|y-x\|$; 2) $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$, $\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\|$;

3) $\|x-y\| \geq |\|x\|-\|y\||$.

Доведення. Нехай $(Z, \|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором, $x, y \in Z$. Маємо, що $\|y-x\| = \|(-1)(y-x)\| = |-1|\|x-y\| = 1\|x-y\| = \|x-y\|$.

Отже, $\|y-x\| = \|x-y\|$. Справедливість співвідношення 1) твердження встановлено. Використовуючи властивість 3) норми отримуємо, що

$\|x\| = \|(x-y)+y\| \leq \|x-y\|+\|y\|$, $\|x\|-\|y\| \leq \|x-y\|$;

$\|y\| = \|(y-x)+x\| \leq \|y-x\|+\|x\|$, $\|y\|-\|x\| \leq \|y-x\| = \|x-y\|$.

Отже, співвідношення 2) має місце.

Оскільки $|t| = max\{t, -t\}$ для всіх $t \in R$, то

$|\|x\| - \|y\|| = max\{\|x\| - \|y\|, -(\|x\| - \|y\|)\} = max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\}$

Згідно 2) $\|x\| - \|y\| \leq \|x - y\|$, $\|y\| - \|x\| \leq \|y - x\|$. Тоді і

$max\{\|x\| - \|y\|, \|y\| - \|x\|\} = |\|x\| - \|y\|| \leq \|x - y\|$.

Отже, $\|x - y\| \geq |\|x\| - \|y\||$. Співвідношення 3) встановлено.

Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором, то на лінійному над полем дійсних чисел просторі Z можна задати за допомогою норми $\|\cdot\|$ відстань (метрику) між двома елементами x, y цього простору, поклавши $\rho(x, y) = \|x - y\|$ (див., наприклад, [7, с. 96]).

Дійсно, для будь-якого $x, y, z \in Z$ матимемо, що:

1) $\rho(x, y) \geq 0, \rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

2) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для всіх $x, y, \in Z$;

3) $\rho(x, y) \leq \rho(x, z) + \rho(z, y)$,

оскільки:

1) $\rho(x, y) = \|x - y\| \geq 0$ (див., аксіому 1) норми); якщо $\rho(x, y) = \|x - y\| = 0$, то (див., аксіому 1) норми) $x - y = 0, x = y$; якщо $x = y$, то $x - y = 0, \|x - y\| = 0 = \rho(x, y)$ (див., аксіому 1) норми).

Отже, дійсно величина $\rho(x, y)$ задовольняє співвідношення 1) як і звичайна відстань між двома точками (на прямій, площині, в просторі) – вона невід'ємна, дорівнює 0 тоді і лише тоді, коли точки співпадають;

2) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|y - x\| = \rho(y, x)$ (тут ми використали співвідношення 1) твердження 1.1.1).

Отже, як і для звичайної відстані: $\rho(x, y) = \rho(y, x)$;

3) $\rho(x, y) = \|x - y\| = \|(x - z) + (z - y)\| \leq \|x - z\| + \|z - y\| = = \rho(x, z) + \rho(z, y)$.

Отже, як і для звичайної відстані в трикутнику довжина однієї сторони $[x, y]$ не перевищує суму довжин двох інших сторін $[x, z]$ та $[z, y]$.

1.2 Поняття замкненої та відкритої кулі лінійного нормованого простору. Поняття опуклої множини. Опуклість замкненої та відкритої кулі. Деякі властивості опуклих множин.

Маючи поняття відстані між двома точками лінійного нормованого простору, можна ввести поняття замкненої кулі, як такої множини, всі точки z якої знаходяться від її центра z_0 на відстані $\leq r$, де r невід'ємне дійсне число (радіус кулі).

В роботі замкнену кулю позначено через $(B)_r(z_0)$. Отже,

$B_r(z_0) = \{z \in Z: \rho(z, z_0) \leq r\}$.

Це поняття використовується в роботі.

Відкритою кулею або околом точки z_0 радіусом $\delta > 0$ будемо називати множину $\dot{B}_\delta(z_0) = \{z \in Z: \rho(z, z_0) < \delta\}$. $B_r(z_0)$ є замкненою кулею, тому що це куля і замкнена множина. Щоб у цьому переконатися, достатньо показати, що доповнення $Z \setminus B_r(z_0)$ множини $B_r(z_0)$ до всього простору Z є відкритою множиною. Дійсно, якщо $z_1 \in Z \setminus B_r(z_0)$, то $\|z_1 - z_0\| > r$, тому $\delta = \|z_1 - z_0\| - r > 0$.

Розглянемо $\dot{B}_\delta(z_1) = \{z \in Z : \|z - z_1\| < \delta\}$ і переконаємося, що $\dot{B}_\delta(z_1) \subset Z \setminus B_r(z_0)$. Дійсно, для $z \in \dot{B}_\delta(z_1) : \|z - z_1\| < \delta$. Тоді $\|z - z_0\| =$
$= \|(z - z_1) - (z_0 - z_1)\| = \|(z_0 - z_1) - (z - z_1)\| \geq \|z_0 - z_1\| - \|z - z_1\| >$
$> \|z_1 - z_0\| - \delta = \|z_1 - z_0\| - \|z_1 - z_0\| + r = r$.

Отже, $\|z - z_0\| > r$ для всіх $z \in \dot{B}_\delta(z_1)$. Тоді всі $z \in \dot{B}_\delta(z_1)$ не належать $B_r(z_0)$. Тому всі z із $\dot{B}_\delta(z_1)$ належать $Z \setminus B_r(z_0)$, що рівносильне такому включенню: $\dot{B}_\delta(z_1) \subset Z \setminus B_r(z_0)$.

Таким чином, ми переконалися, що всі точки z із $Z \setminus B_r(z_0)$ входять в $Z \setminus B_r(z_0)$ разом з деяким своїм околом. Це означає, що $Z \setminus B_r(z_0)$ є відкритою множиною, а її доповнення, тобто $B_r(z_0)$ є замкненою множиною.

Переконаємося, що $\dot{B}_\delta(z_0)$ є відкритою множиною (відкритою кулею). Для цього візьмемо точку $z_1 \in \dot{B}_\delta(z_0)$. Тоді $\rho(z_1, z_0) = \|z_1 - z_0\| < \delta$, $\varepsilon = \delta - \|z_1 - z_0\| > 0$. Розглянемо $\dot{B}_\varepsilon(z_1)$ – окіл точки z_1 радіуса δ. Для всіх $z \in \dot{B}_\varepsilon(z_1)$ будемо мати, що $\rho(z, z_0) \leq \rho(z, z_1) + \rho(z_1, z_0) < \varepsilon + \rho(z_1, z_0) =$ $= \delta - \|z_1 - z_0\| + \rho(z_1, z_0) = \delta - \rho(z_1, z_0) + \rho(z_1, z_0) = \delta$.

Отже, $\rho(z, z_0) < \delta$ для всіх $z \in \dot{B}_\varepsilon(z_1)$. Це означає, що $\dot{B}_\varepsilon(z_1) \subset \dot{B}_\delta(z_0)$. Отже, кожна точка $z_1 \in \dot{B}_\delta(z_0)$ включається у $\dot{B}_\delta(z_0)$ разом з деяким своїм околом. Тому $\dot{B}_\delta(z_0)$ є відкритою множиною, тобто відкритою кулею.

Важливу роль у опуклому аналізі, теорії апроксимації та інших галузях математики (див., наприклад, [8, с. 30-34]) відіграють, так звані, опуклі множини.

Означення 1.2.1 (див., наприклад, [8, с. 31]). Множина B лінійного над полем дійсних чисел простору Z називається опуклою, якщо $(\forall z_1, z_2 \in B)(\forall \alpha \in [0,1])(1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2 \in B$, тобто, якщо разом з двома довільними точками $z_1, z_2 \in B$ весь відрізок $[z_1, z_2]$, кінцями якого є ці точки, включається в $B([z_1, z_2] \subset B)$.

Твердження 1.2.1 (див., наприклад, [8, с. 32]). Будь-яка замкнена та будь-яка відкрита кулі лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ є опуклими множинами.

Доведення. Нехай $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$ є замкненою кулею Z з центром z_0 і радіусом r, $z_1, z_2 \in B_r(z_0), \alpha \in [0,1]$. Доведемо, що $[z_1, z_2] \subset B_r(z_0)$. Оскільки $z_1, z_2 \in B_r(z_0)$, то $\|z_1 - z_0\| \leq r, \|z_2 - z_0\| \leq r$. Візьмемо довільну точку $z \in [z_1, z_2]$. Оскільки $z \in [z_1, z_2]$, то існує $\alpha \in [0,1]$, що $z = (1 - \alpha)z_1 + \alpha z_2$. Маємо, що

$$\|z - z_0\| = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 - z_0\| = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 - (1-\alpha)z_0 - \alpha z_0\| =$$
$$= \|(1-\alpha)z_1 + \alpha(z_2 - z_0)\| \leq \|(1-\alpha)z_1\| + \|\alpha(z_2 - z_0)\| =$$
$$= (1-\alpha)\|z_1\| + \alpha\|z_2 - z_0\| \leq (1-\alpha)r + \alpha r = r,$$

тобто $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 - z_0\| \leq r$. Це означає, що $\forall z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 \in B_r(z_0)$ разом з точками z_1, z_2. Отже, $[z_1, z_2] \subset B_r(z_0)$. Тому $B_r(z_0)$ є опуклою множиною.

Аналогічно доводиться опуклість відкритої кулі $\dot{B_\delta}(z_0)$ де $\delta > 0$.

Твердження доведено.

Опуклі множини мають низку властивостей. Зокрема, сума кількох опуклих множин, різниця двох опуклих множин, добуток дійсного числа на опуклу множину, перетин довільної кількості опуклих множин є опуклою множиною (див., наприклад, [8, с. 31-37]).

1.3. Відстань між двома множинами лінійного нормованого простору.

Нехай $(Z, \|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором та $z_1, z_2 \in Z$. Тоді в якості відстані між цими двома точками, як зазначалось вище, приймається величина $\rho(z_1, z_2) = \|z_1 - z_2\|$. Якщо, наприклад, $z_0 \in Z$ а $B \subset Z$, то відстанню між точкою z_0 та множиною B вважається величина

$$\rho(z_0, B) = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \alpha^*(z_0, B).$$

Якщо ж $A, B \subset Z$, то тоді в якості відстані між множинами A та B природно прийняти величину

$$\rho(A, B) = \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \|z - y\| = \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \rho(z, y), \tag{1.1}$$

тобто потрібно серед пар (z, y), де $z \in A$, а $y \in B$, вибрати ту пару $(z^*, y^*) \in A \times B$, що $\rho(z^*, y^*) = \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \rho(z, y) = \rho(A, B)$.

Якщо така пара $(z^*, y^*) \in A \times B$ існує, то $\rho(z^*, y^*)$ і є відстаню між множинами A та B.

Отже, в розглянутому випадку

$$\rho(z^*, y^*) = \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \rho(z, y) = \inf_{\substack{z \in A, \\ y \in B}} \|z - y\| = \rho(A, B). \tag{1.2}$$

В дипломній роботі досліджується саме така відстань $\rho(A, B)$ у випадку, коли $A = B_r(x_0)$ – куля з центром у точці x_0 радіуса r, а $B \subset Z$. Оскільки $\rho(z, y) \geq 0$, то $\rho(A, B) = \inf\limits_{\substack{z \in A \\ y \in B}} \rho(z, y) = \inf\limits_{\substack{z \in A \\ y \in B}} \|z - y\| \geq 0$.

1.4. Скінченновимірні підпростори лінійного нормованого простору.

Нехай Z є лінійним над полем дійсних чисел простором, а $y_1, \cdots, y_p$ є векторами цього простору. Якщо число 0 (нуль) помножити на вектор y, то $0 \cdot \; y = 0$ (нульовий елемент простору Z). Тому $0 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2 + \cdots + 0 \cdot y_p =$ $= \; 0 + 0 + \cdots + 0 = 0$ (нуль-елемент простору Z).

Таким чином рівність $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p = 0$ справедлива, коли всі $\lambda_j = 0, j = \overline{1, p}$. Якщо ця рівність має місце ще і тоді коли серед чисел $\lambda_1, \cdots \lambda_p$ є хоча б одне $\neq 0$, то вектори $y_1, y_2, \cdots, y_p$ утворюють лінійно залежну систему. Отже, система векторів $y_1, y_2, \cdots, y_p$ є лінійно залежною, якщо існують такі числа $\lambda_1, \lambda_2, \cdots \lambda_p$, серед яких хоча б одне $\neq 0$, а сума

$$\lambda_1 y_1 + \; \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p = 0. \tag{1.3}$$

Якщо ж рівність (1.3) можлива лише за умови, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$, або ж, по-іншому, якщо з рівності (1.3) випливає, що $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$; або ж коли: рівність (1.3) має місце тоді і лише тоді, коли всі $\lambda_j = 0, j = \overline{1, p}$, то кажуть, що система векторів $y_1, y_2, \cdots, y_p$ є лінійно незалежною.

Нехай система векторів $y_1, y_2, \cdots, y_p$ є лінійно незалежною системою Z. Тоді множина всеможливих їх лінійних комбінацій, тобто множина

$$B = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \,:\, \lambda_j \in R, j = \overline{1,p} \right\}$$

і є p – вимірним (скінченновимірним) лінійним підпростором простору Z (див., наприклад, [7, с. 77-79]).

Розглянемо такий приклад. Нехай $Z = R^n$, $y_1 = \underbrace{(1,0,\cdots,0)}_{n}, \cdots, y_p = \underbrace{\left(\overbrace{0,\cdots,0,1}^{p}, 0, \cdots, 0\right)}_{n}$, де $p \le n$.

Переконаємося, що система $y_1, \cdots, y_p$ векторів R^n є лінійно незалежною. Для цього розглянемо рівність $\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2 + \cdots + \lambda_p y_p =$
$= \lambda_1(1,0,\cdots,0) + \lambda_2(0,1,\cdots,0) + \cdots + \lambda_p(0,\cdots,0,1,0,\cdots,0) =$
$= \left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0\right) = 0 = (0,0,\cdots,0,0,\cdots,0)$.

Вона можлива лише, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$. Тому система векторів $y_1, \cdots, y_p$ є лінійно незалежною. Отже,

$$B = \left\{ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j = \left(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p, 0, \cdots, 0\right) \,:\, \lambda_j \in R, j = \overline{1,p} \right\}$$

є скінченновимірним (p - вимірним) лінійним підпростором простору R^n.

1.5. Поняття фундаментальної послідовності лінійного нормованого простору. Банахові простори. Гільбертові простори. Рівність паралелограма.

Нехай $(Z, \|\cdot\|)$ є лінійним нормованим простором та $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ є збіжною до z_0 послідовністю цього простору. Це означає, що

$$(\forall \varepsilon' > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)\|z_n - z_0\| < \varepsilon' \qquad (1.4)$$

Нехай тепер $\varepsilon > 0$, а $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$. Згідно з (1.4)

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall n > n_0)\|z_n - z_0\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.5)$$

Якщо $\forall m > n_0$, то згідно з (1.5)

$$\|z_m - z_0\| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (1.6)$$

З урахуванням (1.5), (1.6) одержимо, що

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n > n_0)\|z_n - z_m\| = \|(z_n - z_0) + (z_0 - z_m)\| \leq$$
$$\leq \|z_n - z_0\| + \|z_0 - z_m\| = \|z_n - z_0\| + \|z_m - z_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Отже, ми показали, що коли в лінійному нормованому просторі $(Z, \|\cdot\|)$ деяка послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ збігається, то

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists n_0 \in N)(\forall m, n > n_0)\|z_n - z_m\| < \varepsilon. \quad (1.7)$$

Виникає питання; коли для послідовності $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ виконується умова (1.7), то чи буде ця послідовність збіжною до деякої точки z? Виявляється, що це виконується не у всіх лінійних нормованих просторах.

Послідовність $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ для якої виконується умова (1.7) називається фундаментальною послідовністю (див., наприклад, [7, с. 46]).

Лінійні нормовані простори, в яких кожна фундаментальна послідовність є збіжною називаються повними або банаховими просторами (див., наприклад, [7, с. 97]).

Прикладом банахового простору є наприклад, простір R^n (див., наприклад, [7, с. 46]).

Важливим банаховим простором є гільбертовий простір.

Гільбертовим називається такий лінійний над полем дійсних чисел простір Z, в якому введено скалярний добуток, тобто кожній парі

$(x, y) \in Z \times Z$ ставиться у відповідність число $\langle x, y\rangle$ таке, що для всіх $x, y, z \in Z$ виконуються умови:

1) $\langle x, x\rangle \geq 0$; $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$; 2) $\langle x + y, z\rangle = \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle$;

3) $\langle \alpha x, y\rangle = \alpha\langle x, y\rangle, \alpha \in R$; 4) $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;

5) якщо покласти $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, то $(Z, \|\cdot\|)$ є повним (банаховим) простором.

В гільбертовому просторі $(Z, \|\cdot\|)$ має місце рівність паралелограма:

$\forall x, y \in Z$: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

Прикладом неповного лінійного нормованого простору є, зокрема, простір $C_2[a, b]$. Елементами цього простору є всі дійснозначні функції $x(t), y(t), z(t), \cdots$, які задані на сегменті $[a, b]$ і є неперервними на цьому сегменті. У відповідність кожній такій функції $x = x(t)$ ставиться число $\|x\| = \|x(t)\| = \left(\int_a^b \left(x(t)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}$. Тоді одержимо, що $\|x\|$ є нормою на множині всіх неперервних на сегменті $[a, b]$ функції. Його позначають через $C_2[a, b]$ (див., наприклад, [10, с. 51,52]).

Виявляється, що $C_2[a, b]$ не є банаховим простором (див., наприклад, [10, с. 68,69]).

1.6. Лінійні функціонали, задані на лінійному над полем дійсних чисел просторі Z. Лінійні неперервні функціонали, задані на лінійному нормованому просторі $(\boldsymbol{Z}, \|\cdot\|)$. Простір, спряжений з простором $(\boldsymbol{Z}, \|\cdot\|)$.

Як і вище будемо позначати через Z лінійний над полем дійсних чисел простір. Припустимо, що на цьому просторі задана дійснозначна функція (дійснозначний функціонал) $f(z), z \in Z$. Такий функціонал будемо називати лінійним функціоналом (лінійною функцією), заданим на Z, якщо

1) $\forall z_1, z_2 \in Z : f(z_1 + z_2) = f(z_1) + f(z_2)$;

2)$\forall \alpha \in R, z \in Z: f(\alpha z) = \alpha f(z)$ (див., наприклад, [8, с. 39]).

Наприклад. Нехай $Z = C[a,b]$, тобто Z є лінійним над полем дійсних чисел простором всіх неперервних на сегменті $[a,b]$ функцій. Виберемо точку $t_0 \in [a,b]$ і покладемо для всіх $z = z(t) \in C[a,b]$, $f(z) = f\big(z(t)\big) = z(t_0)$.

Це є лінійним функціоналом, заданим на $Z = C[a,b]$. Дійсно, якщо $z_1 = z_1(t), z_2 = z_2(t) \in Z = C[a,b]$, то $f(z_1+z_2) = (z_1+z_2)(t_0) = = z_1(t_0)+z_2(t_0) = f(z_1) + f(z_2)$. Далі, $f(\alpha z) = (\alpha z)(t_0) = \alpha z(t_0) = \alpha f(z)$ для всіх $\alpha \in R, z \in C[a,b] = Z$.

Отже, f задовольняє умовам лінійного функціонала, тобто f є лінійним функціоналом, заданим на $Z = C[a,b]$.

Нехай тепер f є лінійним функціоналом, заданим на $(Z, \|\cdot\|)$. Його називають неперервним у точці $z_0 \in Z$, якщо

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta > 0)(\forall z :\ \|z - z_0\| < \delta)|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon.$$

Доводиться (див., наприклад, [7, с. 117]) , що коли лінійний функціонал є неперервним у деякій точці $z_0 \in Z$, то він є неперервним в усіх точках простору $(Z, \|\cdot\|)$.

Множину всіх неперервних на $(Z, \|\cdot\|)$ лінійних функціоналів позначають через Z^* і називають простором, спряженим з Z.

Простір Z^* стає лінійним нормованим простором, якщо для всіх $f \in Z^*$ покласти,

$$\|f\| = \sup_{z \neq 0} \frac{f(z)}{\|z\|} = \sup_{z \neq 0} \frac{|f(z)|}{\|z\|} = \sup_{\|z\| \leq 1} f(z) = \sup_{\|z\| \leq 1} |f(z)|.$$

Має місце таке співвідношення :

$(\forall z \in Z)\|z\| = \max\limits_{\|f\| \leq 1} f(z)$, (див., наприклад, [7, с. 127]).

Переконаємося, що функціонал, який розглядався вище, є неперервним на $(Z, \|\cdot\|)$, де $Z = C[a,b]$, а $\|z\| = \|z(t)\| = \max\limits_{t\in[a,b]} |z(t)|$.

Дійсно, маємо, що для $z_0 \in Z$:

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \varepsilon)(\forall z \in Z = C[a,b]\colon \|z - z_0\| < \delta)$$

$$|f(z) - f(z_0)| = |f(z - z_0)| = |z(t_0) - z_0(t_0)| \leq \max_{t\in[a,b]} |(z - z_0)(t_0)| =$$

$$= \|z - z_0\| < \delta = \varepsilon.$$

Звідси й випливає, що функціонал $f(z) = f\big(z(t)\big) = z(t_0)$ є неперервним у кожній точці $z_0 \in Z = C[a,b]$.

Для його норми:

$$\|f\| = \sup_{z\neq 0} \frac{f(z)}{\|z\|} = \sup \frac{z(t_0)}{\max\limits_{a\leq t\leq b} |z(t)|} \leq \frac{|z(t_0)|}{\max\limits_{a\leq t\leq b} |z(t)|} \leq 1.$$

Якщо взяти $z_0(t) \equiv 1$ на $[a,b]$, то тоді

$$\|f\| \geq \frac{f(z_0)}{\|z_0\|} = \frac{z_0(t_0)}{\|z_0\|} = \frac{1}{1} = 1.$$

Отже, $\|f\| \leq 1$ і $\|f\| \geq 1$. Звідси і випливає , що $\|f\| = 1$, що й потрібно було встановити.

РОЗДІЛ 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ (2.1) ВІДШУКАННЯ ВІДСТАНІ МІЖ ЗАМКНЕНОЮ КУЛЕЮ ЛІНІЙНОГО НОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ТА ОПУКЛОЮ МНОЖИНОЮ ЦЬОГО ПРОСТОРУ. ЗАДАЧА, ЕКВІВАЛЕНТНА ЗАДАЧІ (2.1). ЕКСТРЕМАЛЬНІ ПОСЛІДОВНОСТІ ТА ЕКСТРЕМАЛЬНІ ЕЛЕМЕНТИ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1). УМОВИ ІСНУВАННЯ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1).

2.1 Постанова задачі.

Нехай Z – лінійний над полем дійсних чисел простір (див., наприклад, [7, с. 75]), а $\|\cdot\|$ - норма ,задана на просторі Z (див., наприклад, [7, с. 94]), і, отже, $(Z, \|\cdot\|)$ - лінійний над полем дійсних чисел нормований простір (див., наприклад, [7, с.94]), який надалі будемо називати лінійним нормованим простором.

Для $z_0 \in Z$ та $r \geq 0$ позначимо через $B_r(z_0) = \{z \in Z : \|z - z_0\| \leq r\}$. Множину $B_r(z_0)$ будемо називати замкненою кулею лінійного нормованого простору$(Z, \|\cdot\|)$ (далі - простір$(Z, \|\cdot\|)$).

Через B будемо позначати довільну фіксовану опуклу множину простору $(Z, \|\cdot\|)$.

Відстанню між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та множиною B будемо називати величину

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\|. \tag{2.1}$$

Задачу відшукання величини (2.1) будемо називати задачею відшукання відстані між замкненою кулею $B_r(z_0)$ та опуклою множиною Bлінійного нормованого простору Z.

Якщо для елемента $(z^*, y^*) \in B_r(z_0) \times B$ виконується нерівність $\|z^* - y^*\| \le \|z - y\|$ для всіх $(z, y) \in B_r(z_0) \times B$, тобто, якщо $\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\|$, то цей елемент (z^*, y^*) будемо називати екстремальним елементом для величини (2.1).

Зрозуміло, що коли в задачі відшукали величину (2.1) $B_r(z_0) = B_0(z_0)$, то задача відшукання величини (2.1) набуде вигляду

$$\alpha^*(z_0, B) = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\|, \tag{2.2}$$

яка є задачею відшукання величини найкращого наближення елемента z_0 множиною B (див., наприклад [3, с. 11]).

Якщо існує елемент $y^* \in B$ і такий, що $\alpha^*(z_0, B) = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|$, то його називають елементом найкращого наближення елемента z_0 множиною B (див., наприклад, [3, с. 11]) або екстремальним елементом для величини (2.2).

Отже, задача найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору (див., наприклад, [3, с. 11]) є частковим випадком задачі відшукання величини (2.1), яка розглядається в роботі.

Розглянемо деякий тривіальний випадок задачі відшукання величини (2.1), а саме випадок коли $B_r(z_0) \cap B \neq \emptyset$, тобто, коли існують точки $z^* \in B_r(z_0), y^* \in B$ такі, що $z^* = y^*$. В цьому випадку

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = 0 = \|z^* - y^*\| = \|z^* - z^*\|. \tag{2.3}$$

Дійсно, для всіх $z \in B_r\left(z_0\right), y \in B$ матимемо, що $0 \leq \left\|z-y\right\|$. Тому $0 \leq \inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| = \alpha^*(B_r(z_0), B) \leq \|z^*-y^*\| = \|z^*-z^*\| = 0$. Звідси й випливає співвідношення (2.3).

Отже, в розглядуваному випадку величина $\alpha^*\left(B_r\left(z_0\right), B\right)$ дорівнює 0, а $\left(z^*, y^*\right) = \left(z^*, z^*\right)$ - її екстремальний елемент.

У цьому випадку задача відшукання величини (2.1) та її екстремального елемента є розв'язаною.

У зв'язку з цим, у подальшому будемо припускати, що $B_r\left(z_0\right) \cap B \neq \varnothing$.

Якщо у задачі відшукання величини (2.1) покласти $x = z - y$ де $z \in B_r(z_0)$, $y \in B$, то прийдемо до задачі відшукання величини

$$\inf_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|. \tag{2.4}$$

Має місце таке твердження.

Теорема 2.1.1. Для величини (2.1) та (2.4) справедливе твердження

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| = \inf_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|. \tag{2.5}$$

Для екстремальності елемента $x^* = z^* - y^*$, де $z^* \in B_r\left(z_0\right)$ а $y^* \in B$, для величини (2.4), необхідно і досить, щоб елемент $\left(z^*, y^*\right)$ був екстремальним елементом для величини (2.1).

Доведення. Маємо, що для довільних $z \in B_r\left(z_0\right), y \in B$, $0 \leq \left\|z-y\right\|$.

Тому

$$0 \le \inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| = \alpha^*(B_r(z_0),B) \le \|z-y\| \text{ де } z \in B_r(z_0), y \in B. \quad (2.6)$$

Якщо припустити, що $\inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\| < \inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\|$, то існує $x_0 = z_0 - y_0$, де $z_0 \in B_r(z_0), y_0 \in B$, що $\|x_0\| = \|z_0 - y_0\| < \inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z-y\|$, що суперечить (2.6).

Тому

$$\inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| \le \inf_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|. \quad (2.7)$$

Якщо припустити, що $\inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| < \inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|$, то згідно з характеристичними властивостями інфімуму існує $z' \in B_r(z_0)$, $y' \in B$, що$\|z' - y'\| < \inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|$. Позначимо $x' = z' - y'$. Тоді $x' = z' - y' \in B_r(z_0) - B$, що $\|x'\| < \inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|$, що не може бути. Отже, з (2.7) робимо висновок, що справедлива рівність (2.5).

Нехай тепер $x^* = z^* - y^*$, де $z^* \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$, є екстремальним елементом для величини (2.4). Згідно з (2.5) $\|x^*\| = \|z^* - y^*\| = = \inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\| = \inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\|$, причому $z^* \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$.

Звідси випливає, що (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1). Нехай тепер $x^* = z^* - y^*$ причому (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1). Переконаємося, що x^* є екстремальним елементом для (2.4). Згідно (2.5) і зазначеного вище отримаємо, що $\inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z-y\| =$

$= \|z^* - y^*\| = \|x^*\| = \inf\limits_{x\in B_r(z_0)-B} \|x\|$, причому $x^* = z^* - y^*$, де $z^* \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$. Це й означає, що x^* є екстремальним елементом для величини (2.4). Теорему доведено.

2.2. Про зв'язок між величинами (2.1) та(2.2).

Переконаємося, що величини (2.1) та (2.2) тісно пов'язані між собою.

Має місце таке твердження.

Теорема 2.2.1. Як і вище будемо припускати, що $B_r(z_0) \cap B \neq \varnothing$. За виконання цієї умови справедлива рівність

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \alpha^*(z_0, B) - r \quad (2.8)$$

Доведення. Для всіх $z \in B_r(z_0), y \in B$ маємо, що $\|z - y\| = \|z - z_0 + z_0 - y\| = \|z_0 - y - (z_0 - z)\| \geq \|z_0 - y\| - \|z_0 - z\| =$

$= \|z_0 - y\| - \|z - z_0\| \geq \|z_0 - y\| - r$, оскільки $\|z - z_0\| \leq r$.

Тобто справедлива нерівність

$$\|z - y\| \geq \|z_0 - y\| - r \; ; \; z \in B_r(z_0), y \in B \; . \qquad (2.9)$$

Перейшовши у співвідношенні (2.9) до інфімуму по $z \in B_r(z_0), y \in B$, одержимо нерівності :

$$\inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in B}} \|z - y\| = \alpha^*(B_r(z_0), B) \geq \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \alpha^*(z_0, B) - r. \quad (2.10)$$

За умовою $B_r(z_0) \cap B \neq \varnothing$. Це означає, що для будь-якого $y \in B : \|y - z_0\| > r$. Звідси випливає, що $\inf_{y \in B} \| y - z_0\| \geq r, \alpha^*(z_0, B) \geq r, \alpha^*(z_0, B) - r \geq 0$

Розглянемо далі $\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \alpha^*(z_0, B)$.

З урахуванням означення інфімуму отримаємо, що для будь-якого $k \in N$ існує $y_k \in B$, що

$$\inf_{y\in B}\|z_0 - y\| \le \|z_0 - y_k\| \le \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| + \frac{1}{k}. \tag{2.11}$$

Зі співвідношення (2.11) випливає, що

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - y_k\| = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\|, y_k \in B. \tag{2.12}$$

Ми показали, що існує послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}, y_k \in B$, така, що

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - y_k\| = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| = \alpha^*(z_0, B).$$

Як відомо, (див., наприклад, [12]) таку послідовність називають екстремальною (мінімізуючою) послідовністю для задачі відшукання величини (2.2). Оскільки $z_0 \in B_r(z_0), y_k \in B$ та $B_r(z_0) \cap B \neq \emptyset$ то $y_k \neq z_0$ а тому $\|y_k - z_0\| > r > 0$.

Розглянемо послідовність точок $z_k = z_0 + \dfrac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0), k = 1, 2, \ldots$

Для цих точок маємо, що

$$\|z_k - z_0\| = \left\|\frac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0)\right\| = \frac{r}{\|y_k - z_0\|}\|y_k - z_0\| = r$$

Це означає, що послідовність точок $\{z_k\}_{k=1}^{\infty}$ така, що $z_k \in B_r(z_0)$. Маємо, крім того, що $y_k \in B, k = 1, 2, \ldots$ Тому

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}}\|z - y\| \le \|z_k - y_k\| =$$

$$= \left\|z_0 + \frac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0) - y_k\right\| =$$

$$=\left\|\frac{r}{\|y_k-z_0\|}(y_k-z_0)-(y_k-z_0)\right\|=\left\|\left(\frac{r}{\|y_k-z_0\|}-1\right)(y_k-z_0)\right\|=$$

$$=\left|\frac{r}{\|y_k-z_0\|}-1\right|\|y_k-z_0\|=\frac{\left|r-\|y_k-z_0\|\right|}{\|y_k-z_0\|}\|y_k-z_0\|=\left|\|y_k-z_0\|-r\right|=$$

$=\|y_k-z_0\|-r$, оскільки $\|y_k-z_0\|>r$. Отже, доведено, що

$\alpha^*\left(B_r(z_0),B\right)\le\|y_k-z_0\|-r, k=1,2,\ldots$

Оскільки

$\lim\limits_{k\to\infty}\|z_0-y_k\|=\lim\limits_{k\to\infty}\|y_k-z_0\|=\inf\limits_{y\in B}\|z_0-y\|, y_k\in B$, (див (2.12)), то, перейшовши у попередній нерівності до границі при $k\to\infty$, одержимо, що

$$\alpha^*(B_r(z_0),B)\le\inf_{y\in B}\|z_0-y\|-r. \tag{2.13}$$

Зі співвідношень (2.10) та (2.13) випливає рівність (2.8).

Теорему доведено.

2.3. Екстремальні послідовності та екстремальні елементи для відшукання величин (2.1) та (2.2) і зв'язок між ними.

З урахуванням означення інфімуму отримаємо для деякого $k\in N$ існування таких $(z_k,y_k)\in B_r(z_0)\times B$, що

$$\inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}}\|z-y\|\le\|z_k-y_k\|\le\inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}}\|z-y\|+\frac{1}{k}. \tag{2.14}$$

Згідно з теоремою про границю проміжної послідовності (див., наприклад, [13, с. 90]) із співвідношень (2.14) отримаємо, що

$$\lim_{k\to\infty}\|z_k - y_k\| = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}}\|z-y\| = \alpha^*\left(B_r\left(z_0\right),B\right) \qquad (2.15)$$

Отже, ми показали що для задачі відшукання величини (2.1) існують такі послідовності $(z_k, y_k)\in B_r(z_0)\times B$, для яких виконується рівність (2.15).

Такі послідовності називають екстремальними послідовностями для задачі відшукання величини (2.1). Як уже зазначають, екстримальною послідовністю для задачі відшукання величини (2.2) називають таку послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}, y_k\in B$, для якої

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - y_k\| = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| = \alpha^*\left(z_0, B\right)$$

Теорема 2.3.1. Для будь-якої екстремальної послідовності (z_k, y_k) для задачі відшукання величини (2.1) послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною для задачі відшукання величини (2.2) та, крім того, мають місце рівності :

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - z_k\| = r \qquad (2.16)$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|\right) = \lim_{k\to\infty}\|z_k - y_k\| \qquad (2.17)$$

Якщо $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (2.2), а $z_k\in B_r(z_0)$, $k=1,2,\ldots$, така послідовність точок $B_r(z_0)$, для якої виконується співвідношення (2.16), (2.17), то послідовність (z_k, y_k), $k = 1, 2, \ldots$, є екстремальною для задачі відшукання величини (2.1).

Доведення. Нехай $(z_k, y_k) \in B_r(z_0) \times B$, $k = 1, 2, \ldots$ є екстремальною послідовністю для задачі відшукання величини (2.1), тобто для якої має місце рівність (2.15). Маємо, що

$$\|z_0 - y_k\| \le \|z_0 - z_k\| + \|z_k - y_k\|.$$

Звідки $\|z_0 - y_k\| - r \le \|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\| \le \|z_k - y_k\|$.

Отже, маємо такий ланцюжок нерівностей

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r \le \|z_0 - y_k\| - r \le \|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\| \le \|z_k - y_k\|. \quad (2.18)$$

В наслідок рівності (2.8)

$$\lim_{k \to \infty} \|z_k - y_k\| = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r. \quad (2.19)$$

З (2.19)та(2.18) отримуємо співвідношення

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \lim_{k \to \infty} \|z_0 - y_k\| - r = \lim_{k \to \infty} \left(\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|\right). \quad (2.20)$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\lim_{k \to \infty} \|z_0 - y_k\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\|. \quad (2.21)$$

Це означає, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, є екстремальною послідовністю для задачі (2.2).

Крім того, одержимо також, що (див (2.20),(2.10))

$$\lim_{k\to\infty}(\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|) = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| - r \ = \lim_{k\to\infty}\|z_k - y_k\| \,. \quad (2.22)$$

Тому

$$\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\| = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| - r + \delta_k \text{ де } \delta_k \to 0 \text{ при } k \to \infty.$$

Звідки

$$\|z_0 - z_k\| = \|z_0 - y_k\| - \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| + r - \delta_k,$$

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - z_k\| = \lim_{k\to\infty}\|z_0 - y_k\| - \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| + r - \lim_{k\to\infty}\delta_k =$$

$$= \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| - \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| + r - 0$$

Отже,

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - z_k\| = r\,. \quad (2.23)$$

Зі співвідношення (2.21) випливає, що $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$, $y_k \in B$, $k = 1, 2, \ldots$, є екстремальною послідовністю для задачі відшукання величини (2.2). Зі співвідношення (2.23) випливає рівність (2.16), а з рівності (2.22) випливає рівність (2.17).

Першу частину теореми доведено.

Доведемо її другу частину. Нехай $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини (2.2), то має місце рівність (2.21). Якщо $z_k, k=1,2,\ldots$, є послідовністю точок із $B_r(z_0)$, для якої мають місце рівності (2.16), (2.17), то для послідовності (z_k, y_k) , $k=1,2,\ldots$, матимемо, що $(z_k, y_k) \in B_r(z_0) \times B$, $k=1,2,\ldots$, та

$$\lim_{k\to\infty} \|z_k - y_k\| = \lim_{k\to\infty} (\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|) =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \|z_0 - z_k\| - \lim_{k\to\infty} \|z_0 - z_k\| = \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0),\\ y\in B}} \|z - y\|.$$

Це й означає, що (z_k, y_k) , $k=1,2,\ldots$, є екстремальною послідовністю для величини (2.1).

Теорему доведено.

Наслідок 2.3.1. Якщо послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для задачі відшукання величини (2.2), а $z_k = z_0 + \dfrac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0), k=1,2,\ldots$, то послідовність (z_k, y_k), $k=1,2,\ldots$, є екстремальною послідовністю для величини (2.1).

Доведення. Маємо, що

$$\|z_k - z_0\| = \left\| \frac{r}{\|y_k - y_0\|}(y_k - z_0) \right\| = \frac{r}{\|y_k - y_0\|} \|y_k - z_0\| = r\,.$$

Тому $z_k \in B_r(z_0)$, $k = 1, 2, \ldots$. Оскільки $\|z_0 - z_k\| = \|z_k - z_o\| = r$, то $\lim\limits_{k\to\infty}\|z_0 - z_k\| = r$. Отже, співвідношення (2.16) має місце.

Переконаємося, що має місце також співвідношення (2.17).

Одержимо, що $\lim\limits_{k\to\infty}(\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|) = \inf\limits_{y\in B}\|z_0 - y\| - r$

$$\lim_{k\to\infty}(\|z_0 - y_k\| - \|z_0 - z_k\|) = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| - r; \tag{2.24}$$

$$\lim_{k\to\infty}\|z_0 - y_k\| = \lim_{k\to\infty}\left\|z_0 + \frac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0) - y_k\right\| =$$

$$= \lim_{k\to\infty}\left\|y_k - z_0 - \frac{r}{\|y_k - z_0\|}(y_k - z_0)\right\| = \lim_{k\to\infty}\|y_k - z_0\|\left(1 - \frac{r}{\|y_k - z_0\|}\right) =$$

$$= \lim_{k\to\infty}(\|y_k - z_0\| - r) = \inf_{y\in B}\|z_0 - y\| - r\,. \tag{2.25}$$

Зі співвідношень (2.24),(2.25) робимо висновок про справедливість рівності (2.17) теореми 2.3.1. Згідно з цією теоремою послідовність $(z_k, y_k)_{k=1}^{\infty}$ є екстремальною послідовністю для величини(2.1).

Наслідок доведено.

Твердження 2.3.1. Якщо y^* є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (2.2), то вектор (z^*, y^*), де $z^* = z_0 + \frac{r}{\|y^* - z_0\|}(y^* - z_0)$, є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (2.1).

Доведення. Оскільки

$$\left\|z^{*}-z_{0}\right\|=\left\|z_{0}+\frac{r}{\left\|y^{*}-z_{0}\right\|}\left(y^{*}-z_{0}\right)-z_{0}\right\|=\frac{r}{\left\|y^{*}-z_{0}\right\|}\left\|y^{*}-z_{0}\right\|=r \text{, то}$$

$z^{*} \in B_{r}\left(z_{0}\right)$.

Маємо, що

$$\|z^{*}-y^{*}\|=\left\|z_{0}+\frac{r}{\|y^{*}-z_{0}\|}(y^{*}-z_{0})-y^{*}\right\|=$$

$$=\left\|(z_{0}-y^{*})\left(1-\frac{r}{\|z_{0}-y^{*}\|}\right)\right\|=$$

$$=\left\|z_{0}-y^{*}\right\|\frac{\left\|z_{0}-y^{*}\right\|-r}{\left\|z_{0}-y^{*}\right\|}=\left\|z_{0}-y^{*}\right\|-r=\inf_{y\in B_{r}\left(z_{0}\right)}\left\|z_{0}-y\right\|-r=\inf_{\substack{z\in B_{r}\left(z_{0}\right)\\ y\in B}}\left\|z-y\right\|.$$

Отже $\inf\limits_{\substack{z\in B_{r}\left(z_{0}\right)\\ y\in B}}\left\|z-y\right\|=\left\|z^{*}-y^{*}\right\|$, де, $z^{*}\in\ B_{r}(z_{0})\,,\ y^{*}\in B$.

Це означає, що $\left(z^{*},y^{*}\right)$ є екстремальним елементом для величини $\left(2.1\right)$ Твердження доведено.

2.4. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та деяких її часткових випадків.

Перед тим як сформулювати та довести твердження, що стосується існування екстремального елемента для величини $\left(2.1\right)$, ознайомимося з означенням локально компактної множини лінійного нормованого простору.

Означення 2.4.1 (див., наприклад [3, с. 21]) . Якщо з будь-якої обмеженої послідовності точок множини лінійного нормованого простору можна вибрати збіжну підпослідовність, то цю множину називають локальною компактною множиною.

Теорема 2.4.1. У випадку, коли множина В лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ є локально компактною та замкненою, то екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Доведення. Переконаємося, що за виконання умов теореми існує екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.2).

З урахуванням означення інфімуму для кожного $k \in N$ існує елемент $y_{\ k} \in B$, такий, що

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| \leq \|z_0 - y_k\| < \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| + \frac{1}{k}. \qquad (2.26)$$

Зі співвідношення (2.26) отримаємо, що

$$\|y_k\| - \|z_0\| \leq \|y_k - z_0\| = \|z_0 - y_k\| < \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| + \frac{1}{k} \leq \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| + 1,$$

$k = 1, 2, \ldots.$

Звідки випливає, що

$$\|y_k\| < \|z_0\| + \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| + 1, k = 1, 2, \ldots. \qquad (2.27)$$

Оскільки виявилось, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю множини B (див. (2.27)) ,а множина B за умовою є локально компактною, то (див. означення (2.26)) з послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ можна виділити збіжну підпослідовність$\{y_{k_e}\}_{e=1}^{\infty}$, яка збігається до y^*, тобто

$$\|y_{k_e} - y^k\| \to 0 \text{ при } e \to \infty. \qquad (2.28)$$

Оскільки B є замкненою множиною, то $y^* \in B$. Якщо припустити, що $y^* \notin B$, то $y^* \in Z \backslash B$ - відкрита множина. Тоді існує $\delta > 0$, що $\dot{B}_\delta(y^*) = \{y \in Z : \|y - y^*\| < \delta\} \subset Z \backslash B$. Але ж має місце (2.28). Звідси випливає, що $(\exists e_0)(\forall e > e_0)\|y_{k_e} - y^*\| < \delta$, причому $y_{k_e} \in B, e = 1, 2, \ldots$.

Тоді $y_{k_e} \in B$ для $e > e_0$ і $y_{k_e} \in \dot{B}_\delta(y^*) \subset Z \backslash B$, $e > e_0$.

З другого боку з цих співвідношень випливає, що $y_{k_e} \notin B$, $e > e_0$, а з першого випливає, що $y_{k_e} \in B$ для $e > e_0$.

Одержана суперечність доводить, що $y^* \in B$.

Зі співвідношення (2.26) одержуємо, що

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| \le \|z_0 - y_{ke}\| \le \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| + \frac{1}{k_e}. \qquad (2.29)$$

Маємо, що

$$\|z_0 - y_{k_e}\| - \|z_0 - y^*\| \le \|z_0 - y_{k_e} - z_0 - y^*\| = \|y_{k_e} - y^*\| \to 0 \ e \to \infty.$$

Звідси випливає, що $\lim_{e \to \infty} \|z_0 - y_{k_e}\| = \|z_0 - y^*\|$.

Враховуючи цю рівність та нерівність $k_e \ge e, e = 1, 2, \ldots$, перейдемо в (2.29) до границі при $e \to \infty$.

Тоді одержимо, що

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| \le \|z_0 - y^*\| \le \inf_{y \in B} \|z_0 - y\|$$

Тому $\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|$, де $y^* \in B$.

Це й означає, що y^* є екстремальним елементом для величини (2.2).

Зауважимо, що твердження про існування екстремального елемента для задачі (2.2) за умови локальної компактності множини B наведено без доведення, наприклад, у праці [3, с. 21].

Покладемо далі

$$z^* = z_0 + \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\left(y^* - z_0\right).$$

Для цього елемента маємо, що

$$\|z^* - z_0\| = \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\|y^* - z_0\| = r.$$

Тому $z^* \in B_r\left(z_0\right)$. Крім того, маємо, що

$$\|z^* - y^*\| = \left\|z_0 + \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\left(y^* - z_0\right) - y^*\right\| = \left\|\left(z_0 - y^*\right) - \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\left(z_0 - y^*\right)\right\| =$$

$$= \left\|\left(z_0 - y^*\right)\left(1 - \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\right)\right\| = \left|1 - \frac{r}{\|z_0 - y^*\|}\right|\|z_0 - y^*\| = \frac{\|z_0 - y^*\| - r}{\|z_0 - y^*\|}\|z_0 - y^*\| =$$

$$= \|z_0 - y^*\| - r = \inf_{y \in B}\|z_0 - y\| - r.$$

З урахуванням зазначеного та рівності (2.8) (див теорему 2.2.1.) одержуємо, що

$$\|z^* - y^*\| = \inf_{y \in B}\|z_0 - y\| - r = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}}\|z - y\| = \alpha^*\left(B_2\left(z_0\right), B\right),$$

причому $z^* \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$.

Це й означає, що елемент $(z^*, y^*) \in B_r(z_0) \times B$ є екстремальним елементом для величини (2.1).

Теорему доведено.

Зауважимо, що для завершення доведення теореми можна було використати твердження 2.3.1.

Важливим прикладом локально компактної множини лінійного нормованого простору є скінченновимірний підпростір цього простору.

Твердження 2.4.1. Будь-який скінченновимірний підпростір B лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ є локально компактною та замкненою множиною.

Доведення. З умовою B є скінченновимірний підпростір простору $(Z, \|\cdot\|)$, тобто існують лінійно незалежні вектори $y_1, \dots y_p$ простору Z, що

$$B = \left\{ y = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \ : \lambda_j \in R, j = \overline{1, p} \right\}$$

Розглянемо функції

$$\varphi(\lambda_1, \cdots \lambda_p) = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j, \psi(\lambda_1, \cdots \lambda_p) \ = \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \right\|, (\lambda_1, \cdots \lambda_p) \in R^p.$$

Переконаємося, що вони неперервні в будь-якій точці

$$\lambda_0 = (\lambda_1^0, \cdots \lambda_p^0) \in R^p.$$

Для цього знайдемо, що

$$\left\|\varphi\left(\lambda_1,\dots\lambda_p\right)-\varphi\left(\lambda_1^0,\dots\lambda_p^0\right)\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j y_j-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j-\lambda_j^0\right)y_j\right\|\le$$

$$\le\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda_j-\lambda_j^0\right|\left\|y_j\right\|, \qquad (2.30)$$

$$\left|\psi\left(\lambda_1,\dots\lambda_p\right)-\psi\left(\lambda_1^0,\dots\lambda_p^0\right)\right|=\left|\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j y_j\right\|-\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j\right\|\right|\le$$

$$\le\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j y_j-\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j\right\|\le\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda_j-\lambda_j^0\right|\left\|y_j\right\|. \qquad (2.31)$$

Маємо далі:

$$\left(\forall\varepsilon>0\right)\left(\exists\delta=\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{p}\left\|y_j\right\|}\succ 0\right)\left(\forall\left(\lambda_1,\dots\lambda^0\right):\left|\lambda_j-\lambda_j^0\right|<\delta,\ j=\overline{1,p}\right)$$

$$\left[\begin{array}{l}\left\|\varphi\left(\lambda_1,\dots\lambda_p\right)-\varphi\left(\lambda_1^0,\dots\lambda_p^0\right)\right\| \\ \left|\psi\left(\lambda_1,\dots\lambda_p\right)-\psi\left(\lambda_1^0,\dots\lambda_p^0\right)\right|\end{array}\right)\le\sum_{j=1}^{p}\left|\lambda_j-\lambda_j^0\right|\left\|y_j\right\|<\delta\sum_{j=1}^{p}\left\|y_j\right\|=$$

$$=\frac{\varepsilon}{\sum_{j=1}^{p}\left\|y_j\right\|}\sum_{j=1}^{p}\left\|y_j\right\|=\varepsilon\,.$$

Це й означає, що функції φ та ψ є неперервними в будь-якій точці$\left(\lambda_1^0,\cdots\lambda_p^0\right)\in R^p$.

Тоді вони неперервні на R^p.

Переконаємося також, що множина

$$S = \left\{ (\lambda_1, \cdots \lambda_p) = \lambda \in R^p \, : \, \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^2 = 1 \right\}$$

є обмеженою і замкненою множиною (компактом) простору R^p.

Нехай $\lambda = \left(\lambda_1, \ldots \lambda_p\right) \in S$.

Тоді $\|\lambda\| = \left\|\left(\lambda_1, \ldots \lambda_p\right)\right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{n} \lambda_j^2} = 1 \le 1.$

Це означає, що S обмежена.

Нехай $\lambda^0 = \left(\lambda_1^0, \ldots \lambda_p^0\right)$ є граничною точкою S. Тоді існує послідовність $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \ldots \lambda_p^k\right) \in S$ і $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \ldots \lambda_p^k\right) \xrightarrow{k \to \infty} \lambda^0 = \left(\lambda_1^0, \ldots \lambda_p^0\right)$, тобто $\lim_{k \to \infty} \lambda_j^k = \lambda_j^0, \, j = \overline{1, p}$.

Переконаємося, що $\lambda^0 = \left(\lambda_1^0, \ldots \lambda_p^0\right) \in S$

Оскільки $\lambda^k \in S$ то $\left(\lambda_1^k\right)^2 + \cdots + \left(\lambda_p^k\right)^2 = 1$. Тому й

$$\lim_{k \to \infty} \left(\left(\lambda_1^k\right)^2 + \cdots + \left(\lambda_p^k\right)^2 \right) = \lim_{k \to \infty} \left(\lambda_1^k\right)^2 + \cdots + \lim_{k \to \infty} \left(\lambda_p^k\right)^2 =$$

$$= (\lambda_1^0)^2 + \cdots + \left(\lambda_p^0\right)^2 = 1.$$

Це означає, що $\lambda^0 = \left(\lambda_1^0, \ldots \lambda_p^0\right) \in S$.

Отже, S є обмеженою та замкненою множиною (компактом) простору R^p.

Відповідно до теореми Вейєрштрасса для скінченновимірних підпросторів (див., наприклад, [14, с. 74]) неперервна на R^p функція $\psi\left(\lambda_1,\ldots\lambda_p\right)$ досягає на S свого найменшого значення, тому

$$\min_{(\lambda_1,\cdots\lambda_p)\in S}\psi(\lambda_1,\cdots\lambda_p)=\min_{\lambda\in S}\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j y_j\right\|=m=\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j\right\|,$$

де $\lambda^0=(\lambda_1^0,\cdots\lambda_p^0)\in S,$

тобто $\sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j^0\right)^2=1.$

Зрозуміло, що $m\geq 0$. Переконаємося, що $m\neq 0$. Якщо припустити, що $m=0$, то $\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j\right\|=0,\ \sum_{j=1}^{p}\lambda_j^0 y_j=0\Rightarrow\lambda_j^0=0,\ j=\overline{1,p},$

оскільки вектори $y_1,\cdots,y_p$ є лінійно незалежними.

Тоді $\sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j^0\right)^2=0.$

Але ж вище одержано, що $\sum_{j=1}^{p}\left(\lambda_j^0\right)^2=1$. Суперечність. Вона й дозволяє зробити висновок, що $m>0$.

Нехай тепер маємо послідовність

$y^k=\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k y_j\in B$ і яка обмежена, тобто

$$(\exists c>0)\left\|y^k\right\|=\left\|\sum_{j=1}^{p}\lambda_j^k y_j\right\|\leq c,k=1,2,\cdots.$$

Звідси одержимо, що

$$c \geq \left\| \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^k y_j \right\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^k\right)^2} \left\| \sum_{j=1}^{p} \frac{\lambda_j^k}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^k\right)^2}} y_j \right\| \geq \left\| \lambda^k \right\| \cdot m, \qquad (2.32)$$

оскільки $\sum_{j=1}^{p} \left(\frac{\lambda_j^k}{\sqrt{\sum_{j=1}^{p} \left(\lambda_j^k\right)^2}} y_j \right)^2 = \mathbf{1}$,

де $\|\lambda^k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j^k)^2}$.

Зі співвідношення (2.32) одержуємо, що

$$\|\lambda_k\| = \sqrt{\sum_{j=1}^{p} (\lambda_j^k)^2} \leq \frac{c}{m}, k = 1,2, \cdots.$$

Це означає, що послідовність $\lambda^k = \left(\lambda_1^k, \cdots \lambda_p^k\right)$ скінченновимірного простору R^p є обмеженою. Тоді за теоремою Больцано-Вейєрштрасса (див., наприклад, [14, с. 73]) з цієї послідовності можна вибрати послідовність.

$\lambda^{k_e} = \left(\lambda_1^{k_e}, \cdots \lambda_p^{k_e}\right) \xrightarrow{e \to \infty} \lambda^* = \left(\lambda_1^*, \cdots \lambda_p^*\right)$, причому $\lim_{e\to\infty} \lambda_j^{k_e} = \lambda_j^*, j = \overline{1, p}$.

Тоді внаслідок неперервності функції φ

$$\lim_{e\to\infty} \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^{k_e} y_j = \lim_{e\to\infty} y^{k_e} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j^* y_j = y^* \in B.$$

Отже, доведено, що з будь якої обмеженої послідовності $y^k, k=1,2,\ldots,$ із B можна вибрати послідовність y^{k_e}, яка збігається до y^* $\left(\lim_{e\to\infty} y^{k_e} = y^*\right)$, причому $y^* \in B$.

Цим самим доведено, що B є локально компактною множиною, якщо ця множина є скінченновимірним підпростором.

Більше того, ця множина є замкненою.

Дійсно, якщо y^0 є граничною точкою B, то $y^0 \in B$.

Дійсно, існує $y^k \in B$, що $y^k \xrightarrow{k\to\infty} y^0$, тобто

$$(\forall\varepsilon = 1)(\exists k_0)(\forall k > k_0)\left\|y^k - y^0\right\| < 1 = \varepsilon$$

Звідси

$$\left\|y^k\right\| - \|y^0\| < 1 \Rightarrow \left\|y^k\right\| < \|y^0\| + 1, \forall k > k_0$$

Тому $\left\|y^k\right\| \le \max\left\{\|y^1\|, \cdots, \left\|y^{k_0}\right\|, \|y^0\| + 1\right\} = C, k = 1,2,\cdots.$

Це означає, що$\{y^k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю із B. Тоді з неї можна виділити збіжну послідовністьy^{k_e}, таку, що

$\lim_{e\to\infty} y^{k_e} = y^* \in B$ (див. міркування, проведенні вище).

Але ж$\lim_{e\to\infty} y^{k_e} = \lim_{e\to\infty} y^k = y^0$. Тому $y^0 = y^* \in B$

Доведено, що будь-яка гранична точка Bналежить B.

Це означає, що B - замкнена множина.

Отже, встановлено, що B є локально компактною та замкненою множиною.

Твердження доведено.

Наслідок 2.4.1. Якщо B є будь-яким скінченновимірним простором лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує.

Справедливість твердження, про яке йдеться у наслідку випливає із теореми 2.4.1 та твердження 2.4.1., оскільки згідно з твердженням (2.4.1) B є локально компактною та замкненою множиною, а згідно з теоремою 2.4.1. тоді екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Тверджедуя 2.4.2. Якщо B_1 є скінченновимірним підпростором простору Z, а $y_0 \in Z$ то множина $B = B_1 + y_0$ (лінійний многовид) буде локально компактною та замкненою множиною.

Доведення. Візьмемо обмежену послідовність $z_k = y_k + y_0$ де $y_k \in B_1, k = 1, 2, \ldots$. Вона є обмеженою послідовністю множини $B_1 + y_0$. Це означає, що існує число $d > 0$, що $\|z_k\| = \|y_k + y_0\| \le d, k = 1, 2, \ldots$.

Маємо, що

$$\|y_k\| - \|-y_0\| = \|y_k\| - \|y_0\| \le \|y_k - (-y_0)\| = \|y_k + y_0\| \le d, k = 1,2,\cdots.$$

Тому

$$\|y_k\| \le d + y_0, k = 1, 2, \ldots$$

Це означає, що послідовність $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ є обмеженою послідовністю скінченновимірного простору B_1. Тому існує $\{y_{k_e}\}_{e=1}^{\infty}$, що $y_{k_e} \to y^* \in B_1$.

А тоді $z_{k_e} = y_{k_e} + y_0 \to y^* + y_0 \in B_1 + y_0 = B$. Звідси випливає, що $B = B_1 + y_0$ є локально компактною та замкненою множиною.

Наслідок 2.4.2. Нехай B_1 - скінченновимірний підпростір простору $(Z, \|\cdot\|)$, а $y_0 \in Z, B = B_1 + y_0$. Тоді екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Справедливість твердження наслідку випливає з твердження 2.4.2, згідно з яким $B = B_1 + y_0$ є локально компактною та замкненою множиною, та теореми 2.4.1.

Наслідок 2.4.3. Якщо в задачі відшукання величини (2.1) B є компактом простору $(Z, \|\cdot\|)$, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує.

Доведення. З будь-якої послідовності $\{y_k\}_{k=1}^{\infty}$ компакта B можна виділити збіжну до елемента цього компакту B послідовність (див., наприклад, [15, с. 43]).

Звідси робимо висновок, що компакт B є локально компактною та замкненою множиною. Згідно з теоремою 2.4.1. тоді екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Наслідок 2.4.4. Якщо в задачі відшукання величини (2.1) B є многогранником простору Z, тобто $B = CO\{y_1, \cdots, y_p\}$, де $y_j \in Z, j = \overline{1,p}$, то екстремальний елемент для величини (2.1) існує і має місце рівність.

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \alpha^*\big(B_r(z_0), CO\{y_1, \cdots, y_p\}\big) = \inf_{\substack{\lambda_j \geq 0, j=\overline{1,p}, \\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1}} \left\| z_0 - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \right\| - r.$$

Доведення. Переконаємося, що $B = CO\{y_1, \cdots, y_p\}$ є компактом простору $(Z, \|\cdot\|)$. Для спрощення доведення будемо вважати, що $p = 3$, тобто, що

$$B = CO\{y_1, y_2, y_3\} = \left\{ y = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j y_j \,:\, \alpha_j \geq 0, j = \overline{1,3}; \sum_{j=1}^{3} \alpha_j = 1 \right\}$$

Нехай $y^k = \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^k y_j : \alpha_j^k \ge 0, \sum_{j=1}^{3} \alpha_j^k = 1, k = 1,2,\dots,$ - довільна послідовність B. Зрозуміло, що $0 \le a_1^k \le 1, 0 \le a_2^k \le 1, 0 \le a_3^k \le 1, k = 1,2,\cdots$. Оскільки $\alpha_1^k, k = 1,2,\dots,$ є обмеженою числовою послідовністю, то з цієї послідовності можна вибрати збіжну послідовність $\alpha_1^{k_e} \to \alpha_1^*, e \to \infty$; оскільки $0 \le \alpha_2^{k_e} \le 1,$ то з послідовності $\left\{\alpha_2^{k_e}\right\}_{e=1}^{\infty}$ можна вибрати послідовність $\alpha_2^{k_{e_\nu}} \to \alpha_2^*, \nu \to \infty$; оскільки $0 \le \alpha_2^{k_{e_\nu}} \le 1,$ то з послідовності $\alpha_3^{k_{e_\nu}}, \nu = 1,2,\dots$ можна вибрати послідовність $\left\{\lambda_3^{k_{e_{\nu_t}}}\right\}_{t=1}^{\infty}$, таку, що $\lambda_3^{k_{e_{\nu_t}}} \to \lambda_3^*, t \to \infty$ Звідси випливає, що $y^{k_{e_{\nu_t}}} = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^{k_{e_{\nu_t}}} y_j \xrightarrow{t \to \infty} \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^* y_j,$ причому $0 \le \lambda_j^* \le 1, \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^* = 1,$ оскільки $0 \le \lambda_j^{k_{e_{\nu_t}}} \le 1, t = 1,2,\dots; \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^{k_{e_{\nu_t}}} = 1$

Отже, ми показали, що з будь-якої послідовності $y^k \in B$ можна вибрати послідовність $\left\{y^{k_{e_{\nu_t}}}\right\}_{t=1}^{\infty}$,яка збігається до елемента $y^* = \sum_{j=1}^{3} \lambda_j^* y_j \in B$.

Тому B є компактом лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$. Згідно з наслідком 2.4.3 екстремальний елемент для величини (2.1) існує. А сама величина

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \alpha^*\left(B_r(z_0), CO\{y_1, \cdots, y_p\}\right) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0), \\ y \in CO\{y_1, \cdots, y_p\}}} \|z - y\| - r =$$

$$= \inf_{y \in CO\{y_1, \cdots, y_p\}} \|z_0 - y\| - r = \inf_{\substack{\lambda_j \ge 0, j = \overline{1,p}, \\ \sum_{j=1}^{p} \lambda_j = 1}} \left\| z_0 - \sum_{j=1}^{p} \lambda_j y_j \right\| - r.$$

Наслідок доведено.

Твердження 2.4.3. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) $B = B_{r_1}(z_1) = \{y \in Z : \|y - z_1\| \le r_1\}$ - замкнена куля з центром у точці z_1 радіуса r_1 і $B_r(z_0) \cap B_{r_1}(z_1) \ne \varnothing$. Тоді

$$\alpha^*\left(B_r(z_0), B_{r_1}(z_1)\right) = \|z_0 - z_1\| - (r + r_1), \text{ а}$$

$$\left(z^*, y^*\right) = \left(z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}\left(z_1 - z_0\right), z_1 + \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}\left(z_0 - z_1\right)\right)$$

є екстремальним елементом для величини (2.1) в цьому випадку.

Доведення. Нехай в задачі відшукання величини (2.1)

$B = B_{r_1}\left(z_1\right)$, де $r_1 \ge 0,\ z_1 \in Z$, причому $B_r\left(z_0\right) \cap B_{r_1}\left(z_1\right) \ne \varnothing$.

Ставиться питання про величину

$$\alpha^*\left(B_r\left(z_0\right), B_{r_1}\left(z_1\right)\right) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B_{r_1}(z_1)}} \|z - y\|$$

та її екстремального елемента.

Переконаємося, що

$$\alpha^*\left(B_r(z_0), B_{r_1}(z_1)\right) = \|z_0 - z_1\| - (r + r_1),$$

Дійсно згідно з (2.8) (див., теорему 2.2.1.) :

$$\alpha^*\left(B_r\left(z_0\right), B_{r_1}\left(z_1\right)\right) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B_{r_1}(z_1)}} \|z - y\| = \inf_{y \in B_{r_1}(z_1)} \|z_0 - y\| - r\,. \tag{2.33}$$

Згідно з тією ж теоремою (2.2.1.) (див., співвідношення (2.8)) отримаємо, що

$$\inf_{y \in B_{r_1}(z_1)} \|z_0 - y\| = \inf_{y \in B_{r_1}(z_1)} \|y - z_0\| = \inf_{z_0 \in \{z_0\}} \|z_1 - z_0\| - r_1 = \|z_1 - z_0\| - r_1\,. \tag{2.34}$$

Тому (див., (2.33), (2.34)) :

$$\alpha^*\left(B_r(z_0), B_{r_1}(z_1)\right) = \|z_1 - z_0\| - r_1 - r = \|z_1 - z_0\| - (r + r_1),$$

що й потрібно було довести.

Переконаємося, що

$$\left(z^*, y^*\right) = \left(z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}\left(z_1 - z_0\right), z_1 + \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}\left(z_0 - z_1\right) \right)$$

є екстремальним елементом для величини (2.1).

Переконаємося, що

$$z^* = z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}(z_1 - z_0) \in B_r(z_0), \text{а}$$

$$y^* = z_1 + \frac{r}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1) \in B_{r_1}(z_1)$$

Дійсно

$$\|z^* - z_0\| = \left\|z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}(z_1 - z_0) - z_0\right\| = \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}\|z_1 - z_0\| = r.$$

Тому $z^* \in B_r\left(z_0\right)$. Аналогічно

$$\|y^* - z_1\| = \left\|z_1 + \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1) - z_1\right\| = \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}\|z_0 - z_1\| = r_1.$$

Тому $y^* = z_1 + \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}\left(z_0 - z_1\right) \in B_{r_1}\left(z_1\right)$

Крім того

$$\|z^* - y^*\| = \left\|z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}(z_1 - z_0) - z_1 - \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1)\right\| =$$

$$= \left\|(z_0 - z_1) + \left(\frac{r}{\|z_1 - z_0\|} + \frac{r_1}{\|z_1 - z_0\|}\right)(z_1 - z_0)\right\| =$$

$$= \left\| \left(1 - \frac{r + r_1}{\|z_1 - z_0\|} (z_0 - z_1) \right) \right\| = \left\| \frac{\|z_1 - z_0\| - (r + r_1)}{\|z_1 - z_0\|} (z_0 - z_1) \right\| =$$

$$= \frac{\|z_1 - z_0\| - (r + r_1)}{\|z_1 - z_0\|} \|z_1 - z_0\| = \|z_1 - z_0\| - (r + r_1).$$

Отже,

$$z^* = z_0 + \frac{r}{\|z_1 - z_0\|}(z_1 - z_0) \in B_r(z_0), y^* = z_1 + \frac{r_1}{\|z_0 - z_1\|}(z_0 - z_1) \in B_{r_1}(z_1).$$

Крім того $\|z^* - y^*\| = \|z_1 - z_0\| - (r + r_1) = \alpha^*\left(B_r(z_0), B_{r_1}(z_1)\right)$

Тому (z^*, y^*) і є екстремальним елементом для величини (2.1).

Твердження доведено.

РОЗДІЛ 3 ДЕЯКІ ТЕОРЕМИ ІСНУВАННЯ, ЄДИНОСТІ ТА ХАРАКТЕРИЗАЦІЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1). СПІВВІДНОШЕННЯ ДВОЇСТОСТІ ДЛЯ ЦІЄЇ ЗАДАЧІ.

3.1 Теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в банаховому просторі, в якому має місце « нерівність паралелограма»

Будемо вважати в цьому підрозділі, що $(Z, \|\cdot\|)$ є банаховим простором, в якому має місце, так звана, «нерівність паралелограма», тобто існує таке число $c > 0$, що для будь-яких $z, t \in Z$ виконується нерівність :

$$2\|z\|^2 + 2\|t\|^2 - \|z + t\|^2 \geq c\|z - t\|^2 \qquad (3.1)$$

(див., наприклад, [16]).

Відомо, що гільбертів простір $(Z, \|\cdot\|)$ є банаховим простором (див., наприклад, [4, с. 47,48]) і в ньому має місце «рівність паралелограма», тобто для будь-яких $z, t \in Z$ виконується рівність

$$2\|z\|^2+2\|t\|^2=\|z+t\|^2+\|z-t\|^2. \tag{3.2}$$

З рівності (3.2) випливає, що

$$2\|z\|^2+2\|t\|^2-\|z+t\|^2=\|z-t\|^2. \tag{3.3}$$

Якщо покласти $c=1$, то з (3.3) випливає, що в гільбертовому просторі виконується співвідношення: для будь-яких $z,t\in Z$ та числа $c=1$ виконується співвідношення (3.1).

Отже банахів простір, в якому має місце «нерівність паралелограма», є узагальненням гільбертового простору.

Прикладом банахового простору, в якому виконується «нерівність паралелограма», є зокрема, простір $l_p, 1<p\le 2$, адже для будь-якого $z,t\in l_p$ виконується нерівність

$$2\|z\|^2+2\|t\|^2-\|z+t\|^2\ge(p-1)\|z-t\|^2$$ (див., наприклад, [17]).

Має місце така теорема.

Теорема 3.1.1 (існування та єдності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.2)).

Якщо $(Z,\|\cdot\|)$ є банахів простір і в цьому просторі виконується «нерівність паралелограма» (3.1) та B є опуклою й замкненою множиною простору Z, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.2) існує та єдиний.

Доведення.

Згідно (2.2)

$$\alpha^*(z_0,B)=\inf_{y\in B}\|z_0-y\|. \tag{2.2}$$

Візьмемо довільне $n \in N_0$. Оскільки $\alpha^*\left(z_0,B\right)+\frac{1}{n}>\alpha^*\left(z_0,B\right)$, то існує елемент $y_n \in B$ такий, що

$$\alpha^*\left(z_0,B\right) \le \left\|z_0-y_n\right\| < \alpha^*\left(z_0,B\right)+\frac{1}{n} \tag{3.4}$$

Маємо, що для $n,m \in N, y_n, y_m \in B$.

Внаслідок того, що B є опуклою множиною елемент

$$\frac{y_n+y_m}{2}=\frac{1}{2}y_n+\frac{1}{2}y_m=\left(1-\frac{1}{2}\right)y_n+\frac{1}{2}y_m \in B.$$

Тому

$$\left\|z_0-\frac{y_n+y_m}{2}\right\| \ge \alpha^*\left(z_0,B\right). \tag{3.5}$$

Покладемо в нерівності (3.1) $z=z_0-y_n, t=z_0-y_m, n,m \in N$.

Для таких z і t ця нерівність набуде вигляду

$$2\left\|z_0-y_n\right\|^2+2\left\|z_0-y_m\right\|^2-\left\|2z_0-\left(y_n+y_m\right)\right\|^2 \ge c\left\|y_n-y_m\right\|^2 \tag{3.6}$$

З урахуванням (3.5) одержимо, що

$$\left\|2z_0-\left(y_n+y_m\right)\right\|^2=\left\|2\left(z_0-\frac{y_n+y_m}{2}\right)\right\|^2=4\left\|z_0-\frac{y_n+y_m}{2}\right\|^2 \ge$$

$$\ge 4\left(\alpha^*\left(z_0,B\right)\right)^2. \tag{3.7}$$

З урахуванням (3.4), (3.6) та (3.7) одержуємо, що $c\left\|y_n-y_m\right\|^2 \le 2\left\|z_0-y_n\right\|^2+2\left\|z_0-y_m\right\|^2-4\left(\alpha^*\left(z_0,B\right)\right)^2 \le$

$$\leq 2\left(\alpha^*\left(z_0,B\right)+\frac{1}{n}\right)^2+2\left(\alpha^*\left(z_0,B\right)+\frac{1}{m}\right)^2-4\left(\alpha^*\left(z_0,B\right)\right)^2=$$

$$=4\big(\alpha^*(z_0,B)\big)^2+4\alpha^*(z_0,B)\frac{1}{n}+4\alpha^*(z_0,B)\frac{1}{m}+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}-4\big(\alpha^*(z_0,B)\big)^2=$$

$$4\alpha^*(z_0,B)\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{2}{n^2}+\frac{2}{m^2}.$$

Звідки

$$\left\|y_n-y_m\right\|^2\leq\frac{4\alpha^*\left(z_0,B\right)}{c}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{2}{cn^2}+\frac{2}{cm^2},$$

$$0\leq\left\|y_n-y_m\right\|\leq\left(\frac{4\alpha^*\left(z_0,B\right)}{c}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{m}\right)+\frac{2}{cn^2}+\frac{2}{cm^2}\right)^{\frac{1}{2}}. \qquad (3.8)$$

Переходимо у цій нерівності до границі при $n\to\infty, m\to\infty$. Оскільки при $n\to\infty, m\to\infty$ права частина нерівності (3.8) прямує до нуля, то згідно з теоремою про границю проміжної послідовності маємо, що

$$\lim_{\substack{n\to\infty\\ m\to\infty}}\left\|y_n-y_m\right\|=0,$$

тобто

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n_0\in N)(\forall n\geq n_0, m\geq n_0)\|y_n-y_m\|<\varepsilon.$$

Тому послідовність $\left\{y_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ є фундаментальною послідовністю простору $(Z,\|\cdot\|)$. Оскільки $(Z,\|\cdot\|)$ є банаховим просторо, то тоді існує $\lim\limits_{m\to\infty}y_n=y^*$, причому $y^*\in B$, оскільки B є замкненою множиною.

На підставі неперервності по y функції $y\in Z\to\left\|z_0-y\right\|$ одержуємо, що $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|z_0-y_n\right\|=\left\|z_0-y^*\right\|$.

Внаслідок (3.4) $\lim\limits_{n\to\infty}\left\|z_0 - y_n\right\| = \alpha^*\left(z_0, B\right)$.

Отже, $\left\|z_0 - y^*\right\| = \alpha^*\left(z_0, B\right), y^* \in B$. Тобто, $\alpha^*\left(z_0, B\right) = \inf\limits_{y\in B}\left\|z_0 - y\right\| = \left\|z_0 - y^*\right\|$, причому $y^* \in B$.

Це означає, що y^* і є екстремальним елементом для величини (2.2). Переконаємося що він єдиний.

Припустимо, що $\overline{y} \in B$ і $\overline{y}$ також є екстремальним елементом для величини (2.2), тобто

$$\alpha^*\left(z_0, B\right) = \inf_{y\in B}\left\|z_0 - y\right\| = \left\|z_0 - \overline{y}\right\|. \tag{3.9}$$

Оскільки $\dfrac{y^* + \overline{y}}{2} \in B$, то

$$\left\|z_0 - \tfrac{y^* + \bar{y}}{2}\right\| \geq \alpha^*(z_0, B). \tag{3.10}$$

Підставимо в нерівність (3.1) $z = z_0 - y^*, t = z_0 - \overline{y}$. Тоді одержимо, що

$$2\left\|z_0 - y^*\right\|^2 + 2\left\|z_0 - \overline{y}\right\|^2 - \left\|2z_0 - \left(y^* + \overline{y}\right)\right\|^2 \geq c\left\|y^* + \overline{y}\right\|^2.$$

З цієї нерівності та співвідношень (3.9), (3.10) випливає, що

$$0 \leq c\left\|y^* - \overline{y}\right\| \leq 4\left(\alpha^*\left(z_0, B\right)\right)^2 - 4\left\|z_0 - \frac{y^* + \overline{y}}{2}\right\|^2 \leq$$

$$\leq 4\left(\alpha^*\left(z_0, B\right)\right)^2 - 4\left(\alpha^*\left(z_0, B\right)\right)^2 = 0.$$

Тому $c\left\|y^* - \overline{y}\right\|^2 = 0$, $\left\|y^* - \overline{y}\right\|^2 = 0$, $\left\|y^* - \overline{y}\right\| = 0$, $y^* - \overline{y} = 0$, $y^* = \overline{y}$

Виходить, що всі надумані екстремальні елементи у задачі (2.2) насправді дорівнюють y^*.

Отже, екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.2) існує і єдиний.

Теорему доведено.

Теорема 3.1.2. (існування та єдиності екстремального елементу для задачі відшукання величини (2.1)).

Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є банаховим простором і в цьому просторі виконується «нерівність паралелограма» (3.1) та B є опуклою й замкненою множиною простору Z, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує і єдиний.

Доведення. Відповідно до теореми 3.1.1 існує єдиний екстремальний елемент для величини (2.2), тобто існує єдиний елемент $y^* \in B$ такий, що

$$\inf_{y\in B}\|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|. \tag{3.11}$$

Згідно з твердженням 2.3.1 вектор

$\left(z^*, y^*\right)$, де $z^* = z_0 + \dfrac{r}{\|y^* - z_0\|}\left(y^* - z_0\right)$, є екстремальним елементом для величини (2.1).

Цим самим доведено, що в банаховому просторі, для норми якого виконується «нерівність паралелограма» (3.1) за умови опуклості й замкненості множини B екстремальний елемент для величини (2.1) існує.

Ним буде, зокрема, елемент $\left(z^*, y^*\right)$, де $y^* \in B$ і визначається рівністю (3.11), а $z^* \in B_r\left(z_0\right)$ і $z^* = z_0 + \dfrac{r}{\|y^* - z_0\|}\left(y^* - z_0\right)$.

Переконаємося, що $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ є єдиним екстремальним елементом для величини (2.1). Згідно з теоремою 2.2.1. та (3.11)

$$\alpha^*\left(B_r\left(z_0\right), B\right) = \inf_{\substack{z \in B_r\left(z_0\right) \\ y \in B}} \|z - y\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \left\|z_0 - y^*\right\| - r. \quad (3.12)$$

Припустимо, що крім екстремального елемента $\left(z^*, y^*\right)$ існує для величини (2.1) ще екстремальний елемент $\left(\bar{z}, \bar{y}\right)$, де $\bar{z} \in B_r\left(z_0\right)$, $\bar{y} \in B$, тобто

$$\alpha^*\left(B_r\left(z_0\right), B\right) = \left\|\bar{z} - \bar{y}\right\| = \left\|z_0 - y^*\right\| - r = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r \quad (3.13)$$

(див (3.12)).

Маємо, що (див 3.13)

$$\left\|\bar{z} - \bar{y}\right\| = \left\|\bar{y} - \bar{z}\right\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \left\|\left(\bar{y} - z_0\right) - \left(\bar{z} - z_0\right)\right\| \geq$$

$$\geq \left\|\bar{y} - z_0\right\| - \left\|\bar{z} - z_0\right\| \geq \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r.$$

З цих співвідношень випливає, що

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|\bar{y} - z_0\| = \|z_0 - \bar{y}\|, \|\bar{z} - z_0\| = r \quad (3.14)$$

Зі співвідношення (3.14) випливає, що $\bar{y}$ є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (3.12). Але ж згідно з теоремою 3.1.2 єдиним екстремальним елементом для величини (3.14) є y^*. Тому $\bar{y} = y^*$. Отже, $(\bar{z}, \bar{y}) = (\bar{z}, y^*)$.

Маємо тепер, що (z^*, y^*) та $(\bar{z}, y^*)$ є екстремальними елементами для величини (2.1).

Згідно з теоремою 2.1.1 елементи $z' = z^* - y^*$ та $t' = \bar{z} - y^*$ є екстремальними елементами для величини (2.4). Тому (див (2.5))

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \|z'\| = \|t'\|. \tag{3.15}$$

Підставивши в нерівність (3.1) $z = z'$, $t = t'$, одержимо, що

$$2\|z'\|^2 + 2\|t'\|^2 - \|z' + t'\|^2 \geq c\|z' - t'\|^2 = c\|z^* - y^* - \bar{z} + y^*\|^2$$
$$= c\|z^* - \bar{z}\|^2. \tag{3.16}$$

Крім того, маємо, що

$$\frac{z' + t'}{2} = \frac{z^* - y^* + \bar{z} - y^*}{2} = \frac{z^* + \bar{z}}{2} - y^* =$$
$$= \left(1 - \frac{1}{2}\right) z^* + \frac{1}{2}\bar{z} - y^* \ \in B_r(z_0) - B,$$

оскільки

$$z^* \in B_r(z_0), \bar{z} \in B_r(z_0), \frac{z^* + \bar{z}}{2} = \left(1 - \frac{1}{2}\right) z^* + \frac{1}{2}\bar{z} = \frac{1}{2} z^* + \frac{1}{2}\bar{z} \in B_r(z_0)$$

($B_r(z_0)$ є опуклою множиною), $y^* \in B$.

Тому (див (2.5))

$$\left\|\frac{z'+t'}{2}\right\| \geq \inf_{x \in B_r(z_0) - B} \|x\| = \alpha^*(B_r(z_0), B). \tag{3.17}$$

Урахувавши (3.15) - (3.17) отримаємо, що

$$0 \leq \|z^* - \bar{z}\|^2 \leq \frac{1}{c}\left(2\|z'\|^2 + 2\|t'\|^2 - 4\left\|\frac{z' + t'}{2}\right\|^2 \right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{c}\left(2\big(\alpha^*(B_r(z_0), B)\big)^2 + 2\big(\alpha^*(B_r(z_0), B)\big)^2 - 4\big(\alpha^*(B_r(z_0), B)\big)^2\right) = 0$$

З цих співвідношень випливає, що $\|z^* - \bar{z}\|^2 = 0$ і, отже, $z^* = \bar{z}$.

Отже, (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1), а для будь-якого іншого екстремального елемента $(\bar{z}, \bar{y})$ для цієї величини маємо, що $\bar{z} = z^*$, $\bar{y} = y^*$, тобто він дорівнює (z^*, y^*). Єдиність екстремального елемента для величини (2.1) встановлена.

Теорему доведено.

Наслідок 3.1.1. Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є банаховим простором, в якому виконується «нерівність паралелограма» (3.1) та B є опуклим компактом цього простору, то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує та єдиний.

Справедливість наслідку випливає з теореми 3.1.2, оскільки компакт є замкненою множиною (див., наприклад, [11, с. 48]).

Наслідок 3.1.2. Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є банаховим простором, в якому виконується «нерівність паралелограма» (3.1) та B є скінченновимірним підпростором Z (скінченновимірним лінійним многовидом Z), то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує та єдиний.

Справедливість наслідку випливає з теореми 3.1.2, оскільки скінченновимірний підпростір (скінченновимірний лінійний многовид) є опуклою замкненою множиною.

Наслідок 3.1.3. Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є гільбертовим простором чи простором$l_p, 1 < p \leq 2$, та B є опуклою замкненою множиною Z (опуклим компактом, скінченновимірним лінійним підпростором, скінченновимірним лінійним многовидом), то екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.1) існує та єдиний.

Справедливість наслідку випливає з наслідків 3.1.1, та 3.1.2, оскільки гільбертовий простір та простір $l_p, 1 < p \leq 2$ є банаховими просторами, в яких виконується «нерівність паралелограма».

3.2 Про єдиність екстремального елемента для задачі (2.1) у строго нормованому просторі.

Розглянемо поняття строго нормованого простору та деякі питання єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) в лінійному нормованому просторі $(Z, \|\cdot\|)$, яка (єдиність) обумовлена властивостями норми цього простору.

Норму $\|\cdot\|$ простору Z називають строго опуклою, якщо його сфера $S_1(0) = \{z \in Z : \|z\| = 1\}$ не містить відрізків, тобто, якщо з того, що $z_1 \in S_1(0)$, $z_2 \in S_1(0), z_1 \neq z_2, \alpha \in (0,1)$ випливає, що $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| < 1$. (див., наприклад, [13, с. 21]).

Відомо (див., наприклад, [8, с. 31]), що відрізком $[z_1, z_2]$ лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ є множина точок z :

$$[z_1, z_2] = \{z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2 : \ 0 \leq \alpha \leq 1\}.$$

При $\alpha = 0$ отримаємо $z = z_1$ – «лівий» кінець відрізка $[z_1, z_2]$, який належить $S_1(0)$; при $\alpha = 1$ отримаємо $z = z_2$ – «правий» кінець відрізка $[z_1, z_2]$, який $\in S_1(0)$. Щодо інших точок z відрізка $[z_1, z_2]$, то вони дорівнюють :

$$z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2, \text{де } \ 0 < \alpha < 1.$$

Маємо, що для усіх точок

$$\|z\| = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| \leq \|(1-\alpha)z_1\| + \|\alpha z_2\| = (1-\alpha)\|z_1\| + \alpha\|z_2\| =$$

$$= (1-\alpha)1 + \alpha \cdot 1 = 1$$

Отже при $0 < \alpha < 1$:

$$\|z\| = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| \leq 1.$$

Якщо ж рівність в цьому останньому співвідношенні неможлива, тобто $\|z\| = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| < 1$ для всіх $z_1, z_2 \in S_1(0)$, і всіх$0 < \alpha < 1$, тобто ніяка точка $z = (1-\alpha)z_1 + \alpha z_2$, де $0 < \alpha < 1$ не лежить на сфері $S_1(0)$, то норму $\|\cdot\|$ лінійного нормованого простору $(Z, \|\cdot\|)$ називають строго опуклою нормою (див., наприклад, [3, с. 21]).

Відомо, що коли $z_1 \in Z, z_2 \in Z$, то $\|z_1 + z_2\| \leq \|z_1\| + \|z_2\|$.

Отже, можливі випадки, що $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$. Виявляється, що строга опуклість норми $\|\cdot\|$ еквівалентна такій умові : норма $\|\cdot\|$ строго опукла тоді і тільки тоді, коли рівність $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$ для $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$ можлива лише тоді, коли існує $c > 0$ таке, що $z_1 = cz_2$. Кажуть, що в цьому випадку лінійний нормований простір $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим.

Дійсно, нехай норма $\|\cdot\|$ є строго опуклою, $z_1 \neq 0, z_2 \neq 0$. Чи може $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$, а $z_1 \neq cz_2$ ні при якому $c > 0$?

Тоді $z_1' = \frac{z_1}{\|z_1\|}$, $z_2' = \frac{z_2}{\|z_2\|}$ такі, що

$$\|z_1'\| = \left\|\frac{z_1}{\|z_1\|}\right\| = \frac{1}{\|z_1\|}\|z_1\| = 1\,, \qquad \|z_2'\| = \left\|\frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| = \frac{1}{\|z_2\|}\|z_2\| = 1.$$

Крім того $z_1' \neq z_2'$. Дійсно, якщо б $z_1' = z_2'$, то тоді б $\frac{z_1}{\|z_1\|} = \frac{z_2}{\|z_2\|}$, $z_1 = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} z_2 = cz_2$, де $c = \frac{\|z_1\|}{\|z_2\|} > 0$, що суперечить припущенню про те, що $z_1 \neq cz_2$.

Тому $z_1' \neq z_2'$. Отже маємо, що $\|z_1'\| = 1$, $\|z_2'\| = 1$, $z_1' \neq z_2'$ і $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$.

Оскільки норма $\|\cdot\|$ є строго опуклою, то $\|(1-\alpha)z_1' + \alpha z_2'\| < 1$ для всіх $\alpha \in (0{,}1)$. При $\alpha = \frac{\|z_2\|}{\|z_1\|+\|z_2\|}$ є $(0{,}1)$ з останньої нерівності одержимо, що

$$\left\|\left(1 - \frac{\|z_2\|}{\|z_1\|+\|z_2\|}\right) z_1' + \frac{\|z_2\|}{\|z_1\|+\|z_2\|} z_2'\right\| = \left\|\frac{\|z_1\|}{\|z_1\|+\|z_2\|} \cdot \frac{z_1}{\|z_1\|} + \frac{\|z_2\|}{\|z_1\|+\|z_2\|} \cdot \frac{z_2}{\|z_2\|}\right\| =$$

$$= \left\|\frac{z_1 + z_2}{\|z_1\| + \|z_2\|}\right\| = \frac{\|z_1 + z_2\|}{\|z_1\| + \|z_2\|} < 1$$

Звідси $\|z_1 + z_2\| < \|z_1\| + \|z_2\|$, що суперечить нашому припущенню, що $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$. Отже, наше припущення про те , що з рівності $\|z_1 + z_2\| = \|z_1\| + \|z_2\|$ не випливає , що $z_1 = cz_2$ де $c > 0$, невірне. Тому $z_1 = cz_2$, і, отже, $\left(\mathbf{Z}, \|\cdot\|\right)$ є строго нормованим простором, якщо норма $\|\cdot\|$ є строго опуклою.

Нехай тепер простір $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим простором. Переконаємося, що $\|\cdot\|$ є строго опуклою.

Беремо $z_1, z_2 \in S_1(0), z_1 \neq z_2$, тобто $\|z_1\| = \|z_2\| = 1, z_1 \neq z_2$.

Доведемо, що $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| < 1, \alpha \in (0,1)$. Припустимо, що для деякого $\alpha \in (0,1)$ $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| = 1$.

Маємо, що тоді:

$$\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| \leq \|(1-\alpha)z_1\| + \|\alpha z_2\| = (1-\alpha)\|z_1\| + \alpha\|z_2\|$$
$$= (1-\alpha)\cdot 1 + \alpha \cdot 1 = 1 = \|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\|$$

Отже, звідси випливає, що $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| = \|(1-\alpha)z_1\| + \|\alpha z_2\|$, причому $\|(1-\alpha)z_1\| = (1-\alpha)\|z_1\| = (1-\alpha) \neq 0\ (> 0)$,

$\|\alpha z_2\| = \alpha\|z_2\| = \alpha \neq 0\ (> 0)$. Оскільки простір $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим, то існує $c > 0$, що $(1-\alpha)z_1 = c\alpha z_2$. Тоді

$$\|(1-\alpha)z_1\| = (1-\alpha)\|z_1\| = 1-\alpha = \|c\alpha z_2\| = c\alpha\|z_2\| = c\alpha$$

Тому $1-\alpha = c\alpha$, а $(1-\alpha)z_1 = c\alpha z_2$. Звідси $c\alpha z_1 = c\alpha z_2$, $z_1 = z_2$, що суперечить співвідношенню $z_1 \neq z_2$.

Тому не може при $\alpha \in (0,1)$ $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| = 1$.

Залишається, що $\forall\alpha \in (0,1)$ $\|(1-\alpha)z_1 + \alpha z_2\| < 1$.

Це й означає, що $\|\cdot\|$ є строго опукла. Таким чином, якщо $\|\cdot\|$ є строго опукла, то $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим простором і навпаки, коли $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим простором, то $\|\cdot\|$ є строго опуклою.

Таким чином простори зі строго опуклою нормою є строго нормовані, а строго нормовані простори є простори зі строго опуклою нормою.

Зауважимо, що стисло про зв'язок між нормованими просторами зі строгою опуклою нормою і строго нормованими просторами зазначається, зокрема, у праці [3, с. 21,22].

В цьому підрозділі ми деталізували обгрунтування їх еквівалентності.

Теорема 3.2.1. Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим простором і для задачі відшукання величини (2.2) екстремальний елемент існує, то він єдиний.

Доведення. Припустимо, що y_1^* та y_2^*, де $y_1^* \neq y_2^*$, є екстремальними елементами для задачі відшукання величини (2.2), тобто $y_1^* \in B, y_2^* \in B$ та

$$\alpha^*(z_0, B) = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - y_1^*\| = \|z_0 - y_2^*\|. \tag{3.18}$$

Оскільки B є опуклою множиною, то $\frac{y_1^* + y_2^*}{2} = \frac{1}{2} y_1^* + \frac{1}{2} y_2^* \in B$, причому

$$\alpha^*(z_0, B) \leq \left\| z_0 - \frac{y_1^* + y_2^*}{2} \right\| = \left\| \frac{z_0 - y_1^*}{2} + \frac{z_0 - y_2^*}{2} \right\| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2} \|z_0 - y_1^*\| + \frac{1}{2} \|z_0 - y_2^*\| = \frac{1}{2} \alpha^*(z_0, B) + \frac{1}{2} \alpha^*(z_0, B) = \alpha^*(z_0, B)$$

Тому

$$\left\| \frac{z_0 - y_1^*}{2} + \frac{z_0 - y_2^*}{2} \right\| = \left\| \frac{z_0 - y_1^*}{2} \right\| + \left\| \frac{z_0 - y_2^*}{2} \right\|$$

$$\|(z_0 - y_1^*) + (z_0 - y_2^*)\| = \|z_0 - y_1^*\| + \|z_0 - y_2^*\|$$

Причому

$y_1^* \neq y_2^*, z_0 - y_1^* \neq 0$ (т. щ $z_0 \in B_r(z_0)$, $y_1^* \in B$ та $B_r(z_0) \cap B \neq \emptyset$)

$z_0 - y_2^* \neq 0$ (т. щ $z_0 \in B_r(z_0)$, $y_2^* \in B$ та $B_r(z_0) \cap B \neq \emptyset$)

Тому існує $c > 0$, що $z_0 - y_1^* = c(z_0 - y_2^*)$.

Звідси $\|z_0 - y_1^*\| = \|c(z_0 - y_2^*)\| = c\|z_0 - y_2^*\|, 1 = c,$ оскільки має місце (3.18), то $\|z_0 - y_1^*\| > 0,\ \|z_0 - y_2^*\| > 0.$

Оскільки $c = 1$ та $z_0 - y_1^* = c(z_0 - y_2^*)$, то $z_0 - y_1^* = z_0 - y_2^*$.

Тому $y_1^* = y_2^*$, що суперечить припущенню, що $y_1^* \neq y_2^*$. Тому екстремальний елемент для задачі відшукання величини (2.2) може бути тільки один.

Теорему доведено.

Теорема 3.2.2. Якщо $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим простором і для задачі відшукання величини (2.1) екстремальний елемент існує, то він єдиний.

Доведення. За умовою існує екстремальний елемент для задачі (2.1). Позначимо його через (z^*, y^*) , де $z^* \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$. Тоді (див., теорему 2.2.1)

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\| = \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r. \qquad (3.19)$$

Припустимо, що $(\bar{z}, \bar{y})$, де $\bar{z} \in B_r(z_0)$, $\bar{y} \in B$, також є екстремальним елементом для величини (2.1). Тоді

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\| = \|\bar{z} - \bar{y}\| = \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r. \quad (3.20)$$

Переконаємося, що y^* та $\bar{y}$ є екстремальними елементами для величини (2.2), тобто, що

$$\inf_{y\in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - y^*\|, \quad \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| = \|z_0 - \bar{y}\| . \qquad (3.21)$$

Маємо, що (див., (3.20))

$$\inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r = \|z^* - y^*\| = \|y^* - z^*\| = \|(y^* - z_0) - (z^* - z_0)\| \geq$$

$$\geq \|y^* - z_0\| - \|z^* - z_0\| \geq \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r$$

Звідси випливає, що $\inf\limits_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|y^* - z_0\|$, $\|z^* - z_0\| = r$.

Отже, y^* є екстремальним елементом для величини (2.2).

Аналогічно з (3.20) одержимо, що

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r = \|\bar{z} - \bar{y}\| = \|\bar{y} - \bar{z}\| = \|(\bar{y} - z_0) - (\bar{z} - z_0)\| \geq$$

$$\geq \|\bar{y} - z_0\| - \|\bar{z} - z_0\| \geq \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r$$

Звідси випливає, що $\inf\limits_{y \in B} \|z_0 - y\| = \|\bar{y} - z_0\|$, $\|\bar{z} - z_0\| = r$.

Отже, $\bar{y}$ є екстремальним елементом величини (2.2). Згідно з теоремою 3.2.1 екстремальний елемент для величини (2.2) єдиний. Тому $y^* = \bar{y}$ і, отже, $\|z^* - y^*\| = \|\bar{z} - y^*\|$. Маємо, що

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) \leq \left\| \frac{z^* + \bar{z}}{2} - y^* \right\| = \left\| \frac{z^* - y^*}{2} + \frac{\bar{z} - y^*}{2} \right\| \leq$$

$$\leq \left\| \frac{z^* - y^*}{2} \right\| + \left\| \frac{\bar{z} - y^*}{2} \right\| = \frac{1}{2}\alpha^*(B_r(z_0), B) + \frac{1}{2}\alpha^*(B_r(z_0), B) = \alpha^*(B_r(z_0), B)$$

Звідси випливає, що

$$\|(z^* - y^*) + (\bar{z} - y^*)\| = \|z^* - y^*\| + \|\bar{z} - y^*\|, \tag{3.22}$$

причому $z^* - y^* \neq 0$, $\bar{z} - y^* \neq 0$,

Тому що $z^* \in B_r(z_0)$, $\bar{z} \in B_r(z_0)$, $y^* \in B$ та $B_r(z_0) \cap B \neq \emptyset$.

Оскільки простір $(Z, \|\cdot\|)$ є строго нормованим, то тоді з (3.22) випливає, що

$$z^* - y^* = c(\bar{z} - y^*) \text{, де } c > 0 \tag{3.23}$$

Тому

$$\|z^* - y^*\| = c\|\bar{z} - y^*\| \tag{3.24}$$

З (3.19) та (3.20) випливає, що $\|z^* - y^*\| = \|\bar{z} - \bar{y}\| = \|\bar{z} - y^*\|$. Звідси та з (3.24) маємо, що $c = 1$.

Тоді з (3.23) одержимо, що $z^* - y^* = \bar{z} - y^*$ Звідси $z^* = \bar{z}$. Оскільки вже встановлено, що $y^* = \bar{y}$. Тому $(z^*, y^*) = (\bar{z}, \bar{y})$.

Отже, $(\bar{z}, \bar{y})$ не може бути відмінним від (z^*, y^*) екстремальним елементом для величини (2.1).

Таким чином доведено, що коли екстремальний елемент для величини (2.1) існує, то він єдиний.

Теорему доведено.

3.3 Співвідношення двоїстості та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1).

Має місце таке твердження.

Теорема 3.3.1 (співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (2.1))

Для задачі відшукання величини (2.1) справедлива рівність :

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \max_{\|f\|=1} \left(f(z_0) - \sup_{y \in B} f(y) \right) - r. \quad (3.25)$$

Доведення. Згідно з теоремою 2.2.1

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \inf_{y \in B} \|z_0 - y\| - r. \quad (3.26)$$

Відповідно до теореми 2.3.1 [3, с.28]

$$\inf_{y \in B} \|z_0 - y\| = \max_{\|f\|=1} \left(f(z_0) - \sup_{y \in B} f(y) \right). \quad (3.27)$$

Зі співвідношень (3.26), (3.27) отримаємо рівність (3.25).

Теорему доведено.

Рівність (3.25) будемо називати співвідношенням двоїстості для задачі відшукання величини (2.1).

Розглянемо далі критерій екстремальності елемента $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ для задачі відшукання величини (2.1), який грунтується на співвідношенні двоїстості (3.25).

Теорема 3.3.2 (критерії екстремальності елемента $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ для величини (2.1)). Для того щоб елемент $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ був екстремальним елементом для величини (2.1), необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f^* \in Z^*$ з такими властивостями :

1) $\|f^*\| = 1$;
2) $f^*(z^* - y^*) = \|z^* - y^*\|$;
3) $f^*(z_0 - z^*) = r$;
4) $\sup\limits_{y \in B} f^*(y) = f^*(y^*)$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ є екстремальним елементом для величини (2.1).

Позначимо через f^* функціонал із Z^* на якому реалізується максимум у правій частині співвідношення двоїстості (3.25).

Тоді $\|f^*\| = 1$ та мають місце такі співвідношення

$$\alpha^*(B_r(z_0), B) = \inf_{\substack{z \in B_r(z_0) \\ y \in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\| = f^*(z_0) - \sup_{y \in B} f^*(y) - r =$$

$$= f^*(z_0) - r - \sup_{y \in B} f^*(y). \tag{3.28}$$

Маємо, що

$$1 = \|f^*\| = \sup_{\|x\| \le 1} f^*(x) = - \inf_{\|-x\| \le 1} f^*(-x) = \inf_{\|u\| \le 1} f^*(u),$$

$$r = -r \inf_{\|u\|\le 1} f^*(u) = -\inf_{\|u\|\le 1} f^*(ru) = -\inf_{\|zu\|\le r} f^*(zu) = -\inf_{\|u\|\le r} f^*(u),$$

$$f^*(z_0) - r = f^*(z_0) + \inf_{\|u\|\le r} f^*(u) = \inf_{\|u\|\le r} f^*(z_0 + u) =$$

$$= \inf_{\|z_0+u-z_0\|\le r} f^*(z_0+u) = \inf_{\|z-z_0\|\le r} f^*(z) = \inf_{z\in B_r(z_0)} f^*(z). \qquad (3.29)$$

Зі співвідношень (3.28). (3.29) отримуємо, що

$$\|z^* - y^*\| = f^*(z_0) - r - \sup_{y\in B} f^*(y) = \inf_{z\in B_r(z_0)} f^*(z) - \sup_{y\in B} f^*(y) \le$$

$$\le f^*(z^*) - f^*(y^*) = f^*(z^* - y^*) \le \|f^*\|\|z^* - y^*\|. \qquad (3.30)$$

Зі співвідношення (3.29), (3.30) і рівності $\|f^*\| = 1$ одержуємо, що

1) $\|f^*\| = 1$;
2) $f^*(z^* - y^*) = \|z^* - y^*\|$;
3) $\inf_{z\in B_r(z_0)} f^*(z) = f^*(z^*) = f^*(z_0) - r$, або ж $f^*(z_0 - z^*) = r$;
4) $\sup_{y\in B} f^*(y) = f^*(y^*)$.

Отже, доведено, що коли (x^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1), то існує функціонал $f^* \in Z^*$, для якого виконуються умови 1) - 4) теореми.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ існує $f^* \in Z^*$, якого виконуються умови 1) – 4) цієї теореми.

Доведемо, що (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1)

З урахуванням умов 1) – 4) будемо мати, що для будь-якого $z \in B_r(z_0)$, $y \in B$

$$\inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\| \le \|z^* - y^*\| = f^*(z^* - y^*) = f^*(z^*) - f^*(y^*) =$$

$$= f^*(z^* - z_0) + f^*(z_0) - \sup_{y\in B} f^*(y) = f^*(z_0) - r - \sup_{y\in B} f^*(y) \le$$

$$\leq f^*(z_0) - r - f^*(y) = f^*(z_0 - y) - r \leq \|f^*\|\|z_0 - y\| - r = \|z_0 - y\| - r$$

Звідси випливає, що

$$\inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\| \leq \|z^* - y^*\| \leq \inf_{y\in B} \|z_0 - y\| - r = \inf_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\|$$

(див теорему 2.2.1).

Тому $\inf\limits_{\substack{z\in B_r(z_0)\\ y\in B}} \|z - y\| = \|z^* - y^*\|$, тобто елемент (z^*, y^*) є екстремальним елементом для задачі відшукання величини (2.1).

Достатність доведено.

Наслідок 3.3.1. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) B є опуклим конусом з вершиною в точці 0.

Для того щоб елемент (z^*, y^*) був екстремальним елементом для задачі відшукання величини (2.1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f^* \in Z^*$ такий, який задовольняє умовам:

1) $\|f^*\| = 1$;
2) $f^*(z^* - y^*) = \|z^* - y^*\|$;
3) $f^*(z_0 - z^*) = r$;
4) $\sup\limits_{y\in B} f^*(y) = f^*(y^*) = 0$.

Доведення. Необхідність. Припустимо, що $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ є екстремальним елементом для величини (2.1). Відповідно до теореми 3.3.2 існує функціонал $f^* \in Z^*$, який задовольняє умовам 1) – 4) цієї теореми. Відповідно до умови 4) $\sup\limits_{y\in B} f^*(y) = f^*(y^*)$. Звідки випливає, що $f^*(y) \leq 0$ для всіх $y \in B$. Дійсно, якщо б для $\bar{y} \in B$ має місце нерівність $f^*(\bar{y}) > 0$, то тоді б

$$\sup_{y\in B} f^*(y) \ge \sup_{t>0} f^*(t\bar{y}) = \sup_{t>0}\big(tf^*(\bar{y})\big) =$$

$$= f^*(\bar{y})\sup_{t>0} t = f^*(\bar{y})(+\infty) = +\infty \ne f^*(y^*).$$

Одержана суперечність доводить, що $f^*(y) \le 0 \ \forall y \in B$. Візьмемо $\bar{y} \in B$ та $t > 0$. Тоді

$$0 \ge \sup_{y\in B} f^*(y) \ge \sup_{t>0} f^*(t\bar{y}) \ge \left(\lim_{\substack{t>0,\\ t\to 0}} t\right) f^*(\bar{y}) = 0.$$

Звідси випливає, що $\sup_{y\in B} f^*(y) = 0$. За умовою $\sup_{y\in B} f^*(y) = f^*(y^*)$. Тому $f^*(y^*) = 0$. Отже, маємо, що 4) $\sup_{y\in B} f^*(y) = f^*(y^*) = 0$. Тому для функціонала f^* виконуються умови 1) – 4) цього наслідку.

Достатність. Нехай для елемента (z^*, y^*) виконуються всі умови 1) – 4) цього наслідку. Тоді для нього виконуються всі умови 1) – 4) теореми 3.3.2. Тому (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1).

Наслідок 3.3.2. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) B є підпростором простору Z. Для того щоб елемент $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ був екстремальним елементом для величини (2.1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f^* \in Z^*$ такий, який задовольняє умовам :

1) $\|f^*\| = 1$;
2) $f^*(z^* - y^*) = \|z^* - y^*\|$;
3) $f^*(z_0 - z^*) = r$;
4) $f^*(y) = 0\,, y \in B$.

Доведення. Необхідність. Оскільки для кожного $y \in B$, до B – підпростір, $t > 0$ виконується умова: $ty \in B$, то підпростір є конусом з вершиною 0. Якщо (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1), то згідно з попереднім наслідком існує $f^* \in Z^*$, для якого виконуються умови 1) – 3) та $f^*(y) \le 0$ для всіх $y \in B$. Але ж для кожного y, що належить підпростору B, - y також належить B. Тоді $f^*(y) \le 0$ та $f^*(-y) = -f^*(y) \le 0$. З другої нерівності $f^*(y) \ge 0$, а внаслідок першої : $f^*(y) \le 0$. Тому $f^*(y) = 0$ для всіх $y \in B$. Отже, для f^* виконується умова 4).

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ існує $f^* \in Z^*$ такий, що має властивості 1) – 4) цього наслідку . З 4) випливає, що $\sup\limits_{y \in B} f^*(y) = 0 = f^*(y^*)$. Крім того, B є конусом з вершиною в точці 0. Згідно з наслідком 3.3.1 (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1).

Наслідок доведено.

Наслідок 3.3.3. Нехай в задачі відшукання величини (2.1) B є скінченновимірним підпростором простору Z, породженим лінійно незалежними векторами $y_1, y_2, \cdots, y_n$.

Для того щоб елемент(z^*, y^*) був екстремальним елементом для величини (2.1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існував функціонал $f^* \in Z^*$ такий , який задовольняє умовам:

1) $\|f^*\| = 1$;
2) $f^*(z^* - y^*) = \|z^* - y^*\|$;
3) $f^*(z_0 - z^*) = r$;
4) $f^*(y_j) = 0\, , j = \overline{1,n}$.

Доведення. Необхідність. Нехай $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ є екстремальним елементом для величини (2.1). Тоді існує функціонал $f^* \in Z^*$, який задовольняє умовам 1) – 4) попереднього наслідку. Згідно умови 4) наслідку 3.3.2 $f^*(y) = 0$ для всіх $y \in B$, в тому числі і для $y = y_j$, $, j = \overline{1,n}$. Тобто $f^*(y_j) = 0\, , j = \overline{1,n}$. Отже, для f^* виконуються умови 1) – 4) цього наслідку.

Необхідність доведено.

Достатність. Нехай для елемента $\left(z^*, y^*\right) \in B_r\left(z_0\right) \times B$ виконуються умови 1) – 4) наслідку, що доводиться в, в тому числі $f^*\left(y_j\right) = 0$, $j = \overline{1, n}$.

Оскільки B є скінченновимірним підпростором, породженим елементами $y_1, \cdots, y_n$, то для кожного $y \in B$ існують числа $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ такі, що

$$y = \alpha_1 y_1 + \cdots +, \alpha_n y_n$$

Звідси та з рівностей $f^*\left(y_j\right) = 0$, $j = \overline{1, n}$, одержуємо, що

$$f^*(y) = f^*(\alpha_1 y_1 + \cdots +, \alpha_n y_n) = \alpha_1 f^*(y_1) + \cdots + \alpha_n f^*(y_n) = \\ = \alpha_1 \cdot 0 + \cdots + \alpha_n \cdot 0 = 0$$

Отже $f^*(y) = 0$ для всіх $y \in B$. Тому для f^* виконуються всі умови наслідку 3.3.2.

Згідно з цим наслідком (z^*, y^*) є екстремальним елементом для величини (2.1).

Достатність доведено.

Наслідок доведено.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі « Задача відшукання відстані між замкненою кулею та опуклою множиною лінійного нормованого простору та деякі її часткові випадки»:

1. Побудовано в лінійному нормованому просторі задачу оптимізації (2.4), еквівалентну досліджуваній задачі (2.1) відшукання найкращої відстані від замкненої кулі до опуклої множини.

Встановлено зв'язок між оптимальними значеннями їхніх цільових функцій та між їхніми екстремальними елементами.

2. Встановлено зв'язок між шуканою величиною (2.1) та величиною (2.2) найкращого наближення центра кулі опуклою множиною, що фігурують у постановці задачі відшукання величини (2.1), між екстремальними послідовностями та екстремальними елементами цих величин.

3. Встановлено та доведено теореми існування екстремального елемента для величини (2.1) в загальному випадку.

4. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задач відшукання величин (2.1) та (2.2) в банаховому просторі, в якому має місце «нерівність паралелограма».

5. Доведено теореми єдиності екстремального елемента для задач (2.1), (2.2) у строго нормованому просторі.

6. Встановлено співвідношення двоїстості (3.25) для задачі відшукання величини (2.1) та задачі в спряженому просторі Z^*, яка фігурує у правій частині рівності (3.25).

7. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), оснований на співвідношенні двоїстості (3.25).

8. Конкретизовано критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) на випадок, коли множина B, що фігурує в

задачі відшукання величини (2.1) є опуклим конусом з вершиною в точці 0, підпростором, скінченновимірним підпростором простору Z.

Результати дипломної роботи можна використати при дослідженні та розв'язуванні й інших екстремальних задач, які вкладаються у схему постановки задачі (2.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

7. Ус С.А Функціональний аналіз: навч. посібник / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

8. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: – Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

9. Гудима У.В. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функцій відстані / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. - Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. – Вип. 21. – С.84-98.

10. Колмогоров А.Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А.Н. Колмогоров, С.В. Фомин. – М.: Наука, 1976. – 543 с.

11. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

12. Гудима У.В. Критерії екстремальної послідовності для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк // Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. - Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – Вип. 20. – С.13-24.

13.Шунда Н.М. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення: Навч. посібник // Н.М. Шунда, А.А. Томусяк. – К.: Вища шк., 1993. – 375 с.

14. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.

15. Кадец В.М. Курс функционального анализа: Учебное пособие для студентов механико-математического факультета / В.М. Кадец. – Х.: ХНУ имени В.Н. Каразина, 2006. – 607 с.

16. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень / У.В. Гудима // Укр. мат. журн. – 2005. – 57, №12. – С. 1601-1619.

17. Bynum W.L. Weak parallelogram lows for Banach spaces / W.L. Bynum. – Can. Math. Bull. – 1976. – 19, №3. – P. 269-275.