Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «ФОРМУВАННЯ НАВИЧОК ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ТА ПОХІДНОЇ ФУНКЦІЇ ДЛЯ РОЗВ’ЯЗУВАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ»

Виконала студентка 2 курсу, М1-М22 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Ніцевич Анастасія Олегівна

Керівник:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Ковальська Ірина Борисівна

Рецензент:
кандидат педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри математики
Сморжевський Юрій Людвігович

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП **3**

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТЬ ПОХІДНОЇ **7**

1.1. Границя функції, неперервної в деякій точці 7

1.2. Задачі, які приводять до поняття похідної 12

1.3. Означення похідної функції 15

Висновки до розділу 1 17

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ТА ПОХІДНОЇ У ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧАХ **18**

2.1. Задачі про швидкість руху 21

2.2. Задачі про швидкість електричного струму 29

2.3. Задачі на знаходження кутової швидкості 35

2.4. Задачі про потужність 39

2.5. Задачі про лінійну густину стержня, теплоємність та кінетичну енергію 45

Висновки до розділу 2 51

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ У ФІЗИЦІ **52**

Висновки до розділу 3 62

ВИСНОВКИ **63**

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ **65**

ВСТУП

Актуальність дослідження. Поняття границі функції в деякій точці є центральним в курсі математичного аналізу. Адже функція – це предмет вивчення матаналізу, а граничний перехід – основний метод дослідження функцій та операція, без якої неможливе означення таких важливих понять, як неперервність функції в точці, похідна функції в точці, інтеграл від функції на сегменті, сума функціонального ряду та інші.

Поняття границі функції, а з ним і похідної функції широко використовуються для дослідження різноманітних процесів у фізиці. Тому при вивченні цих тем дуже важливо не тільки надати абстрактні означення, але і навести конкретні приклади використання цих понять. Важливо показати цими прикладами, що кожен раз, коли розглядається зміна однієї величини в залежності від зміни іншої, яка наближається до деякого свого значення, застосовується поняття границі, а з ним і похідної, як характеристики швидкості зміни величини.

Головна мета при викладанні цих тем – не тільки навчити студентів автоматично шукати границі чи диференціювати функції, а і виробити навички застосування цих понять для розв’язування фізичних задач.

Проблемою використання похідної та границі при розв’язуванні фізичних задач займалися педагоги-математики, такі як І. Б. Ковальська, О. І. Радзієвська, І. С. Дереза, Л. Д. Соколенко, В. І. Швець та інші, всі вони дотримуються думки, що дана тема має велике значення у дослідженні процесів та явищ у фізиці.

Вище сказане зумовило вибір теми кваліфікаційної роботи: «Формування навичок застосування поняття границі та похідної для розв’язування фізичних задач».

Мета: Розглянути систему прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань у фізиці, звернути увагу на ті типи задач, яким приділено недостатньо уваги та методику навчання учнів їх розв’язування.

Для досягнення визначеної мети ми ставили перед собою ряд конкретних **завдань:**

1. Аналіз поняття похідної:
   - Розгляд та узагальнення поняття похідної з математики.
   - Визначення основних властивостей та геометричних тлумачень похідної.
2. Вивчення фізичних застосувань:
   - Розгляд та аналіз фізичних величин, які можна моделювати за допомогою похідної.
   - Вивчення фізичних законів та процесів, де використання похідної є обґрунтованим.
3. Дослідження методик вивчення:
   - Аналіз різних підходів та методик викладання похідної в контексті фізики.
   - Визначення ефективних методів, спрямованих на краще розуміння та застосування похідної у фізичних завданнях.
4. Практичне застосування:
   - Вирішення конкретних фізичних задач за допомогою математичних методів, зокрема використовуючи похідні.
5. Підготовка висновків:
   - Формулювання висновків, які визначають важливість та перспективи використання похідної у фізичних дослідженнях.

Об'єкт дослідження: Математичні концепції, зокрема поняття похідної, та їх застосування у фізичних задачах.

Предмет дослідження: Взаємодія та взаємозв'язок між математичними методами, зокрема вивченням похідної, та їх застосуванням у фізичних процесах та моделях.

Для розв’язання поставлених у дослідженні завдань використано комплекс взаємопов’язаних **методів дослідження**, який включав в себе:

1. Теоретичний аналіз:

Ретельний огляд математичних понять, зокрема похідної, з метою встановлення їх основних властивостей.

2. Фізичний аспект:

Вивчення фізичних процесів та величин, що можуть бути описані за допомогою похідних, і визначення їх фізичного змісту.

3. Методика вивчення:

Аналіз різних методик та підходів викладання похідної в контексті фізики, враховуючи особливості різних навчальних програм та підручників.

4. Моделювання:

Вирішення конкретних фізичних задач математичними методами, включаючи використання похідних для побудови моделей реальних явищ.

5. Логіко-математичний аналіз:

Ретельний розбір та аналіз математичного матеріалу, визначення логічної послідовності та методів викладання.

6. Загальні висновки:

Зібрання та узагальнення отриманих результатів для сформулювання загальних висновків щодо важливості та перспектив використання похідної у фізичних дослідженнях.

Апробація результатів дослідження. Результати даного дослідження були апробовані та представлені у вигляді статті, опублікованої у віснику. Стаття отримала назву "Формування навичок застосування поняття границі та похідної функції для розв'язування фізичних задач". У цій статті висвітлено основні результати дослідження та їхній внесок у розвиток методів вивчення математичних концепцій у контексті фізичних дисциплін.

Стаття розглядає методи формування навичок використання понять границі та похідної в контексті розв'язування фізичних завдань. Результати дослідження вказують на ефективність використання конкретних методик вивчення математики в рамках фізичного курсу, сприяючи кращому розумінню та застосуванню вивчених концепцій.

Отримані **результати дослідження** мають практичне значення в контексті навчання та викладання фізики та математики. Деякі з можливих практичних використань включають:

1. Покращення розуміння фізичних явищ: Застосування математичних концепцій, зокрема границь та похідних, дозволяє студентам глибше розуміти фізичні явища та взаємозв'язки між математикою та фізикою. Це може підвищити рівень абстракції та аналізу студентів у вирішенні реальних проблем.

2. Підготовка до наукових досліджень: Отримані результати можуть послугувати підґрунтям для подальших наукових досліджень у галузі методик вивчення математики та фізики. Вони можуть бути використані як основа для розвитку нових педагогічних стратегій та методологій.

3. Підготовка студентів до використання математики у професійній діяльності: Знання математичних концепцій та їх застосування в різних фізичних сценаріях може виявитися корисним для студентів при подальшій кар'єрі у сферах, пов'язаних із фізикою, інженерією, технологіями тощо.

Отже, результати цього дослідження відкривають шлях для покращення методів навчання та розкривають нові можливості для інтеграції математичних та фізичних знань у навчальному процесі.

Структура та обсяг роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків до розділів, загальних висновків і списку використаних джерел. Зміст кваліфікаційної роботи викладено на 62 сторінках. Повний обсяг роботи – 68 сторінок.

РОЗДІЛ 1. ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ. ЗАДАЧІ, ЩО ПРИВОДЯТЬ ДО ПОНЯТЬ ПОХІДНОЇ.

1.1. Границя функції, неперервної в деякій точці

Розглянемо деяку функцію $y = f(x)$ і виберемо довільне значення аргументу $x = x_0$. Далі потрібно задати деяке число $\delta > 0$, щоб утворити окіл точки $x = x_0$: $\delta(x_0) = (x_0 - \delta; x_0 + \delta)$. Нам потрібно це для того, щоб вибирати значення аргументу, поступово наближатись до точки $x = x_0$, слідкуючи при цьому за поведінкою функції.

Нехай значення аргументу наблизилось до точки $x = x_0$, якщо спочатку воно не належало цьому околу, а потім потрапило в нього. Щоб описати необмежене наближення значення аргументу до точки $x = x_0$, потрібно зменшувати значення $\delta > 0$.

Розглянемо, що в цей час відбувається з функцією. Нехай границя в точці $x = x_0$ існує. Тоді, якщо аргумент x прямує до x_0, то значення функції $y = f(x)$ буде прямувати до деякого числа c, яке і буде границею.

Щоб описати поведінку функції знову оберемо деяке число $\varepsilon > 0$ і побудуємо окіл точки c: $(c - \varepsilon; c + \varepsilon)$. Тоді скажемо, значення функції наблизилось до числа c, якщо воно спочатку не належало цьому околу, а потім зі зміною аргументу потрапило в цей окіл. Щоб уникнути випадків, коли значення функції виходить за межі ε-околу точки c, то якщо ми знаходимось в межах достатньо малого $\delta(x_0)$, означає, що значення функції гарантовано потраплять в деякий окіл $\varepsilon(c)$. Тоді число c буде вважатися границею функції $y = f(x)$. Зрозуміло, що числа ε та δ мають бути пов'язані між собою.

Отже, щоб означити поняття границі задаємо ε-окіл точки c і кажемо, що це число є границею даної функції в точці $x = x_0$, якщо для будь-якого довільного ε-околу точки c існує δ-окіл точки $x = x_0$, який залежить від ε, такий, що при знаходженні аргументу всередині околу $\delta(x_0)$, то значення функції опиниться в середині околу $\varepsilon(c)$. За допомогою формули це записують так:

$$c = \lim_{x \to x_0} f(x) \iff \forall \varepsilon(c)\ \exists \delta(x_0) \colon \forall x \in D(f),\ \ x \in \delta(x_0), f(x) \in \varepsilon(c).$$[15]

Ще визначення границі подають таким чином: Число А називається границею функції $f\ (x)$ при $x \to$ a, якщо для будь-якого як завгодно малого числа $\varepsilon >$0 можна знайти таке число $\delta(\varepsilon) > 0$, що $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x - a| < \delta$.

Якщо число А границя функції $f(x)$ при $x \to a$, то:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A.$$

Аналогічно $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = A$, якщо $|f(x) - A| < \varepsilon$ при $|x| > N$.

Записують $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, якщо $f(x) > M$ при $|x - a| < \delta$, де M – довільне число.

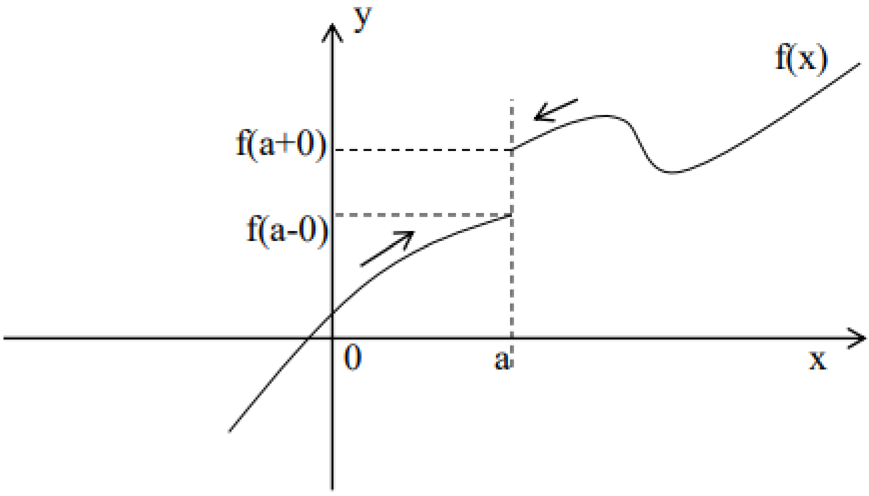
У такому разі функція $f(x)$ називається ***нескінченно великою*** при $x \to a$.

Якщо $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, то функція $f(x)$ називається ***нескінченно малою*** при $x \to a$.

Якщо $x < a$ та $x \to a$, то пишуть так: $x \to a - 0$; якщо $x > a$ та $x \to a$, то записують: $x \to a + 0$. [9]

Числа $f(a - 0) = \lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ та $f(a + 0) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ називаються ***однобічними границями функції*** $f(x)$ у точці a (рис.1). Для існування границі функції $f(x)$ при $x \to a$ необхідно і достатньо, щоб $f(a - 0) = f(a + 0)$.[2]

Рис.1.1 Однобічні границі



Для обчислення границь функції застосовуються наступні теореми. Якщо існують $\lim_{x\to a} f(x)$ та $\lim_{x\to a} g(x)$, то

1. $\lim_{x\to a} C = C$, де $C = const$;
2. $\lim_{x\to a} Cf(x) = C\lim_{x\to a} f(x)$, де $C = const$;
3. $\lim_{x\to a}[f(x) \pm g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \pm \lim_{x\to a} g(x)$;
4. $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$;
5. $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}$, де $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$.[9]

Використовуються також наступні границі:

1. $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$ ***(перша визначна границя)***;
2. $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$ ***(друга визначна границя)***.[2]

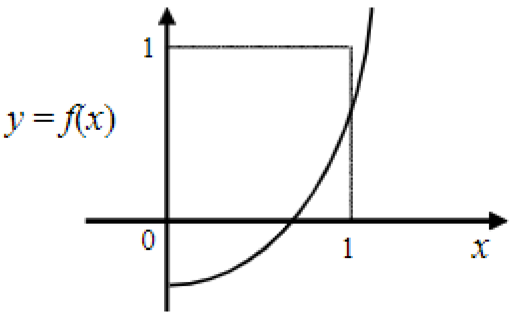


Рис. 1.2 Графік функції $f(x) = x^3$

Для прикладу розглянемо функцію $f(x) = x^3$, $x \geq 0$ (рис. 1.2).[39] Будемо, поступово наближаючись до значення x=1, слідкувати за зміною функції.

x	1,	1,	1,	1,	1,	1,0	1,	1,	1

	5	2	1	05	02
$f(x)$	3,375	1,789	1,331	1,158	1,061

Таблиця 1.1. Значення аргументу і функції при наближені справа

Як видно, чим ближче ми підходимо до значення x=1, тим з більшою точністю функція стає рівною 1 – функція прямує до цього значення. Якщо наближатися до числа x=1 з боку менших значень, то функція все одно буде прямувати до одиниці.

x	0,5	0,9	0,95	0,995	0,9995	1
$f(x)$	0,125	0,729	0,857	0,985	0,998	1

Таблиця 1.2. Значення аргументу і функції при наближені зліва

У цьому прикладі не мало значення, з якого боку підходити до розглядуваної точки x=1. В даному прикладі можна записати $\lim_{x \to 1} x^3 = 1$.[2]

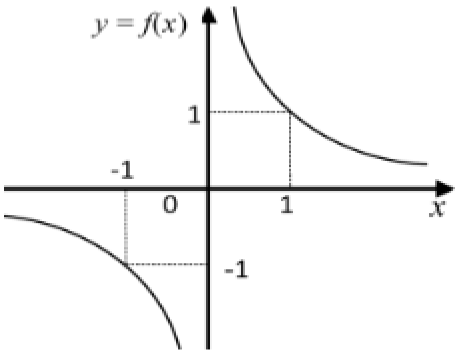


Рис. 1.3 Графік функції $f(x) = \frac{1}{x^3}$

Тепер розглянемо функцію $f(x) = \frac{1}{x^3}$ (рис. 1.3). Спочатку будемо наближатися до точки x=0 від точки x=1.

x	1	0,5	0,1	0,05	0,001
$f(x)$	1	8	1000	8000	1000000

Таблиця 1.3. Значення аргументу і функції при прямуванні справа

Легко бачити, що при наближенні до нуля значення функції продовжують необмежено зростати. Далі будемо наближатися до точки $x = 0$ від точки $x = -1$.

x	-1	-0,5	-0,1	-0,05	-0.001
$f(x)$	-1	-8	-1000	-8000	-1000000

Таблиця 1.4. Значення аргументу і функції при прямуванні зліва

Тепер чим ближче підходимо до значення $x = 0$, тим менше значення набуває $f(x)$. Це зменшення значень функції знову нічим не обмежене.

Отже, якщо наближаючись до однієї й тієї ж точки з різних сторін, отримуємо різні значення границь. Такі границі називаються односторонніми. Звичайної границі в такому випадку не існує. Коли ж вона існує, то обидві односторонні границі рівні – це ми бачили в першому прикладі.

У другому прикладі обидві односторонні границі будуть нескінченні, причому із різними знаками. Це записують так:

$$\lim_{x\to 0+}\frac{1}{x^3}=+\infty,\ \lim_{x\to 0-}\frac{1}{x^3}=-\infty,$$

І тому кажуть, що в точці $x=0$ функція $\frac{1}{x^3}$ має розрив II роду. Запис «$x\to 0+$» означає, що ми наближаємось до точки $x=0$ справа – отримуємо правосторонню границю функції $\frac{1}{x^3}$. Аналогічно «$x\to 0-$» – означає, що ми наближаємось до значення $x=0$ зліва і отримуємо лівосторонню границю функції.

Можна розглянути необмежене збільшення аргумента – формально це записується «$x\to +\infty$».

x	1	2	5	10	50
$f(x)$	1	0,125	0,008	0,001	0,00008

Таблиця 1.5. Збільшення аргументу

Видно, що функція прямує до нуля: $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{x^3}=0$. Аналогічно переконуємося, що таку ж границю функція має при необмеженому зменшенні аргумента: $\lim_{x\to -\infty}\frac{1}{x^3}=0$.

1.2. Задачі, які приводять до поняття похідної

До поняття похідної приводять різні задачі. Розглянемо деякі з них.

Розпочнемо з задачі про дотичну до кривої. [2] Нехай нам заданий графік деякої функції $y = f(x)$. Оберемо на ньому точку з координатами $M(a; f(a))$. Припустимо, що в цій точці існує дотична до даного графіка. Нам потрібно знайти кутовий коефіцієнт дотичної.

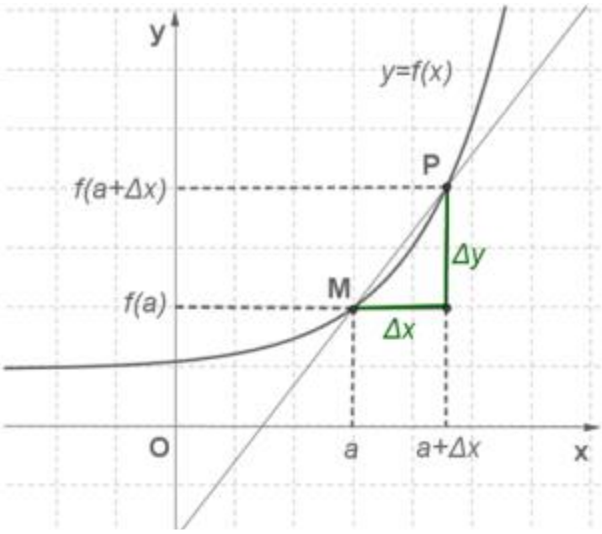


Рис. 1.4 Графік деякої функції

Дамо аргументу приріст Δx і розглянемо на графіку точку P з абсцисою $a + \Delta x$. Ордината точки P дорівнює $f(a + \Delta x)$, при чому $f(a + \Delta x) - f(a) = \Delta y$. Кутовий коефіцієнт січної MP, тобто тангенс кута між січною і віссю x, обчислюється за формулою $k = \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Якщо ми тепер спрямуємо Δx до нуля, тоді точка P почне наближатися по кривій до точки M. Дотичну ми охарактеризували, як граничне положення січної при цьому наближенні. Отже, можна вважати, що кутовий коефіцієнт дотичної буде обчислюватися за формулою $K = \lim_{\Delta x \to 0} k$. Використовуючи наведену вище формулу для K, отримуємо:

$$K = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Наступною розглянемо задачу на знаходження швидкості руху.[16] По прямій, на якій задані початок відліку, одиниця виміру (метр) і напрям, рухається деяке тіло (матеріальна точка). Закон руху задане формулою $s = s(t)$, де t – час (у секундах), $s(t)$ – положення тіла на прямій (координата рухомої матеріальної точки) в момент часу t по відношенню до початку відліку (в метрах). Знайти швидкість руху тіла в момент часу t (в *м*/*с*).

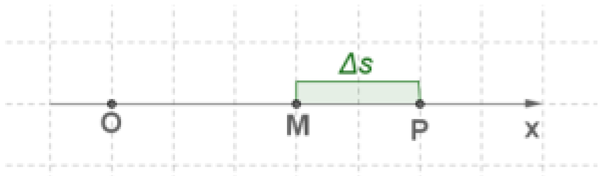


Рис. 1.5 Рух матеріальної точки

Припустимо, що в момент часу t тіло перебувало в точці M. Дамо аргументу t приріст Δt і розглянемо ситуацію в момент часу $t+\Delta t$. Координата матеріальної точки стане іншою, тіло в цей момент буде знаходитися в точці P: $OP = s(t+\Delta t)$.

Отже, за Δt секунд тіло перемістилося з точки M в точку P. Маємо: $MP = OP - OM = s(t+\Delta t) - s(t)$. Отриману різницю ми назвали приростом функції: $s(t+\Delta t) - s(t) = \Delta s$. Тож, $MP = \Delta s$(м). Неважко знайти середню швидкість $v_{\text{ср}}$ руху тіла за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$: $v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t}$ (м/с).

А що таке швидкість $v(t)$ в момент часу t (її називають миттєвою швидкістю)? Можна сказати так: це середня швидкість руху за проміжок часу $[t; t+\Delta t]$ за умови, що Δt обирається все менше і менше; точніше: за умови, що $\Delta t \to 0$. Це означає, що

$$v(t) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}}.$$

Отже, $v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$.

Також розглянемо задачу про лінійну густину розподілу маси стержня.[23] Є прямолінійний стержень, маса якого розподілена нерівномірно вздовж його осі (рис. 1.6). Відома функція розподілу маси в залежності від віддалі x від одного з кінців стержня, тобто $m = m(x)$. Треба знайти лінійну густину розподілу маси на відстані x від одного з кінців стержня.

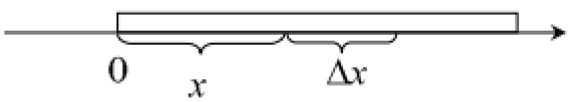


Рис. 1.6 Прямолінійний стержень

Візьмемо відрізок стержня довжини Δx, маса якого

$$\Delta m = m(x+\Delta x) - m(x).$$

Середня лінійна густина розподілу маси для цього відрізка дорівнює

$$\mu_{\text{ср}} = \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Тоді лінійна густина розподілу маси на відстані x дорівнює

$$\mu_{\text{ср}} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x}.$$

Останньою розглянемо задачу про продуктивність праці. [22] Нехай кількість виробленої продукції характеризується рівністю $Q = Q(t)$ за час t. Потрібно знайти продуктивність q праці у момент часу t_0.

У момент часу t_0 кількість виробленої продукції дорівнює $Q_0 = Q(t_0)$. У момент часу $(t_0 + \Delta t)$ кількість виробленої продукції дорівнює $Q_0 + \Delta Q = Q(t_0 + \Delta t)$. Тоді за проміжок часу Δt середня продуктивність праці визначається формулою $q_{\text{сер}} = \frac{\Delta Q}{\Delta t}$. Якщо $\Delta t \to 0$, то середня продуктивність праці краще характеризує продуктивність праці у момент часу t_0 - це границя середньої продуктивності праці за період часу від t_0 до $(t_0 + \Delta t)$, коли $\Delta t \to 0$, тобто

$$q = \lim_{\Delta t \to 0} q_{\text{сер}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta t}$$

Якщо у розглянутих задачах відволіктися від конкретних величин, то розв’язування кожної з них веде до знаходження границі відношення приросту функції до приросту незалежної змінної, коли останній прямує до нуля.

1.3. Означення похідної функції

Розглянемо функцію $y = f(x)$, яка визначена на деякому проміжку та її графік.

На графіку функції зафіксуємо точку $M_0(x_0;\, y_0)$ та візьмемо точку $M(x;\, y)$. Аргумент x_0 отримало приріст Δx, тобто $x_0 + \Delta x = x$. Значення функції – приріст Δy, тобто $y_0 + \Delta y = y$. Складемо відношення $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, яке показує, в скільки разів на проміжку $[x_0; x]$ приріст функції Δy більше ніж приріст аргументу Δx, тобто визначає середню швидкість зміни значення функції y відносно зміни аргументу x .

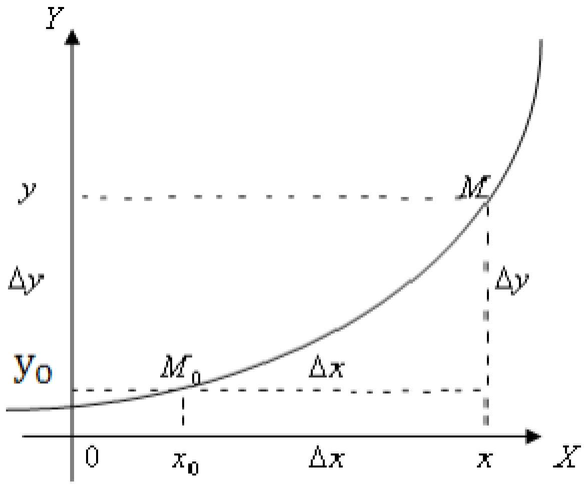


Рис. 1.7 Графік функції

При $M \to M_0, x \to x_0$ і $\Delta x \to 0$. Тому вираз $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ також прямує до деякої величини, яка визначається виразом $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ та показує швидкість зміни функції у точці x_0.

Якщо

$$y = f(x), x = x_0 + \Delta x, \Delta y = y - y_0,$$

$$\Delta y = \Delta f(x) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0),$$

то

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Якщо існує ця границя, то її називають похідної функції у точці x_0 і позначають $f'(x_0)$, $y'(x_0)$, $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$, Dy, $Df(x_0)$.[4]

Похідною функції $y = f(x)$ в точці x_0 називають границю відношення приросту цієї функції до приросту аргументу Δx, коли приріст аргументу прямує до нуля. [4]

Отже, за означенням

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

Відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

називають ***диференціальним відношенням***.

У випадку, коли границя відношення при $\Delta x \to 0$ не існує, вважатимемо, що функція в точці x_0 не має похідної.

Якщо функція $y = f(x)$ має похідну в кожній точці $x \in X$, то цю похідну позначатимемо y' або $f'(x)$. [5]

Отже, якщо x_0 – фіксована точка проміжку X, то похідна $f'(x_0)$ у разі її існування – деяке число. Якщо ж похідна існує в кожній точці $x \in X$, то $f'(x)$ – уже функція від x.

Зауваження. Зрозуміло, що границя існує не для будь-якої функції і не для кожної точки x_0. Наприклад, для функції $y = |x|$ у точці $x_0 = 0$ границя не існує, оскільки диференціальне відношення

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \Delta x > 0 \\ -1, & \text{якщо } \Delta x < 0 \end{cases}.$$

Функцією $y = f(x)$, яка має похідну в точці x_0, називають ***диференційованою в точці*** x_0. Функцію, диференційовану в кожній точці $x \in X$, називають ***диференційованою на проміжку*** X. [5]

Операцію відшукання похідної називають ***диференціюванням***.

Висновки до розділу 1

У цьому розділі ми вивчали ключові концепції, пов'язані з аналізом функцій. Розглянувши поняття границі функції, ми зрозуміли, як функція може наближатися до певного значення при наближенні аргументу до певної точки. Це дозволяє нам формалізувати ідею неперервності в конкретних математичних термінах.

Далі ми розглядали концепцію неперервності в точці. Вивчення цього поняття дозволяє нам аналізувати властивості функцій в околі конкретних точок і визначати їхню поведінку в цих точках.

Задачі, які ми розглядали, призвели до виникнення ідеї похідної. Поняття похідної дозволяє нам виміряти, наскільки швидко змінюється функція в кожній точці. Це важливий інструмент для аналізу різних явищ у математиці та фізиці.

В цьому розділі ми ознайомились із загальними принципами, які дозволяють розуміти, як функції змінюються та взаємодіють в різних точках. Введення понять границі, неперервності та похідної є важливим кроком у нашому математичному розумінні і відіграє вирішальну роль у подальших розділах нашого дослідження.

РОЗДІЛ 2. ЗАСТОСУВАННЯ ПОНЯТТЯ ГРАНИЦІ ТА ПОХІДНОЇ У ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧАХ

Похідна – це не лише математичне поняття, але і важливий інструмент, що глибоко проникає в основи різних наук. У фізиці, математиці та багатьох інших галузях вона виступає як невід'ємна частина аналізу та моделювання різних процесів.

Розглянемо математичний контекст:

1. Засіб аналізу функцій:
   - Похідна є засобом розкриття та розуміння властивостей функцій. Вона дозволяє визначити, як змінюється функція при маленьких змінах її аргументів.
2. Оптимізація та екстремуми:
   - В математичній оптимізації використання похідних дозволяє знаходити екстремуми функцій, що має велике застосування в економіці, інженерії та інших галузях.

А тепер фізичний контекст:

1. Динаміка та рух:
   - У фізиці похідні з'являються при дослідженні руху тіл, де швидкість та прискорення представлені похідними відносно часу.
2. Теплові та енергетичні процеси:
   - В контексті теплових процесів похідні визначають теплоємність та інші важливі параметри.

Розглянемо ширше значення похідної у науці:

1. Наукові Дослідження:
   - В біології похідні використовуються для моделювання популяцій та аналізу динаміки систем.
2. Економічний аналіз:
   - У економіці вони грають роль в оцінці змін ринкових та виробничих процесів.

Важливість вивчення похідних:

1. Прогнозування та моделювання:
   - Розуміння похідних надає інструмент для прогнозування змін та моделювання складних систем.
2. Глибше розуміння:
   - Аналіз похідних дозволяє глибше розуміти внутрішні закономірності та взаємозв'язки у різних наукових дисциплінах.

Отже, похідна – це важливий інструмент, який не лише полегшує математичний аналіз, а й стає основою для розуміння та моделювання складних явищ у фізиці, економіці, біології та інших галузях. Вивчення її властивостей розкриває широкий спектр можливостей для дослідження та розв'язання реальних проблем.

Узагальнюючи поняття похідної можна сказати, що в механіці та інших розділах фізики фізичний зміст похідної такий: похідна описує швидкість зміни якоїсь фізичної величини. Наприклад, якщо фізична величина описується деякою функцією від часу $f(t)$, то похідною є величина чи математична залежність, яка характеризує зміну цієї величини з часом (швидкість зміни), тобто $f'(t)$ - швидкість зміни фізичної величини, а $f'(t_1)$ в момент часу t_1- миттєва швидкість зміни фізичної величини в момент часу t_1.

Наведемо приклади фізичних величин, які є похідними від інших величин:

1. Похідною від шляху (або координати) по часу є швидкість, тобто

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} \text{ або для координати: } v = x'(t) = \frac{dx}{dt} \text{ [1]}$$

2. Сила електричного струму визначається за формулою $I = \frac{q}{t}$, тобто є швидкістю зміни електричного заряду, який проходить через поперечний переріз провідника. Тому похідною від величини електричного заряду по часу є значення сили електричного струму, тобто

$$I = q'(t) = \frac{dq}{dt}.$$

3. Кутова швидкість – це швидкість зміни величини кута повороту радіус-вектора тіла: $\omega = \frac{\varphi}{t}$. Тому похідною від величини кута повороту радіус-вектора по часу є кутова швидкість:

$$\omega = \varphi'(t) = \frac{d\varphi}{dt}.$$

4. Потужність – це величина, яка характеризує швидкість виконання роботи $P = \frac{A}{t}$. Тому похідною від виконаної силою роботи по часу є потужність:

$$P = A'(t) = \frac{dA}{dt}.$$

5. Прискорення – це векторна фізична величина, похідна швидкості по часу і за величиною дорівнює зміні швидкості тіла за одиницю часу:

$$a(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t} = v'(t).$$

6. Лінійна густина стержня – це фізична величина, що дорівнює відношенню маси тіла $\Delta m = m(l + \Delta l) - m(l)$ до його довжини Δl:

$$\rho = \lim_{\Delta l \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta l} = m'(l).$$

7. Теплоємність – визначає, як швидко змінюється внутрішня енергія речовини зі зміною температури. [1]

8. Кінетична енергія – швидкість, з якою робиться робота над тілом або витрачається його енергія.

Таким чином, щоб знайти швидкість зміни деякої фізичної величини слід знайти похідну рівняння, яке описує функціональну залежність цієї фізичної величини від часу, по часу.

2.1. Задачі про швидкість руху

Уявимо собі, що гоночний автомобіль рухається прямолінійно і нерівномірно по прямій і перетинає фінішну лінію (рис. 2.1). Після перетину фінішної лінії автомобіль не зупиняється відразу, а проїжджає ще деяку відстань. Оскільки рух автомобіля нерівномірний, то його швидкість у кожному положенні різна. Уявимо собі, що нам потрібно знайти швидкість автомобіля у момент перетину ним фінішної лінії, в точці A – миттєву швидкість в момент часу t $-\vec{v}_{м}(t)$.[3]

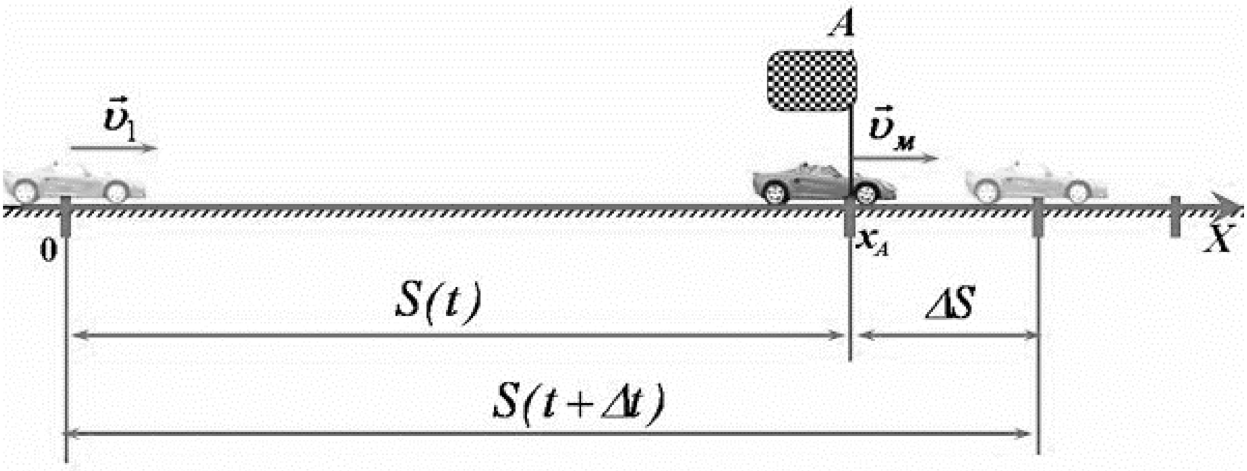


Рис. 2.1 Рух автомобіля

Знаючи час руху автомобіля t та шлях $s(t)$, пройдений ним за цей час, ми можемо розрахувати *середню швидкість* автомобіля на деякій ділянці шляху, наприклад, на фінішній прямій (див рис. 2.1). Але момент часу – це лише мить, яким же чином нам знайти швидкість автомобіля, якщо в цю мить автомобіль знаходиться в конкретному положенні з координатою x_A, і не здійснює жодних переміщень?

В цьому випадку використовують такий прийом. Розглянемо переміщення автомобіля за час t та за час $t + \Delta t$, де Δt – дуже малий проміжок часу. Знайдемо шлях пройдений автомобілем за час $\Delta t - \Delta s$, як різницю шляхів: шляху, який проїхав автомобіль за час $t + \Delta t - s(t + \Delta t)$ та шляху, який проїхав автомобіль за час $t - s(t)$:

$$\Delta s(t) = s(t + \Delta t) - s(t)$$

Потім знайдемо середню швидкість автомобіля на ділянці шляху Δs:

$$v_{\text{ср}} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t + \Delta t)}{\Delta t} \quad (1)$$

Оскільки швидкість автомобіля не може змінюватись стрибкоподібно (швидкість змінюється стрибком лише у випадку вибуху чи удару), то при дуже малих значеннях Δt швидкість тіла на ділянці шляху Δs суттєво не зміниться. Тому можемо вважати, що середня швидкість на ділянці Δs наближено рівна миттєвій швидкості в точці A: $v_{\text{ср}} \to v_{\text{м}}$. Отже, середня швидкість залежить від часу Δt , чим менший проміжок часу Δt після моменту часу t ми візьмемо, тим точніше середня швидкість наближатиметься до миттєвої у момент часу t . Будемо зменшувати проміжок часу Δt таким чином, щоб $\Delta t \to 0$, в цьому випадку можна вважати, що середня швидкість дорівнюватиме миттєвій.

Тобто при різних Δt середня швидкість $v_{\text{ср}}$ набуватиме різних значень, але всі ці значення наближатимуться (будуть дуже близькими за величиною) до величини миттєвої швидкості в точці $A - v_{\text{м}}$. З точки зору математики цей висновок записується так:

$$v_{\text{м}} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{\text{ср}} \quad (2)$$

З урахуванням (1) формулу (2) можна переписати ще й так:

$$v_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t + \Delta t) - s(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (3)$$

Вираз (3) слід читати і розуміти так: миттєва швидкість тіла в момент часу t - це межа (граничне значення), до якої прямує середня швидкість цього тіла на малому проміжку часу Δt, який минув відразу після моменту часу t.

У математиці, величини, які входять у вираз (3) називають так:

Δt - приріст часу;

Δs - приріст шляху (шлях пройдений тілом за приріст часу);

$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$ - похідна від приросту шляху по часу.

Для наочності розглянемо кілька задач.

Задача 1: Знайдемо, наприклад, швидкість тіла, яке рухається таким чином, що рівняння шляху від часу для нього має вигляд $s(t) = 5t$.[3]

Розв'язання:

За означенням швидкості, у зазначеному рівнянні коефіцієнт «5» і є швидкістю тіла, яка вимірюється в одиницях СІ. Доведемо це, знайшовши похідну від рівняння $s = f(t)$ по часу:

1) Надамо часу деякого приросту Δt, $\Delta t \to 0$, тоді $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$

2) Знайдемо відношення: $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши замість :

$s(t) = 5t$ та $s(t + \Delta t) = 5 \cdot (t + \Delta t)$:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5(t + \Delta t) - 5t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5t + 5\Delta t - 5t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{5\Delta t}{t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} 5 = 5$$

Отже, швидкість тіла дорівнює 5 м/с.

Відповідь: 5 м/с

Задача 2. Прямою рухаються дві матеріальні точки за законами: $s_1(t) = 6t^2 - 3$ і $s_2(t) = t^3$. У якому проміжку часу швидкість першої точки більша від швидкості другої точки?[3]

Розв'язання:

Враховуючи те, що швидкість є похідною від шляху, маємо такі залежності:

$$v_1(t) = s_1'(t) = (6t^2 - 3)' = 12t$$

$$v_2(t) = x_2'(t) = (t^3)' = 3t^2$$

За умовою $v_1 > v_2$ тобто

$$12t > 3t^2;$$

$$12t - 3t^2 > 0;$$

$$3t(t - 4) < 0.$$

Розв'язком цієї нерівності є інтервал $t \epsilon (0; 4)$.

Відповідь: у проміжку часу від 0 до 4с швидкість першої точки буде більша за швидкість другої точки.[1]

Задача 3. Юнак пливе зі швидкістю в два рази меншою, ніж швидкість течії річки. Під яким кутом до другого берега він має пливти, щоб його знесло течією якомога менше. На яку відстань S_{min} його знесе, якщо ширина річки 200м.[18]

Розв'язання:

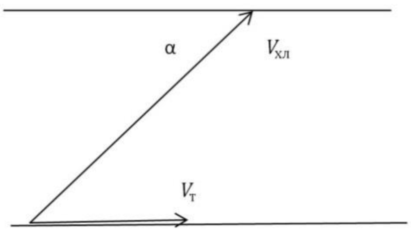


Рис. 2.2 Рух юнака

Горизонтальний рух хлопчика можна записати як $x = V_т t$, вертикальний як $y = V_y t = V_{хл} t \sin\alpha$

Час, витрачений на те, щоб переплести річку виразимо як $t = \frac{h}{V_{хл}\sin\alpha}$.

Тоді горизонтальне зміщення хлопчика буде $S = \frac{hV_т}{V_{хл}\sin\alpha}$

Так як швидкість течії за умовою задачі в 2 рази більше, ніж швидкість хлопчика, то остаточно маємо $S = \frac{2h}{\sin\alpha}$ – це функція залежності зміщення від кута, під яким рухався хлопець. Знайдемо похідну

$$S' = -\frac{2h\cos\alpha}{(\sin\alpha)^2}$$

S′(α)=0 при $\cos\alpha = 0$, тобто при $\alpha = \frac{\pi}{2}$. При α=0 похідна не існує.

Функція спадає на проміжку α∈($-\frac{\pi}{2}$; 0) і при α∈(0; $\frac{\pi}{2}$)

Тож мінімальне значення буде при куті 90^0, воно складає S= $\frac{2\cdot200}{\sin 90}$ = 400м.

Відповідь: α=90^0, хлопця знесе течією на 400м.

Задача 4. Знайдемо швидкість тіла, яке рухається таким чином, що рівняння шляху від часу має вигляд $s(t) = 2t^2$ в момент часу $t = 10c$.[18]

Розв'язання:

1) Надамо часу деякого приросту $\Delta t, \Delta t \to 0$, тоді $\Delta s = s(t + \Delta t) - s(t)$.

2) Знайдемо відношення $\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{s(t+\Delta t)-s(t)}{\Delta t}$.

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши замість $s(t) = 2t^2$ та $s(t+\Delta t) = 2(t+\Delta t)^2 = 2(t^2 + 2t\Delta t + \Delta t^2) = 2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2$:

$$v = s'(t) = \frac{ds}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2t^2 + 4t\Delta t + 2\Delta t^2 - 2t^2}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{4t\Delta t + 2\Delta t^2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} (4t + 2\Delta t) = 4t,$$

оскільки $\Delta t \to 0$, то і $2\Delta t \to 0$. Це означає, якщо шлях тіла змінюється за законом $s(t) = 2t^2$, то швидкість цього ж тіла буде змінюватися за законом $v(t) = 4t$.

Тоді швидкість тіла в момент часу $t = 10c$ буде рівна $v(10) = 4 \cdot 10 = 40$*(м/с)*.

Відповідь: 40 *м/с*.

Задача 5: Точка рухається прямолінійно за законом $s(t) = 6t + t^2$ (м).

Знайти момент часу, коли швидкість точки буде дорівнювати 10 м/с.[1]

Розв`язання:

Враховуючи те, що швидкість є похідною від шляху, маємо таку залежність:

$$v(t) = s'(t) = (6t + t^2)' = 6 + 2t$$

Тепер, щоб знайти t, в якому швидкість дорівнює 10 м/с, прирівняємо отриманий вираз до 10:

$$6 + 2t = 10;$$

$$2t = 4;$$

$$t = 2.$$

Відповідь: Швидкість дорівнює 10 м/с у момент часу $t = 2$с.

Задача 6: Точка рухається прямолінійно за законом $s = t^4 - t^3 + 2t - 2$ де t виражається в секундах, а s – у сантиметрах. Знайти швидкість руху вкінці першої та третьої секунд.[1]

Розв'язання:

Закон швидкості руху знаходимо диференціюючи відстань

$$v = \frac{ds}{dt} = (t^4 - t^3 + 2t - 2)' = 4t^3 - 3t^2 + 2.$$

Для знаходження швидкості в певний момент часу підставляємо його значення. За умовами задачі отримаємо:

$$v(1) = 4 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1 = 3 \text{ м/с};$$

$$v(3) = 4 \cdot 3^3 - 3 \cdot 3^2 + 2 = 83 \text{ м/с}.$$

Шукані значення рівні 3 см/с та 83 см/с.

Відповідь: 3 см/с та 83 см/с.

Задача 7: Швидкість v тіла, що рухається у вертикальному напрямку, змінюється за законом $v = 9 - 10t$ м/с. Визначити швидкість тіла в момент приземлення, якщо воно в початковий момент знаходилось на висоті 2 м від землі. [19]

Розв’язання:

1) Знайдемо прискорення тіла, що рухається за даним законом:

$$a = v'(t) = -10(\text{ м/с}^2);$$

Оскільки прискорення стале, то тіло рухається за квадратичним законом:

$$h = \frac{at^2}{2} + v_0 t + h_0.$$

2) $v_0 = v(0) = 9$ (м/с)

3) Підставимо у формулу а та v_0:

$$h = \frac{-10t^2}{2} + 9t + 2 = -5t^2 + 9t + 2.$$

Розв’яжемо квадратне рівняння:

$$-5t^2 + 9t + 2 = 0;$$

$$D = 9^2 - 4 \cdot (-5) \cdot 2 = 81 + 40 = 121, \sqrt{D} = 11;$$

$$t_1 = \frac{-9 - 11}{2 \cdot (-5)} = \frac{-20}{-10} = 2, t_2 = \frac{-9 + 11}{2 \cdot (-5)} = \frac{2}{-10} = -\frac{1}{5}$$

Так як час не може бути від’ємним, ми розглядаємо лише t_1.

Отже, розв’язавши квадратне рівняння, одержимо час приземлення тіла $t = 2$ с тому швидкість в момент приземлення дорівнює:

$$v = 9 - 10 \cdot 2 = -11 \text{ (м/с)}.$$

Відповідь: $v = -11$ (м/с).

Задача 8: Припустимо, що положення тіла визначається за формулою $\vec{S}(t) = 5 + 3t - 2t^2$ (t – час). Знайти переміщення і середню швидкість за інтервали часу $[0; 1], [2; 4]$. [1]

Розв'язання:

1. Запишемо схематично:

Переміщення = [Кінцеве положення] – [Початкове положення] → $\vec{S}(1) - \vec{S}(0) = 6 - 5 = 1(\text{м})$; $|V_c| = \frac{\vec{S}(1)-\vec{S}(0)}{1-0} = 1(\text{м/с})$.

2. $\vec{S}(4) - \vec{S}(2) = -15 - 3 = -18(\text{м})$; $|V_c| = \frac{-18}{2} = -9(\text{м/с})$.

Оскільки швидкість є векторна величина, то знак «–» вказує на те, що напрями векторів швидкості за відрізки часу $[0; 1], [2; 4]$ є протилежними.

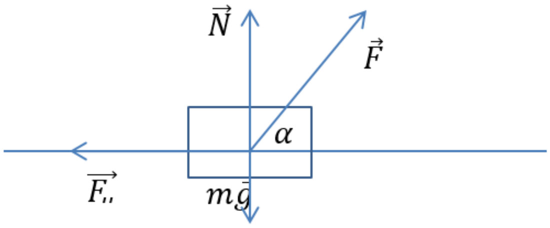


Рис. 2.3 Тіло на поверхні

Задача 9: На шороховатій горизонтальній поверхні лежить тіло. Під яким кутом α треба направити силу до горизонту, щоб зсунути його і при цьому зусилля повинно бути найменшим? Коефіцієнт тертя μ, маса бруска m.[19]

Розв'язання:

Запишемо для даного тіла другий закон Ньютона в векторній формі

$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F_\mu}$$

Врахуємо, що згідно умови задачі прискорення тіла повинно дорівнювати 0 та спроектуємо це рівняння на осі:

$$\text{Ox}: F_\mu = F_x = \text{F}\cos\alpha$$

$$Oy: mg = N + F\sin\alpha$$

Сила тертя може бути записана як $F_\mu = \mu N$, отже маємо систему рівнянь:

$$\begin{cases} \mu N = F\cos\alpha \\ mg = N + F\sin\alpha \end{cases}$$

Виконаємо математичні перетворення другого рівняння:

$$N = mg - F\sin\alpha$$

та підставимо його в перше:

$$\mu(mg - F\sin\alpha) = F\cos\alpha$$

$$\mu mg - \mu F\sin\alpha = F\cos\alpha$$

Остаточно маємо:

$$F = \frac{\mu mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha}$$

Ця формула є залежністю прикладеної сили від кута її нахилу до горизонту α.

Дослідимо її на екстремум.

$$F'_\alpha = \frac{\mu mg\big(-(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\big)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2} = \frac{\mu mg(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)}{(\cos\alpha + \mu\sin\alpha)^2}$$

$$F'_\alpha = 0$$

$$\sin\alpha - \mu\cos\alpha = 0$$

$\mu = \mathrm{tg}\,\alpha$, отже $\alpha = arctg\mu$ $\quad \alpha \,\epsilon\, \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$

Очевидно, що якщо $\alpha \to 0$, то $F \to \mu mg$, якщо $\alpha \to \pi/2$, то $F \to mg$

Відповідь: $\alpha = arctg\mu$.

2.2. Задачі про швидкість електричного струму

Електричним струмом називають впорядкований рух зарядів. Однією з його основних характеристик є швидкість перенесення заряду через поперечний переріз провідника. Зазвичай вважають, що струм протікає неперервно. Математично це оформляється так, що використовується усереднений струм протягом часу Δt. Цей час трохи більший, ніж час між проходженнями через переріз провідника двох електронів. Тоді можна оперувати зарядом як неперервною величиною і означити силу струму:

$$I = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t + \Delta t) - q(t)}{\Delta t} = q'(t) = \frac{dq}{dt}.$$

Тут dq – заряд, який переноситься за час dt через поперечний переріз провідника.[1]

Розглянемо струм, що виникає внаслідок механічного переносу заряду. Нехай рівномірно заряджений по поверхні прямий круговий циліндр радіуса R рухається вздовж своєї осі зі сталою швидкістю V. Означимо поверхневу густину заряду при зміні площі поверхні ΔS:

$$\delta = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{q(S + \Delta S) - q(S)}{\Delta S} = \frac{dq}{dS}.$$

Якщо поверхня заряджена рівномірно, то $\delta = const$ для всіх значень S. Нехай величина δ відома.

Виберемо площину, перпендикулярну осі циліндра. За достатньо малий проміжок часу Δt через цю площину проходить кільце малої товщини Δl. Кільце несе заряд, рівний добутку густини заряду на площу поверхні кільця:

$$\Delta q = \delta \cdot 2\pi R \Delta l.$$

За означенням, сила струму

$$I = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta q}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\delta \cdot 2\pi R \Delta l}{\Delta t} = \delta \cdot 2\pi R \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta l}{\Delta t} = \delta \cdot 2\pi R V.$$

Тому, $I = \delta \cdot 2\pi R V$.

Означення сили струму через похідну використовується також і при розрахунку змінного струму в колі.

Розглянемо декілька задач.

Задача 1: Сила струму I змінюється за законом $I = 0{,}4t^2$. Знайти швидкість зміни сили струму у момент часу $t = 8$с. [1]

Розв`язання:

Сила струму I вимірюється у амперах (А), час t – у секундах (с).

Швидкість зміни сили струму дорівнює похідній сили струму за часом t, тобто

$$v(t) = \frac{dI}{dt} = (0{,}4t^2)' = 0{,}8t.$$

Тоді,

$$v(8) = 0{,}8 \cdot 8 = 6{,}4 \text{ (А/с)}.$$

Відповідь: Швидкість сили струму у момент часу t = 8с дорівнює 6,4(А / с)

Задача 2: Коло з зовнішнім опором $R = 0{,}9$ Ом живиться від батареї з $k = 36$ однакових джерел, кожен з яких має ЕРС $\varepsilon_0 = 2$ В і внутрішній опір $r_0 = 0{,}4$ Ом. Батарея включає n груп, з'єднаних паралельно, а в кожній з них міститься m послідовно з'єднаних акумуляторів. При яких значеннях m, n буде отримана максимальна сила струму у зовнішньому опорі. Знайти це максимальне значення.[19]

Розв’язання:

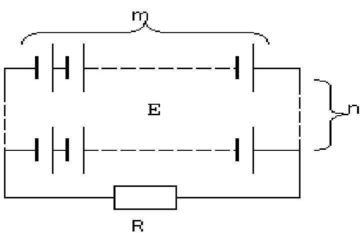


Рис. 2.4 Коло з зовнішнім опором

При послідовному з'єднанні акумуляторів $\varepsilon = m\varepsilon_0$, де ε_0 – ЕРС одного джерела. Внутрішній опір батареї з m послідовно з’єднаних елементів $r_1 = mr_0$, тоді при паралельному з’єднанні n таких ділянок загальний внутрішній опір буде:

$$r = \frac{r_1}{n} = \frac{mr_0}{n}.$$

Запишемо закон Ома для повного кола:

$$I = \frac{m\varepsilon_0}{R + r} = \frac{m\varepsilon_0}{R + \frac{mr_0}{n}} = \frac{nm\varepsilon_0}{nR + mr_0}.$$

Так як k – загальне число акумуляторів, то $k = mn$; $m = \frac{k}{n}$.

Тоді маємо функцію сили струму в залежності від n:

$$I = \frac{k\varepsilon_0}{nR + \frac{k}{n}r_0}$$

Для знаходження умови, при якій сила струму в колі максимальна, дослідимо функцію $I = I(n)$ на екстремум, взявши похідну по n.

$$I' = k\varepsilon_0 \frac{-1}{\left(nR + \frac{kr_0}{n}\right)^2} \cdot \left(nR + \frac{kr_0}{n}\right)' = \frac{-k\varepsilon_0}{\left(nR + \frac{kr_0}{n}\right)^2} \cdot \left(R - \frac{kr_0}{n^2}\right).$$

$\left(R - \frac{kr_0}{n^2}\right) = 0$ при $n = \sqrt{\frac{kr_0}{R}}$, при $n = -\sqrt{\frac{kr_0}{R}}$ і при $n = 0, I'$ – не існує.

Зрозуміло, що виходячи з того, що n – кількість елементів, не має сенсу розглядати від'ємні значення n. На інтервалі $(0; \sqrt{\frac{kr_0}{R}})$ функція зростає, на інтервалі $(\sqrt{\frac{kr_0}{R}}; +\infty)$ – спадає. Отже, максимальна сила струму при $n = \sqrt{\frac{kr_0}{R}}$,

$n = \sqrt{\frac{36 \cdot 0,4}{0,9}} = 4$, тоді $m = \frac{k}{n} = \frac{36}{4} = 9, I = \frac{36 \cdot 2}{4 \cdot 0,9 + \frac{36}{4} \cdot 0,4} = 10(\text{А})$.

Відповідь: $n = 4, m = 9$, 10А.

Задача 3: Максимальна потужність у зовнішній ділянці кола складає 12Вт при силі струму 2А. Дослідити, при якій умові потужність в колі набуває максимального значення, визначити ЕРС і внутрішній опір джерела струму.[1]

Розв'язання:

Згідно закону Ома для повного кола:

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

де ε – ЕРС джерела струму, а r - його внутрішній опір.

Запишемо формулу потужності у зовнішній ділянці кола: $P = I^2R$ та підставивши силу струму отримаємо потужність як функцію залежності від зовнішнього опору.

$$P = \frac{\varepsilon^2}{(R+r)^2} \cdot R.$$

Так як потужність максимальна, то дослідимо її як функцію від R.

Знайдемо похідну функції:

$$P' = \varepsilon^2 \cdot \left(\frac{R}{(R+r)^2}\right)' = \varepsilon^2 \cdot \frac{1 \cdot (R+r)^2 - 2R \cdot (R+r)}{(R+r)^4} =$$

$$= \varepsilon^2 \cdot \frac{(R+r)(R+r-2R)}{(R+r)^4} = \varepsilon^2 \cdot \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Для знаходження точок екстремуму прирівняємо отриману похідну до нуля $P' = 0$ – це виконується, якщо $R = r$ і похідна не існує, якщо $R = -r$.

Знайдемо проміжки зростання та спадання функції. Функція спадає при $R \in (-\infty; -r) \cup (r; +\infty)$ та зростає при $R \in (-r; r)$.

Отже, максимальною потужність буде при $R = r$.

Знайдемо зовнішній опір ділянки: $R = \frac{P}{I^2} = \frac{12}{4} = 3$ (Ом).

Тоді внутрішній опір джерела теж становить 3 Ом.

Нарешті, знайдемо ЕРС джерела:

$$\varepsilon = \mathrm{I}(\mathrm{R} + \mathrm{r});$$

$$\varepsilon = 2(3+3) = 12(\mathrm{B})$$

Відповідь: 12В, 3 Ом.

Задача 4: Припустимо, що електричний заряд, який проходить через поперечний переріз провідника, змінюється за законом. Знайдемо закон зміни сили струму у провіднику та силу струму в момент часу 2 с.[1]

Розв'язання:

1) Надамо часу деякого приросту $\Delta t, \Delta t \to 0$, тоді $\Delta q = q(t+\Delta t) - q(t)$

2) Знайдемо відношення:

$$\frac{\Delta q}{\Delta t} = \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}.$$

3) Знайдемо границю цього відношення, підставивши замість

$$q(t) = 3t^3 + 2t \text{ та}$$

$$s(t+\Delta t) = 3 \cdot (t+\Delta t)^3 + 2(t+\Delta t) =$$

$$= 3(t^3 + 3t^3\Delta t + 3t\Delta t^2 + \Delta t^3) + 2t + 2\Delta t =$$

$$= 3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2t + 2\Delta t$$

$$I = q'(t) = \frac{dq}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{(3t^3 + 9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2t + 2\Delta t) - (3t^2 + 2t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{9t^2\Delta t + 9t\Delta t^2 + 3\Delta t^3 + 2\Delta t}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} 9t^2 + 9t\Delta t + 3\Delta t^2 + 2 =$$

$$\lim_{\Delta t \to 0} (9t^2 + 2) + 9t\Delta t + 3\Delta t^2 = 9t^2 + 2$$

оскільки $\Delta t \to 0$, то і $(9t\Delta t + 3\Delta t^2) \to 0$. Це означає, якщо величина заряду змінюється за законом $q(t) = 3t^3 + 2t$, то швидкість цього заряду (сила струму) змінюватиметься за законом $I(t) = q'(t) = \frac{dq}{dt} = 9t^2 + 2$.

Підставивши у дане рівняння час $t_1 = 2$ с знайдемо миттєве значення сили струму: $I(2) = 9t^2 + 2 = 38\ A$

Відповідь: 38 А.

Задача 5: Заряд в провіднику опором 2 Ом змінюється з часом за законом $q(t) = 5t - 2t^2 + 4t^3$. Визначте напругу на кінцях провідника через 2 с після початку відліку часу.[20]

Розв’язання:

Напруга – це фізична величина, що чисельно дорівнює роботі струму по перенесенню одиничного додатного заряду. Щоб знайти напругу нам треба силу струму помножити на опір:

$$U = I \cdot R.$$

Спочатку визначимо силу струму.

$$I(t) = q'(t) = (5t - 2t^2 + 4t^3)' = 5 - 4t + 12t^2;$$

$$I(2) = 5 - 8 + 12 \cdot 4 = 45 \text{ (А)}.$$

Тепер визначимо напругу:

$$U = I \cdot R = 45 \cdot 2 = 90 \text{ (В)}.$$

Відповідь: 90 В.

Задача 6: Кількість електрики, що протікає через провідник з моменту часу $t = 0$, задається законом $Q = 3t^2 + 2t + 3$ кулонів.

Знайти силу струму в кінці десятої секунди. [20]

Розв'язання:

Силу струму визначаємо за формулою:

$$I = \frac{dQ}{dt} = (3t^2 + 2t + 3)' = 6t + 2.$$

Підставляємо час для знаходження потрібного значення:

$$I(10) = 6 \cdot 10 + 2 = 62 \text{ А}.$$

Отже, сила струму рівна 62 ампери.

2.3. Задачі на знаходження кутової швидкості

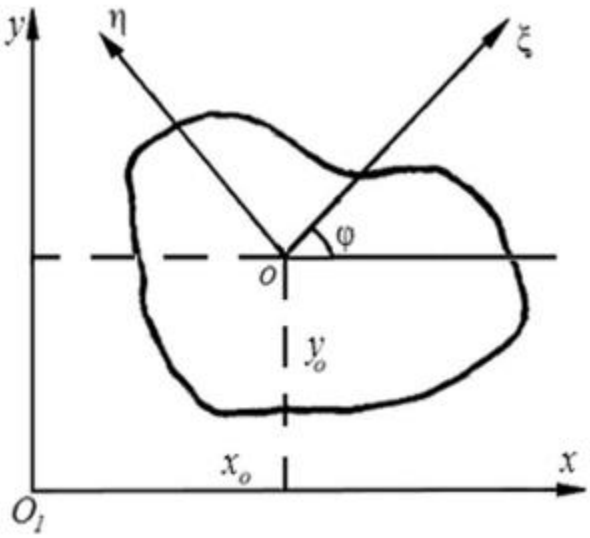


Рис. 2.5 Проекція тіла на площину

Плоскопаралельним рухом називають такий рух твердого тіла, за якого всі його точки рухаються паралельно деякій нерухомій площині. З визначення плоскопаралельного руху випливає те, що задачу вивчення плоскопаралельного руху тіла можна звести до вивчення руху проекції цього тіла на певну площину (рис. 2.5). [1]

Щоб дослідити плоскопаралельний рух твердого тіла, необхідно знати характеристики руху полюса і характеристики обертального руху твердого тіла навколо полюса. Полюс O характеризується швидкістю $\overrightarrow{v_0}$ і прискоренням $\overrightarrow{w_0}$.

Надалі за полюс будемо брати ту точку плоскої фігури, швидкість якої у певний момент часу відома.

Характеристиками обертального руху тіла навколо полюса є кут повороту φ, миттєва кутова швидкість $\vec{\omega}$ і миттєве кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$.

Кутова швидкість $\vec{\omega}$ і кутове прискорення $\vec{\varepsilon}$ є миттєвими, оскільки в кожний момент часу полюс займає нове положення.

Якщо відоме рівняння обертального руху тіла навколо полюса O, тобто

$$\varphi = \varphi(t),$$

то миттєва кутова швидкість

$$\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt},$$

а миттєве кутове прискорення

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}.$$

Слід звернути увагу на те, що $\vec{\omega}$ за плоскопаралельного руху не залежить від вибору полюса.

Розглянемо декілька задач.

Задача 1: Колесо обертається так, що залежність кута повороту радіуса колеса від часу задається рівнянням:

$$\varphi = A + Bt + Ct^2 + Dt^3,$$

де $B = 1$ рад/с, $C = 1$ рад/с^2, $D = 1$ рад/с^3. Знайти кутову швидкість і кутове прискорення колеса, при $t = 2$ с.[29]

Розв'язання:

Кутову швидкість знаходимо як першу похідну по часу від кута φ:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (A + Bt + Ct^2 + Dt^3)' = B + 2Ct + 3Dt^2.$$

Тоді, при $t = 2$ с, отримаємо:

$$\omega(2) = 1 + 2 \cdot 1 \cdot 2 + 3 \cdot 1 \cdot 2^2 = 17 \text{ рад/с}.$$

Кутове прискорення знаходимо як першу похідну від ω:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (B + 2Ct + 3Dt^3)' = 2C + 6Dt.$$

Обчислимо при $t = 2$ с:

$$\varepsilon(2) = 2 \cdot 1 + 6 \cdot 1 \cdot 2 = 14 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $\omega = 17$ рад/с, $\varepsilon = 14$ рад/с^2.

Задача 2: Обертання диска навколо нерухомої осі відбувається за рівнянням $\varphi = 5t^2 - 10t + 5$ (φ – в *радіанах*, t – в *секундах*). Визначити кутову швидкість ω та кутове прискорення ε диска в момент часу $t = 2$ с.[21]

Розв'язання:

Визначимо кутову швидкість диска:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = (5t^2 - 10t + 5)' = 10t - 10.$$

При $t = 2$с:

$$\omega(2) = 10 \cdot 2 - 10 = 10 \text{ рад/с}.$$

Визначимо кутове прискорення диска:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = (10t - 10)' = 10 \text{ рад/с}^2.$$

Відповідь: $\omega = 10$ рад/с, $\varepsilon = 10$ рад/с^2.

Задача 3: Кут φ повороту шківа в залежності від часу t задається функцією $\varphi(t) = t^2 + 3t - 5$. Знайдіть кутову швидкість при $t = 5$ с. [21]

Розв'язання:

Відомо, що кутова швидкість є похідною від кута повороту, тобто

$$\omega(t) = \varphi'(t).$$

Розв'яжемо задачу, користуючись правилом знаходження похідної.

1) Надамо t приросту $\Delta t > 0$.

2) Знайдемо приріст залежної змінної $\varphi(t)$:

$$\Delta\varphi(t) = \varphi(t + \Delta t) - \varphi(t) = (t + \Delta t)^2 + 3(t + \Delta t) - 5 - (t^2 + 3t - 5) =$$

$$= 2t\Delta t + \Delta t^2 + 3\Delta t = \Delta t(2t + \Delta t + 3).$$

3) Складемо відношення $\frac{\Delta\varphi(t)}{\Delta t}$:

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = 2t + \Delta t + 3.$$

4) Знайдемо границю цього відношення, якщо $\Delta t \to 0$:

$$\lim_{\Delta t \to 0}(2t + \Delta t + 3) = 2t + 3.$$

Ця границя і є кутовою швидкістю у момент часу t. Тому, коли $t = 5$ с, то

$$\omega(5) = 2 \cdot 5 + 3 = 13 \text{ рад/с}.$$

Відповідь. $\omega = 13$ рад/с.

Задача 4: При гальмуванні маховик за t секунд повертається на кут $\varphi = 5 + 6t - t^2$ (φ — у радіанах).

Знайти: кутову швидкість ω обертання маховика в момент $t = 2\,c$; момент часу t, коли обертання скінчиться. [1]

Розв'язання:

1) Кутовою швидкістю ω називається швидкість зміни кута φ за час Δt. Кутова швидкість є похідною від кута повороту φ за часом t:

$$\omega = \varphi'(t) = (5 + 6t - t^2)' = 6 - 2t.$$

2) $\omega(2) = 6 - 2 \cdot 2 = 6 - 4 = 2$ (рад/с) – кутова швидкість в момент $t =$ 2 с.

3) В момент зупинки маховика $\omega = 0$:

$$6 - 2t = 0;$$

$$-2t = -6;$$

$$t = 3 \text{ с}.$$

Наприкінці третьої секунди кутова швидкість дорівнюватиме нулю, і обертання скінчиться.

Відповідь: $\omega = 2$ рад/с; $t = 3с$.

2.4. Задачі про потужність

Потужність - це величина, яка визначає кількість роботи, яку можна виконати або енергії, яку можна перетворити або передати за певний час. У системі одиниць СІ одиницею потужності є ватт (Вт).[32]

Потужність P дорівнює відношенню виконаної роботи W до часу t:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Величина потужності може бути розглянута як робота (фізичний процес) відносно часу, що є аналогічним визначенню похідної у математиці, де розглядається швидкість зміни функції відносно зміни її аргументу. У обох випадках, робота або зміна величини (фізичної чи математичної) вимірюється відносно часу чи зміни аргументу.

Зв'язок між поняттями потужності в фізиці та похідної в математиці може бути визначений через концепцію роботи та її залежності від часу або, в інших випадках, від змінного параметра.

У фізиці, робота виконується над об'єктом, і ця робота може залежати від часу. Наприклад, якщо ви піднімаєте ящик на певну висоту, ви виконуєте роботу проти сили тяжіння протягом певного часу.

У фізиці, потужність визначається як швидкість виконання роботи, тобто як робота змінюється відносно часу. Математично це виглядає як похідна роботи по відношенню до часу.

У математиці, похідна функції вказує, як швидко змінюється значення функції відносно зміни її аргументу. Це визначає швидкість "роботи", яку виконує функція над своїм аргументом.

В обох випадках, потужність і похідна дозволяють вимірювати, як змінюється одна величина (робота або значення функції) відносно іншої (часу або аргументу).

Обидва концепти використовуються для визначення "швидкості зміни", будь то у фізичних процесах чи математичних функціях.

Отже, можна сказати, що потужність у фізиці та похідна в математиці обидві вимірюють, як швидко змінюється щось відносно чогось іншого, і ця аналогія може допомогти в розумінні обох концепцій.

Зв'язок між потужністю і похідною можна встановити, враховуючи роботу, яку можна визначити як силу, прикладену до об'єкта, помножену на відстань, на яку ця сила діє. У цьому контексті розглянемо об'єкт, який рухається прямолінійно зі сталою швидкістю.

Розглянемо об'єкт з масою m, який рухається прямолінійно зі швидкістю v. Робота сили F, що діє на об'єкт протягом відстані s, визначається як $W = F \cdot d$.

Потужність P визначається як робота, виконана за одиницю часу:

$$P = \frac{W}{t}.$$

Швидкість v можна визначити як зміну положення відносно часу:

$$v = \frac{s}{t}.$$

Похідна швидкості відносно часу $\frac{dv}{dt}$ визначає, як швидко змінюється швидкість об'єкта.

З рівнянь вище виразимо роботу W через швидкість та час:

$$W = F \cdot s = m \cdot a \cdot s,$$

де a – прискорення.

Підставимо це визначення роботи у формулу для потужності:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{m \cdot a \cdot s}{t}.$$

Розглянемо, що $m \cdot a$ – це маса, помножена на прискорення, що є визначенням сили F, і отримаємо

$$P = F \cdot \frac{s}{t}.$$

Враховуючи, що $\frac{s}{t}$ – це саме швидкість v, ми отримуємо

$$P = F \cdot v.$$

Це вже подібно до виразу для потужності відносно часу, а отже, можна записати:

$$P = \frac{dW}{dt}.$$

Отже, з цього випливає, що потужність, яка визначається як робота за одиницю часу, може бути введена через відношення сили та швидкості, що, в свою чергу, пов'язане з похідною швидкості відносно часу. Таким чином, вводячи поняття сили та швидкості, ми можемо ввести поняття похідної через взаємодію потужності у фізичному контексті. [1]

Для прикладу розглянемо декілька задач.

Задача 1: Об'єкт масою $m = 2$ кг рухається прямолінійно зі швидкістю $v = 3t^2$ м/с, де t - час в секундах. Знайдіть потужність сили, що діє на об'єкт, в момент часу $t = 2$ с.[23]

Розв'язання:

Швидкість v – це похідна від положення x за часом t:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

Тоді сила F може бути знайдена як

$$F = m \cdot a,$$

де a - прискорення, і прискорення можна отримати як

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

Тоді

$$v = 3t^2;$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (3t^2)' = 6t;$$

$$F = m \cdot a = 2 \cdot 6t = 12t.$$

Тепер, потужність P може бути знайдена як $P = F \cdot v$:

$$P = 12t \cdot 3t^2 = 36t^3.$$

Підставимо $t = 2$ с для знаходження потужності в момент часу $t = 2$ с:

$$P(2) = 36 \cdot 2^3 = 36 \cdot 8 = 288 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $P = 288$ Вт.

Задача 2: Об'єкт масою $m = 1$ кг рухається вздовж осі x так, що його положення x у відповідності до часу t визначається рівнянням $x = 4t^3 - 3t^2$. Знайдіть потужність сили, що діє на об'єкт, в момент часу $t = 1$ с. [33]

Розв'язання:

Швидкість v можна знайти як похідну положення x за часом t:

$$v = \frac{dx}{dt}.$$

$$v = (4t^3 - 3t^2)' = 4 \cdot 3t^2 - 3 \cdot 2t = 12t^2 - 6t.$$

Тепер, знаючи швидкість v, можемо знайти силу F як $F = m \cdot a$, де a – прискорення, а прискорення можна отримати як $a = \frac{dv}{dt}$:

$$a = (12t^2 - 6t)' = 12 \cdot 2t - 6 = 24t - 6.$$

Тоді отримаємо таке F:

$$F = m \cdot a = 1 \cdot (24t - 6) = 24t - 6.$$

Тепер, потужність P може бути знайдена як $P = F \cdot v$:

$$P = F \cdot v = (24t - 6) \cdot (\ 12t^2 - 6t) = 288t^3 - 144t^2 - 72t^2 + 36t =$$

$$= 288t^3 - 216t^2 + 36t.$$

Підставимо $t = 1$ с для знаходження потужності в момент часу $t = 1$ с.

$$P(1) = 288 - 216 + 36 = 108 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $P = 108$ Вт.

Задача 3: Об'єкт масою $m = 1$ кг рухається прямолінійно так, що його положення x у відповідності до часу t визначається рівнянням [28]

$$x = 2t^2 + 3t.$$

Знайдіть потужність сили, що діє на об'єкт, в момент часу $t = 2$ с.

Розв'язання:

Почнемо з знаходження швидкості v і прискорення a за допомогою похідних:

$$v = \frac{dx}{dt} = (2t^2 + 3t)' = 4t + 3;$$

$$a = \frac{dv}{dt} = (4t + 3)' = 4.$$

Тепер, сила F і потім потужність P:

$$F = m \cdot a = 1 \cdot 4 = 4;$$

$$P = F \cdot v = 4 \cdot (4t + 3) = 16t + 12.$$

Підставимо $t = 2$ с для знаходження потужності в момент часу $t = 2$ с.

$$P(2) = 16 \cdot 2 + 12 = 32 + 12 = 44 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $P = 44$ Вт.

Задача 4: Об'єкт масою $m = 3$ кг рухається згідно з рівнянням швидкості $v = 2t + 5$. Знайдіть потужність сили в момент часу $t = 3$ с.[26]

Розв'язання:

Почнемо з знаходження прискорення a, взявши похідну від швидкості:

$$a = \frac{dv}{dt} = (2t + 5)' = 2.$$

Тепер, сила F і потім потужність P:

$$F = m \cdot a = 3 \cdot 2 = 6;$$

$$P = F \cdot v = 6 \cdot (2t + 5) = 12t + 5.$$

Підставимо $t = 3$ с для знаходження потужності в момент часу $t = 3$ с.

$$P(3) = 12 \cdot 3 + 5 = 36 + 5 = 41 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $P = 41$ Вт.

Задача 5: Об'єкт масою $m = 4$ кг рухається вздовж осі x. Функція швидкості об'єкта визначається як $v = 3t^2 - 4t$, де t - час в секундах. Знайдіть потужність сили, що діє на об'єкт, в момент часу $t = 2$ с.[26]

Розв'язок:

Почнемо з знаходження прискорення a, взявши похідну від функції швидкості:

$$a = \frac{dv}{dt} = (3t^2 - 4t)' = 6t - 4.$$

Тепер, сила F і потім потужність P:

$$F = m \cdot a = 4 \cdot (6t - 4) = 24t - 16;$$

$$P = F \cdot v = (24t - 16) \cdot (3t^2 - 4t) = 72t^3 - 96t^2 - 48t^2 + 64t =$$
$$= 72t^3 - 144t^2 + 64t.$$

Підставимо $t = 2$ с для знаходження потужності в момент часу $t = 2$ с.

$$P(2) = 72 \cdot 2^3 - 144 \cdot 2^2 + 64 \cdot 2 = 128 \text{ Вт}.$$

Відповідь: $P = 128$ Вт.

2.5. Задачі про лінійну густину стержня, теплоємність та кінетичну енергію

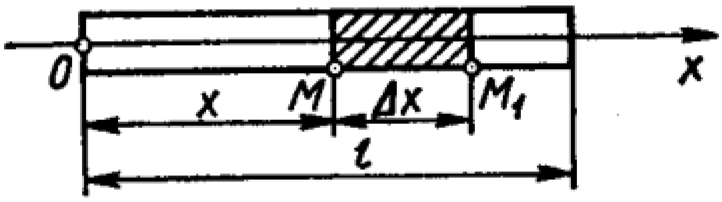


Рис. 2.6 Прямолінійний неоднорідний стержень

Розглянемо тонкий прямолінійний неоднорідний стержень довжини l і розмістимо його на осі Ox так, щоб лівий кінець стержня збігався з початком координат (матеріальне тіло називається неоднорідним, якщо його густина не є сталою, а змінюється від точки до точки). Позначимо через m масу стержня між точками O і M з координатами 0 і x. Оскільки маса відрізка OM залежить від його довжини, то m є функцією від x:

$$m = m(x).$$

Треба знайти густину стержня в точці M. Крім точки M візьмемо ще точку M_1 з координатою $x + \Delta x$ (Δx – приріст довжини x) і позначимо через $m + \Delta m$ масу відрізка OM_1 (Δm – приріст маси, що дорівнює масі відрізка MM_1):

$$m + \Delta m = m(x + \Delta x).$$

Відрізок стержня між точками M і M_1 має довжину Δx і масу:

$$\Delta m = m(x + \Delta x) - m(x).$$

Середньою густиною $\gamma_\text{с}$ стержня на відрізку $[x; x + \Delta x]$ називають відношення приросту маси до приросту довжини:

$$\gamma_\text{с} = \frac{\Delta m}{\Delta x} = \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Границю середньої густини $\gamma_\text{с}$ при $\Delta x \to 0$ називають лінійною густиною стержня в точці x і позначають

$$\gamma = \lim_{\Delta x \to 0} \gamma_\text{с} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{m(x + \Delta x) - m(x)}{\Delta x}.$$

Розглянемо кілька задач.

Задача 1: Знайдіть лінійну густину неоднорідного стержня довжиною 40 см, маса якого змінюється за законом $m(l) = 2l^2 + 3l$.[24]

Розв’язання:

Почнемо зі знаходження функції густини, взявши похідну від маси:

$$\rho(l) = m'(l);$$

$$\rho(l) = (2l^2 + 3l)' = 4l + 3.$$

Підставимо $l = 40$ см, щоб знайти лінійну густину неоднорідного стержня довжиною $l = 40$ см:

$$\rho(40) = 4 \cdot 40 + 3 = 163 \text{ кг/м}.$$

Відповідь: $\rho = 163$ кг/м.

Теплоємність (або теплоємкість) — це фізична величина, яка характеризує здатність речовини або тіла поглиблювати теплоту під впливом температурних змін. Вона визначає, скільки тепла необхідно подати або відняти від тіла, щоб змінити його температуру на певну величину. Теплоємність вимірюється у джоулях поділених на кілограми помножений на градус Цельсія.[12]

Теплоємність може бути виражена як похідна енергії тіла відносно його температури. Математично це виглядає так:

$$C = \frac{dQ}{dT},$$

де C - теплоємність, dQ - кількість тепла, яку надають або відбирають від тіла, dT - відповідна зміна температури.[12]

Якщо тіло не зазнає фазових переходів або інших змін стану, теплоємність може бути виражена як:

$$C = mc$$

де m - маса тіла, c - специфічна теплоємність матеріалу.

Таким чином, теплоємність можна розглядати як величину, яка визначає, наскільки швидко змінюється енергія тіла при зміні його температури. Похідна тут вказує на те, як швидко змінюється енергія відносно температури, і вона важлива в фізиці для вивчення теплових властивостей різних матеріалів.

Нехай $\omega = \omega(\tau)$ – кількість теплоти, яку дістає тіло при нагріванні його до температури τ. Треба знайти теплоємність тіла при температурі τ.[12]

Середньою теплоємністю $C_с$ тіла на проміжку $[\tau;\ \tau + \Delta\tau]$ називається відношення приросту теплоти до приросту температури:

$$C_c = \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Границю середньої теплоємності $C_с$ при $\Delta\tau \to 0$ називають теплоємністю тіла при температурі τ:

$$C = \lim_{\Delta\tau \to 0} C_с = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\omega(\tau + \Delta\tau) - \omega(\tau)}{\Delta\tau}.$$

Задача 2: Кількість тепла Q, потрібного для нагрівання 1кг води від 0 до t°С визначається за формулою $Q(t) = t\ + 0{,}0005t^2 +\ 0{,}000006t^3$.

Обчисліть теплоємність води для $t\ =\ 20$°С. [34]

Розв'язання:

1) Теплоємність є похідною від кількості тепла за температурою.

$$\mathrm{C}(t) =\ Q'(t) =\ 1 + 0{,}0001t\ +\ 0{,}000018t^2.$$

$$2)\ C(20\ ) = 1 + 0{,}001\ 20 + 0{,}000018\ 400 =$$

$$= 1 + 0{,}02 + 0{,}0072\ = 1{,}0272\ (\text{Дж})$$

Відповідь: 1,0272 Дж.

Кінетична енергія — це енергія, яку має тіло через його рух. Ця енергія залежить від маси тіла та його швидкості. Математично вона виражається за допомогою формули:

$$KE = \frac{1}{2} m v^2,$$

де KE - кінетична енергія, m - маса тіла, v - швидкість тіла.[12]

Тепер давайте визначимо, як кінетична енергія пов'язана з похідною.

Кінетична енергія може бути виражена як похідна відносно часу від імпульсу (p):

$$KE = \int_0^v F dx,$$

де F - сила, dx - зміщення. За другим законом Ньютона, $F = ma$, і ми можемо переписати це вираження як:

$$KE = \int_0^v m \frac{dv}{dt} dx,$$

Масу m можна витягнути за знак інтегралу, а також врахувати, що $\frac{dv}{dt} = a$ (прискорення):

$$KE = \int_0^v m dv.$$

Інтегруючи це вираження, ми отримаємо формулу для кінетичної енергії:

$$KE = \frac{1}{2} m v^2.$$

Отже, з виразу для кінетичної енергії ми можемо побачити, що вона визначається як інтеграл від маси тіла та його швидкості.[12]

Задача 3: Крапля падає під дією сили тяжіння і випаровується пропорційно часу. Через який час її кінетична енергія буде максимальною і чому дорівнює ця кінетична енергія? Початкова маса краплі m_0, коефіцієнт пропорційності зменшення маси k.[28]

Розв'язання:

За формулою потенційної енергії $E_k = \frac{\mathrm{mv}^2}{2}$.

Маса краплі зменшується пропорційно часу, тому $m = m_0 - kt$. Так як крапля рухається під дією сили тяжіння, то $v = gt$.

Отже маємо функцію залежності кінетичної енергії від часу:

$$E_k = \frac{(m_0 - kt)(gt)^2}{2} = \frac{g^2(m_0 - kt)t^2}{2}.$$

Дослідимо її на екстремум:

$$E_k' = \frac{g^2}{2}(-kt^2 + (m_0 - kt)2t) = \frac{g^2}{2}(-3kt^2 + 2m_0 t) = g^2\left(m_0 t - \frac{3}{2}kt^2\right) =$$

$$= g^2 t\left(m_0 - \frac{3}{2}kt\right)$$

Прирівняємо отриману похідну до нуля: $E_k' = 0$

$$g^2 t\left(m_0 - \frac{3}{2}kt\right) = 0$$

Це рівняння має два розв’язки:

$$t_1 = 0, \qquad t_2 = \frac{2m_0}{3k}$$

Значення $t_1 = 0$ не має сенсу для нашого випадку, тож з’ясуємо - є другий корінь точкою мінімуму чи максимуму, для цього візьмемо другу похідну:

$$E_k'' = g^2\left(\left(m_0 - \frac{3}{2}kt\right) + t\left(-\frac{3}{2}k\right)\right) = g^2(m_0 - 3kt)$$

$$E_k''(t_2) = E_k''\left(\frac{2m_0}{3k}\right) = g^2\left(m_0 - 3k\frac{2m_0}{3k}\right) = -m_0 g^2 < 0$$

Так як $\mathrm{E''}_{\text{к}} < 0$, то t= $\frac{2m_0}{3k}$ – точка max

Отже максимальне значення $\mathrm{E_k} = \frac{2\mathrm{g}^2\mathrm{m}_0^2}{27\mathrm{k}^2}$

Відповідь: якщо крапля падає менше t= $\frac{2m_0}{3k}$, то $\mathrm{E}_{\text{к max}}$ буде в момент удару, а якщо більше, то $\mathrm{E_k} = \frac{2\mathrm{g}^2\mathrm{m}_0^2}{27\mathrm{k}^2}$, а далі крапля випарується.

Задача 4: Тіло масою 2 кг рухається прямолінійно за законом $x(t) = t^2 + t + 1$. Координата вимірюється в метрах, час – в секундах. Знайти:

а) діючу силу; б) кінетичну енергію тіла через 2 с після початку руху.[26]

Розв’язання:

Отже, нам дано:

$$x(t) = t^2 + t + 1; m = 2 \text{ кг}; t = 2 \text{ с}.$$

Потрібно знайти:

$$F-? \quad E-?$$

Швидкість є похідною від $x(t)$, тому:

$$v = x'(t) = (t^2 + t + 1)' = 2t + 1.$$

При $t = 2$ с швидкість буде дорівнювати:

$$v(2) = 2 \cdot 2 + 1 = 5 \text{ м/с}.$$

Тепер знайдемо прискорення:

$$a = v'(t) = (2t + 1)' = 2 \text{ м/с}^2.$$

Тоді F буде рівна:

$$F = m \cdot a = 2 \cdot 2 = 4\text{Н}.$$

І енергія вийде:

$$E = \frac{mv^2}{2} = \frac{2 \cdot 5^2}{2} = 25 \text{ Дж}.$$

Відповідь: 4 Н, 25 Дж.

Висновки до розділу 2

В розділі розглядаються задачі з фізики, які розв’язуються за допомогою похідної, основною ідеєю є розкриття швидкості зміни фізичних величин у просторі та часі. Вивчення цього поняття надає важливий інструментарій для аналізу та розв'язання різноманітних фізичних завдань.

Похідна стає ключовим засобом для розуміння та математичного вираження концепцій, таких як швидкість руху, розподіл маси в тілі, залежність енергії від температури, кінетична енергія, потужність та інші. Її використання у фізичних задачах дозволяє глибше розуміти і передбачати зміни у фізичних системах.

Знання похідної розкриває не лише математичні аспекти, але і природні закономірності та взаємозв'язки у фізичних процесах. Воно допомагає визначати швидкість зміни, темпи виконання роботи та взаємодії між різними фізичними величинами.

Отже, цей розділ визначає фундаментальний інструментарій для фізичного аналізу, дозволяючи розкрити динаміку та властивості фізичних явищ з точністю та математичною обґрунтованістю.

РОЗДІЛ 3. МЕТОДИКИ ВИВЧЕННЯ ПОХІДНОЇ У ФІЗИЦІ

Вивчення похідної на заняттях з фізики може бути цікавим і пізнавальним процесом, особливо коли студенти вбирають математичні поняття для розуміння фізичних явищ. Розглянемо деякі методики, які можуть бути корисні:

1. Геометричний зміст:

Геометричний зміст похідної визначає, як змінюється функція (графік) в кожній конкретній точці. Основна ідея полягає в тому, що похідна функції визначає нахил (або кут нахилу) до її графіка в кожній точці.

- ***Кут нахилу кривої:***
  - Уявімо графік функції $y = f(x)$. Кут нахилу кривої в точці x дорівнює значенню похідної $f'(x)$ в цій точці. Іншими словами, похідна вказує, наскільки швидко міняється значення функції.[6]
- ***Тангенсна лінія:***
  - Тангенсна лінія до графіка функції в певній точці має нахил, що відповідає значенню похідної в цій точці. Таким чином, можна розглядати тангенсну лінію як найкращий лінійний наближений графік функції в околі даної точки.[6]
- ***Напрямок руху:***
  - Знак похідної також важливий. Якщо $f'(x) > 0$, це вказує, що графік піднімається, тобто функція зростає. Якщо $f'(x) < 0$, це вказує на спад, тобто функція спадає.[6]

Розглянемо конкретний приклад. Нехай $f(x) = x^2$. Її похідна $f'(x) = 2x$. Графік функції $y = x^2$ - це парабола з вершиною у початку координат.

Геометричний зміст: у точці $x = 2$, значення похідної $f'(2) = 4$. Це означає, що в цій точці крива піднімається, і тангенсна лінія має нахил 4. Значення похідної вказує на швидкість зростання функції в цій точці.

Напрямок Руху: оскільки $f'(x) > 0$ при $x > 0$, це вказує, що графік функції зростає при $x > 0$.

Геометричний зміст дозволяє зв'язати абстрактну математичну концепцію похідної з конкретними змінами у графіках функцій та їхніми геометричними властивостями.

Похідна може бути пояснена як нахил кривої в точці. Зображення графіків функцій та їхніх похідних може допомогти студентам візуалізувати, як змінюється кут нахилу в різних точках.

2. Фізичні застосування:

Фізичні застосування похідної важливі в контексті фізичних наук, де вони використовуються для вивчення та моделювання різноманітних фізичних явищ. Ось декілька конкретних фізичних величин, які можуть бути описані за допомогою похідних:

- ***Швидкість і прискорення:***
  - Якщо $s(t)$ визначає шлях частки від часу t, то похідна $v(t) = s'(t)$ визначає швидкість частки. Друга похідна $a(t) = v'(t) = s''(t)$ визначає прискорення. Ці величини важливі в механіці та динаміці тіл.[7]
- ***Потужність:***
  - Потужність $P(t)$ в системі може бути описана як похідна від роботи $W(t)$ за відношенням $P(t) = W'(t)$. Це важливо в енергетичних системах та термодинаміці.[7]
- ***Закон Ома:***
  - У електриці похідна струму $I(t)$ від часу визначає напругу $V(t)$ у системі, згідно з законом Ома: $V(t) = I'(t)$.
- ***Теплопровідність:***
  - Закон Фур'є пов'язує тепловий потік $Q(t)$ з температурою $T(t)$ та похідною температури за просторовою координатою: $Q(t) =$ $= -kA\frac{dT}{dx}$, де k - коефіцієнт теплопровідності, A - площа, dx - відстань.
- ***Кінетична енергія:***

- Кінетична енергія $E_k(t)$ тіла масою m та швидкістю $v(t)$ визначається як $E_k(t) = \frac{1}{2}mv^2(t)$. Похідна відносно часу вказує на зміну кінетичної енергії тіла з часом.

- ***Дифузія та інші процеси:***
  - В різних фізичних процесах, таких як дифузія, розплавлення та інші, градієнт та похідні температури, тиску чи концентрації використовуються для опису інтенсивності процесу.

Ці приклади відображають, як похідні використовуються для математичного моделювання та аналізу різноманітних фізичних явищ, надаючи глибше розуміння їхньої динаміки та властивостей.

3. Розв'язання фізичних задач:

Вирішення фізичних задач, які включають в себе концепції похідної. Це може включати рух тіл, зміну температури, перенос тепла та інші аспекти.

Розв'язування фізичних задач, в яких використовуються похідні, може включати декілька етапів:

- ***Формулювання задачі:***
  - Чітко визначте фізичну ситуацію та параметри задачі. Визначте, які величини змінюються відносно часу чи простору і як вони пов'язані.[13]
- ***Визначення функцій:***
  - Введіть функції, що описують фізичні величини. Наприклад, якщо це рух тіла, введіть функції для шляху, швидкості та прискорення.
- ***Записування рівнянь:***
  - Запишіть рівняння, що описують фізичні закони. Використовуйте відомі фізичні закони та співвідношення між величинами.[13]
- ***Використання похідних:***
  - Вивчіть, які похідні входять у фізичні рівняння. Використовуйте їх для вивчення змін у системі. Наприклад, похідна шляху за часом - це швидкість, а похідна швидкості - це прискорення.[13]

- ***Вирішення рівнянь:***
  - Розв'яжіть систему рівнянь для знаходження значень величин у конкретні моменти часу чи в конкретних точках простору.[13]
- ***Аналіз результатів:***
  - Проаналізуйте отримані результати. Визначте фізичний сенс отриманих значень та їх відповідність початковій фізичній задачі.

Розв'язуючи задачі таким чином, можна отримати кількісне розуміння та математичні моделі фізичних процесів.

Розглянемо приклад (Рух Тіла):[27]

1. Формулювання задачі: Тіло рухається по прямій з прискоренням $a(t) = 2\ \text{м/с}^2$. Початкова швидкість $v(0) = 5\ \text{м/с}$. Знайти швидкість та шлях тіла в момент часу t.

2. Визначення функцій: $a(t) = 2, v(0) = 5$.

3. Записування рівнянь: $a(t) = \frac{dv}{dt}$, відомо, що $v(0) = 5$.

4. Використання похідних:

Знайдіть похідні та вирішіть рівняння: $\frac{dv}{dt} = 2$.

5. Вирішення рівнянь:

Інтегруйте відносно часу для знаходження швидкості $v(t)$.

6. Аналіз результатів:

Отримайте функцію швидкості $v(t)$. Якщо потрібно, інтегруйте знову для знаходження функції шляху.

4. Моделювання:

Моделювання в фізиці використовує математичні та статистичні підходи для створення спрощених абстракцій реальних фізичних систем. Ці моделі дозволяють прогнозувати та розуміти різноманітні явища без прямого експерименту. Давайте розглянемо кроки моделювання в контексті фізичних задач:

- ***Вибір системи та параметрів:***

- Визначте систему, яку ви хочете моделювати, та важливі параметри цієї системи. Наприклад, якщо це тіло, то параметрами можуть бути маса, прискорення, швидкість тощо.[8]

- ***Формулювання математичної моделі:***
  - Введіть математичні рівняння, які описують відношення між величинами. Використовуйте фізичні закони та експериментальні дані. Наприклад, для тіла, що рухається, це може бути рівняння руху, такі як $s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$.

- ***Введення початкових та граничних умов:***
  - Встановіть початкові та граничні умови для ваших рівнянь. Це включає початкові значення величин та обмеження, які визначають поведінку системи.[8]

- ***Вирішення математичних рівнянь:***
  - Використовуйте методи математичного аналізу або чисельні методи для розв'язання системи рівнянь. Наприклад, для диференціальних рівнянь, що моделюють фізичні процеси, можна використовувати чисельні методи Ейлера.

- ***Валідація та перевірка:***
  - Порівнюйте результати вашої моделі з експериментальними даними, якщо такі є. Переконайтеся, що модель правильно відображає фізичну реальність.

- ***Оцінка точності та чутливості:***
  - Визначте, наскільки ваша модель чутлива до зміни параметрів та початкових умов. Це допомагає визначити, наскільки впевненими можуть бути ваші прогнози.

- ***Узагальнення та використання:***
  - Використовуйте модель для прогнозування поведінки системи в різних умовах або для вирішення подібних проблем.

5. Лабораторні роботи:

Лабораторні роботи у фізиці є важливою частиною навчання, оскільки вони дозволяють студентам експериментувати, спостерігати реальні явища, визначати фізичні закономірності та перевіряти теоретичні концепції. Ось кілька етапів і аспектів, які часто включаються у лабораторні роботи з фізики:[26]

1. Обрання теми:

- Студенти можуть вибирати різноманітні теми для лабораторних робіт, які відповідають їх курсам та інтересам. Це може бути щось від дослідження руху тіла до вивчення електромагнетизму.

2. Постановка задачі:

- Кожна лабораторна має чітко сформульовану мету та завдання. Це може включати в себе вимірювання фізичних величин, перевірку теоретичних законів або вивчення властивостей конкретних матеріалів.

3. Експериментальна підготовка:

- Студенти готуються до проведення експерименту, обираючи необхідні інструменти, прилади та матеріали. Забезпечується безпека під час проведення дослідів.

4. Збір та обробка даних:

- Під час експерименту проводять вимірювання, фіксують дані та докладно їх обробляють. Використовуються математичні методи, статистика та графіки для аналізу отриманих результатів.

5. Порівняння із теорією:

- Отримані результати порівнюються з теоретичними очікуваннями. Якщо є розбіжності, студенти аналізують їх та можливі причини.

6. Написання звіту:

- Після завершення лабораторної роботи студенти складають детальний звіт, що включає в себе опис експерименту, вимірювань, аналіз отриманих результатів та висновки.

7. Обговорення та висновки:

- Студенти обговорюють результати своєї роботи, роблять висновки, визначають можливі джерела помилок та розглядають можливі шляхи вдосконалення експерименту.

Розглянемо приклад лабораторної роботи (Рух Тіла):

Тема: Визначення прискорення вільного падіння.

Завдання:

1. Виміряти час падіння тіла.
2. Визначити висоту падіння.
3. Розрахувати прискорення вільного падіння.

Експеримент:

- Тіло випускається з висоти h і вимірюється час падіння.

Аналіз та Висновок:

- Визначається середнє значення прискорення вільного падіння, порівнюється з табличним значенням. Аналізуються можливі джерела помилок та обговорюється точність отриманих результатів.

Лабораторні роботи глибше вводять студентів у фізичні концепції, дозволяють їм застосовувати теоретичні знання у практиці та розвивають навички дослідницької роботи.

6. Застосування комп'ютерних інструментів:

Використання комп'ютерних елементів у лабораторних роботах з фізики надає ряд переваг, таких як точність вимірювань, автоматизація деяких етапів експерименту та обробки даних. Ось деталізація, як комп'ютери використовуються у фізичних експериментах:

Системи збору даних:

- o *Датчики та інструменти:* Комп'ютери підключаються до різноманітних датчиків, таких як термометри, барометри, прискорювачі, мікрофони тощо. Ці датчики передають дані про фізичні величини комп'ютеру для подальшого аналізу.

- *Інтерфейси:* Використання різних інтерфейсів (USB, Bluetooth, Wi-Fi) дозволяє підключати комп'ютер до різних приладів і отримувати дані в режимі реального часу.

Використання програмного забезпечення:

- *Захоплення та обробка даних:* Спеціальне програмне забезпечення дозволяє захоплювати та обробляти дані з датчиків. Наприклад, для експериментів з рухом тіла може використовуватися програма для візуалізації траєкторій.
- *Моделювання:* Деякі програми дозволяють моделювати фізичні явища, що допомагає студентам розуміти та вивчати концепції шляхом імітації.

Автоматизація експериментів:

- *Контроль систем:* Комп'ютери можуть керувати та контролювати роботу складних експериментальних установок. Наприклад, в серйозних дослідженнях у фізиці частинок, комп'ютери керують роботою прискорювачів та детекторів.
- *Збір даних в реальному часі:* Комп'ютер може автоматично вимірювати та записувати дані в реальному часі, дозволяючи більш точно контролювати експеримент.

Візуалізація та аналіз результатів:

- *Графіки та діаграми:* Комп'ютери можуть автоматично будувати графіки та діаграми на основі зібраних даних, що полегшує їх аналіз.
- *Віртуальні експерименти:* За допомогою спеціалізованих програм можна створювати віртуальні експерименти, які дозволяють студентам вивчати фізичні явища в інтерактивному режимі.

Використання спеціалізованого обладнання:

- *Спектрометри, осцилографи:* Комп'ютери можуть бути підключені до спеціалізованого обладнання для детального вивчення різних явищ.

- *Симулятори та віртуальні лабораторії:* Вони надають можливість вивчати фізичні концепції без прямого доступу до складних приладів.

Використання комп'ютерів у фізичних лабораторних роботах дозволяє студентам отримувати більше практичного досвіду та розвивати навички, які можна використовувати у подальших дослідженнях та професійній діяльності.

7. Задачі та вправи:

- Використання різноманітних задач та вправ для розвитку навичок вивчення похідної. Задачі можуть бути реальними та зацікавлюючими, щоб стимулювати інтерес до предмету.[25]

8. Дискусії та порівняння:

Порівняння фізичних концепцій та їхніх математичних представлень допомагає узагальнити знання та розуміння.[25]

Дискусії:

- *Групові обговорення:* Створення фізичних сценаріїв, де студенти обговорюють зміни фізичних величин в залежності від часу та вивчають графіки похідних. Аналіз руху та шляху об'єктів для вивчення концепції похідної від координат.
- *Критичне мислення:* Обговорення фізичних ситуацій, де похідна характеризує швидкість, прискорення, зміну температури чи інші параметри. Аналіз реальних даних та визначення впливу похідних на фізичні явища.
- *Спільне вирішення завдань:* Задачі, де студенти разом вирішують різні фізичні задачі, використовуючи концепції похідної. Розгляд динамічних систем та обговорення їхньої еволюції з використанням похідних.[17]

Порівняння:

- *Експериментальні завдання:* Розробка власних фізичних експериментів для визначення значень похідних та порівняння їх із теоретичними значеннями. Аналіз руху об'єктів та порівняння швидкості та прискорення.[11]

Рольові ігри:

- Сценарії, де студенти відіграють ролі фізиків, які розв'язують реальні проблеми, використовуючи концепції похідної.
- Рольові ігри, що моделюють роботу наукових команд у розв'язанні фізичних загадок.[17]

Порівняння теорій:

- Аналіз різних теорій у фізиці та їхнього впливу на розуміння та пояснення фізичних явищ.
- Порівняння різних методів моделювання фізичних систем.[17]

Аналіз прикладів:

- Розгляд прикладів руху та інших фізичних явищ для визначення властивостей та поведінки системи за допомогою похідних.
- Порівняння варіантів моделювання та їхніх застосувань.[11]

Колективний інтелект:

- Сприяння взаємодопомозі та спільній роботі при вирішенні фізичних завдань.
- Заохочення обміну досвідом та підходами між студентами.[11]

Важливо розуміти, що ці методи можна комбінувати для забезпечення більш ефективного вивчення похідної на уроках фізики.

Висновки до розділу 3

В розділі розглядалися методики вивчення похідної у фізиці, виявляється, що ефективне засвоєння цього математичного інструменту вимагає вдумливого та систематичного підходу. Вивчення похідної у фізичному контексті не лише розвиває математичні навички студентів, але і глибше розуміє фізичні закономірності.

Методи навчання, які використовують практичні застосування та приклади з фізики, дозволяють студентам більш ясно уявити, як вивчена математика застосовується у фізичних концепціях. Розгляд конкретних задач і прикладів надає студентам можливість побачити, як похідна використовується для аналізу руху тіл, теплових процесів, взаємодій в електричних системах та інших фізичних явищ.

Додатково, акцент на геометричному змісті та фізичних застосуваннях допомагає студентам сприймати похідну не лише як абстрактну математичну концепцію, але і як потужний інструмент для розуміння світу навколо. Здобуті знання про похідну стають необхідним елементом для вдалого вивчення та розуміння фізичних законів і явищ.

Отже, використання методів, які поєднують теорію із практикою, активно сприяє формуванню глибокого розуміння похідної у фізичному контексті та розвитку критичного мислення у студентів.

ВИСНОВКИ

Це дослідження віддзеркалює широкий обсяг вивчення теми похідної та її застосувань у фізиці. Починаючи від теоретичних основ і закінчуючи прикладними аспектами, дослідження простежує розвиток концепцій від математичних принципів до їхнього використання у фізичних моделях та реальних сценаріях.

Ми визначили, що вивчення похідної у фізичному контексті є не лише академічним завданням, але й важливим кроком у розвитку критичного мислення та математичної грамотності студентів. Підкреслили роль геометричного змісту та фізичних аспектів у сприйнятті похідної як інструменту для розуміння фізичних явищ.

Одним з головних висновків є те, що похідна виступає ключовим інструментом аналізу в фізиці, надаючи засоби виразності та точності при моделюванні різних явищ. Вивчення похідної не лише розкриває фундаментальні відносини в математичній структурі, але і розширює наше розуміння фізичного світу.

Методики вивчення похідної, викладені у фізичному контексті, виявляються важливими для залучення студентів та підвищення їхнього інтересу до математики та фізики. Застосування геометричних і фізичних інтерпретацій робить математичні концепції більш доступними та зрозумілими.

Також, дослідження розглядає практичне використання похідної у фізичних задачах, таких як швидкість руху тіла, лінійна густина стержня, теплоємність, кінетична енергія та інші. Це підкреслює важливість математичних інструментів у розв'язанні реальних проблем та встановленні закономірностей фізичних явищ.

Таким чином, це дослідження розширює наше розуміння взаємозв'язку математики та фізики, висвітлюючи похідну як ключовий елемент для розкриття та моделювання різноманітних фізичних явищ. Інтеграція теорії та практики сприяє глибшому осмисленню предмету та стимулює інтелектуальний розвиток учнів.

На фоні розгляду методик вивчення похідної у фізиці важливо підкреслити, що ці методики не лише надають студентам інструменти для розуміння абстрактних математичних концепцій, але також допомагають їм використовувати ці концепції у конкретних фізичних ситуаціях. Застосування відомостей про похідні для вивчення фізичних явищ робить матеріал більш доступним і призначеним для практичного застосування. Такий підхід активно залучає студентів до процесу вивчення, роблячи математику живою та захоплюючою для них.

Отже, це дослідження вносить свій вклад у розуміння взаємозв'язку математики та фізики, підкреслюючи значущість похідної як ключового елементу для аналізу та моделювання різноманітних фізичних процесів.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Альбін К.В. та ін. Методика викладання фізики. - К.: Вища школа, 1970.-300 с.

2. Афанасьєва О.М., Бродський Я.С., Павлов О.Л., Сліпенко А.К. Математика. 11 клас: Підручник для загальноосвітніх навчальних закладів. Рівень стандарту. – Тернопіль: Навчальна книга-Богдан, 2011.-480 с

3. Ачкан В. В. Використання прикладних задач у процесі вивчення похідної у курсі алгебри та початків аналізу в класах різних профілів / В. В. Ачкан, О. В. Ніколаєва // Збірник наукових праць Бердянського державного педагогічного університету (Педагогічні науки). – Бердянськ: БДПУ, 2011. – № 2. – 360 с.

4. Вища математика: Підручник: У 2 кн: Кн. 1. Основні розділи. За ред. Кулініча Г.Л. К.: Либідь, 2003.

5. Вища математика: теорія, практика, задачі. Під редакцією Г.Л.Кулініча, Либідь, К., 1992.

6. Возняк Г.М., Маланюк М.П. Взаємозв'язок теорії з практикою в процесі навчання математики: Посібник для вчителя.- К.: Рад шк., 1989.-128с.

7. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник для студентів фіз.-мат. факультетів педагогічних інсти-тутів. Ч. 1. Функції однієї змінної. – К.: Вища школа, 1990. – 383 с.

8. Дереза І. С., Формування дослідницької компетентності учнів при вивченні теми «Похідна та її застосування» на поглибленому рівні / І. С. Дереза, О. А. Іванова // ВІСНИК Міжнародного дослідного центру: «Людина: мова, культура, пізнання»: наук. журн.: за заг. ред. В. В. Корольського. – Кривий Ріг: КДПУ, МДЦ «ЛМКП», 2018. – Том 42. – с. 171-178.

9. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрнік. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с

10. Дубовик В. П. Вища математика: Навчальний посібник / В.П. Дубовик, І.І. Юрнік. – К.: А.С.К., 2006. – 648 с.

11. Думанська Т.В. Особливості викладання теми „Похідна та її застосування” для курсантів факультету військової підготовки. Педагогічна освіта: теорія і практика : зб. наук. праць. Вип. 10. / Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка / гол. ред. Каньоса П. С. Кам’янець-Подільський : Видавець ПП Зволейко Д. Г., 2012. С. 187-193.

12. Задачі оптимізації: Посібник для факультативних занять, 10-11 кл./ Л.М. Вивальнюк, О.І. Соколенко, Ю.В. Костарчук та ін. – К.: Рад. шк., 1991.- 175 с.

13. Збірник задач з математики для вступників для вузів : Тир з рос / В. К. Єгерев, В. В. Зайцев, Б. А. Корделівський та ін. / за ред. М. Ш. Сканаві. : - К. : “Онікс”, 2005. – 608с.

14. Колесников В. О. "Фізика. Теорія і методи розв'язання конкурсних завдань. Частина ІІ ". М.: Навчальний центр "Орієнтир" - "Світоч", 2000.

15. Корольський В. В. Математичний аналіз. Диференціальне та інтегральне числення функції однієї змінної / Корольський Володимир Вікторович. – Кривий Ріг, 2013.– ч. 2-а. – 393 с.

16. Лоповок Л. М. "1000 проблемних завдань з математики". М.: Просвещение, 1995.

17. Лященко М. Я. Похідна та її застосуваня : Посібник для самоосвіти вчителів. = К. : Рад. шк., 1985. – 152с

18. Мерзляк А.Г. Алгебра: підруч. для 11 кл. з поглибленим вивченням математики: у 2 ч./ А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2011.- Ч. 2.-

19. Науково – медичний журнал матем. в школах України видавнича група “Основа” листопад 2013р. № 31 (403) ст. 28 (Желтуха Т. В. Застосування похідної до розв’язування задач)

20. Нелін Є.П. Алгебра. 11 клас: підруч. для загальноосвіт. навч. закладів: академ. рівень, проф.. рівень / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. – Х.: Гімназія, 2011.-448 с.

21. Новий довідник : Математика. Фізика. – К. : ТОВ “КАЗКА”, 2004. – 864с.

22. Погребний В. Узагальнення поняття похідної // Фізико-математична освіта: науковий журнал, 2017. Випуск 2(12), С.124-129.

23. Похідна та її застосування [Текст]: навчальний посібник / В.М. Кузнецов, Т.М. Бусарова, Т.А. Агошкова, І.В. Клименко, Н.В. Міхєєва; Дніпропетр. нац. ун-т залізн. трансп. ім. акад. В. Лазаряна. – Дніпро, 2017. – 104 с.

24. Роганін О. М. Математика : навч. посіб. / О. М. Роганін. – К. : Український центр підготовки абітурієнтів, 2014. – 384с.

25. Розв'язування задач з фізики. Практикум. За заг. ред. Є.В.Коршака. - К.: Вища школа, 1986. - 132 с.

26. Слівінська Л. А. Урок на тему: «Застосування похідної до дослідження функцій» / Л. А. Слівінська // Методичний вісник. – 2015. – №4.– с. 37-42

27. Соколенко Л.О. Збірник прикладних задач з алгебри і початків аналізу: Навч.- метод. посібник для вчителів і учнів 10-11 кл. середн. шк., ліцеїв та гімназій фізико-математичного спрямування. – Київ: ”Тираж”, 1997.-127с.

28. Соколенко Л.О., Філон Л.Г., Швець В.О. Прикладні задачі природничого характеру в курсі алгебри і початків аналізу: практикум. Навчальний посібник. –Київ: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2010.-128с.

29. Чуянов В. А. "Енциклопедичний словник юного фізика". М.: Педагогічна-Прес, 1999.

30. Елементи математичного аналізу похідна [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://disted.edu.vn.ua/courses/learn/5268

31. Застосування похідної у фізиці [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://martinenkoruslan425.blogspot.com/p/blog-page.html

32. Застосування похідної у фізиці [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://martinenkoruslan425.blogspot.com/p/blog-page_11.html

33. Застосування похідної у фізиці [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://martinenkoruslan425.blogspot.com/p/blog-page_22.html

34. Застосування похідної у фізиці [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://martinenkoruslan425.blogspot.com/p/blog-page_44.html

35. Ільченко О.В. Посібник з курсу “Математичний аналіз” [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://www.mechmat.univ.kiev.ua/wp-content/uploads/2021/03/posibnyk_ilchenko.pdf

36. Похідна та її застосування в алгебрі геометрії фізики [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://ua-referat.com/Похідна_та_її_застосування_в_алгебрі_геометрії_фізики

37. Різні типи прикладних задач, призначених для вивчення похідної та її застосувань в курсі алгебри і початків аналізу [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://erpub.chnpu.edu.ua:8080/jspui/bitstream/123456789/246/3/РІЗНІ%20ТИПИ%20ПРИКЛАДНИХ%20ЗАДАЧ%2С%20ПРИЗНАЧЕНИХ%20ДЛЯ%20ВИВЧЕННЯ%20ПОХІДНОЇ%20ТА%20ЇЇ%20ЗАСТОСУВАНЬ%20В%20КУРСІ%20АЛГЕБРИ%20І%20ПОЧАТКІВ%20АНАЛІЗУ.pdf

38. Узагальнення поняття похідної [Електронний ресурс] – Режим доступу: https://cyberleninka.ua/article/n/uzagalnennya-ponyattya-pohidnoyi/viewer

39. Формування навичок застосування поняття границі та похідної функції для розв’язування фізичних задач [Електронний ресурс] – Режим доступу: http://ped-series.kpnu.edu.ua/article/view/189465/188845