Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

на тему: «ВИКОРИСТАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ»

Виконала: студентка ІІ курсу, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Ольховецька Олександра Дмитрівна

Керівник: кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики
Ковальська Ірина Борисівна

Рецензент: кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач кафедри математики
Сморжевський Юрій Людвігович

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Математика завжди була важливим інструментом для розуміння та опису фізичних явищ у науці та інженерії. Формула Тейлора, яка стала вершиною у численних областях математики, фізики та інших природничих наук, не є винятком. Її потужна абстракція та висока універсальність дозволяють наближати складні функції, а також моделювати природні явища, за допомогою простих математичних інструментів.

Формула Тейлора є однією з фундаментальних математичних концепцій, яка має велике значення в фізиці та інших природничих науках. Вона дозволяє апроксимувати складні функції шляхом їх розкладання на ряди та наближеного обчислення значень функцій в точках. Її застосування у фізичних задачах розкриває перед нами нескінченні можливості для аналізу та розв'язання різноманітних проблем. Ця формула дозволяє наближено моделювати фізичні системи, описуючи їхні зміни у точці та аналізуючи їх поведінку в околі цієї точки. Таким чином, вона стає потужним інструментом для дослідження природних явищ та для розробки нових технологій [12].

Формула Тейлора для функцій є важливим інструментом у класичному аналізі через її різноманітні застосування. Ця формула використовується для розрахунку границь функцій, вивчення їхніх екстремумів, точок перегину, інтервалів опуклості та вгнутості, аналізу збіжності рядів і інтегралів, а також для оцінки швидкості їх збіжності чи розбіжності, серед інших застосувань. Завдяки поступовому розвитку обчислювальних технологій, фізики та інженерії тепер можна використовувати формулу Тейлора для розв'язання більш складних задач, які раніше було б важко або навіть неможливо розв'язати аналітично [5].

Формула Тейлора також має важливі практичні застосування у великому спектрі областей, включаючи інженерію, комп'ютерні науки, медицину, фінанси та багато інших. Інженери та науковці в цих галузях використовують цей математичний інструмент для оптимізації проектів, розробки нових технологій та вирішення реальних завдань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. У сучасній освітній системі математичні знання відіграють ключову роль, особливо в контексті природничих і технічних наук. Професійний розвиток учнів та студентів значно полегшується завдяки навчанню математики, яка є основою багатьох предметів.

На жаль, досі не існує системної програми, яка б враховувала специфіку спільних математичних аспектів між такими предметами, як фізика та математика [2]. Дослідження показують, що відсутність своєчасного засвоєння математичних понять, які є важливими для успішного вивчення курсу фізики, призводить до того, що студентам, які добре володіють математикою, може бути важко вирішувати фізичні завдання з аналогічними математичними аспектами. Все це підкреслює важливість розробки спеціальних навчальних посібників [5], які б допомагали засвоювати математичні концепції, необхідні для розуміння і успішного вивчення фізики.

Метою даної магістерської роботи є вивчення та аналіз застосування формули Тейлора у фізичних задачах, а також розкриття її потенційних можливостей та обмежень в цьому контексті. Робота спрямована на розширення розуміння теоретичних та практичних аспектів використання цієї математичної концепції в фізичних задачах.

З огляду на мету дослідження для вирішення постають наступні *завдання*:

- вивчити основні поняття, необхідні для розуміння формули Тейлора;
- дослідити формулу Тейлора для функції однієї змінної;
- розглянути формулу Тейлора для функції двох змінних;
- оглянути фізичні задачі, які можна розв'язати за допомогою формули Тейлора;
- провести дослідження та обговорення використання формули Тейлора для розв'язання фізичних задач.

Об'єктом дослідження є застосування формули Тейлора у фізичних задачах. В даному контексті об'єктом є фізичні явища, процеси та моделі, для яких може бути використана формула Тейлора з метою отримання аналітичних розв’язків або чисельних наближень.

Предметом дослідження є формула Тейлора, її математичні властивості, розширення та модифікації, а також практичне застосування у конкретних фізичних задачах.

Методи дослідження. Для досягнення поставленої мети в дипломній роботі магістра були використані такі методи дослідження, як аналіз наукової та методичної літератури та наукових публікацій, які стосуються застосування формули Тейлора у фізичних задачах; математичний аналіз та розгляд основних властивостей формули Тейлора; вивчення конкретних прикладів фізичних задач, де формула Тейлора може бути застосована; дослідження чисельних методів та алгоритмів для використання формули Тейлора у фізичних обчисленнях.

Практична значимість даної роботи полягає в можливості використовувати формулу Тейлора для отримання точних або наближених розв’язків в різних фізичних задачах, що може бути корисним для науковців та інженерів, які працюють у галузі фізики та природничих наук.

Наукова новизна даної магістерської роботи полягає в системному аналізі застосування формули Тейлора у фізичних задачах та розгляді нових можливостей та підходів до використання даної математичної концепції. Робота розкриває можливості застосування формули Тейлора в різних галузях фізики та може внести важливий внесок у їх вивчення.

Структура роботи. Дипломна робота магістра складається зі вступу, двох розділів із підрозділами, висновків та списку використаної літератури.

РОЗДІЛ 1.ФОРМУЛА ТЕЙЛОРА ДЛЯ ФУНКЦІЇ ОДНІЄЇ ТА ДВОХ ЗМІННИХ

1.1 Основні поняття, необхідні для розуміння формули Тейлора

Грецький філософ Зенон розглядав питання суми нескінченного ряду, як спробу досягнення скінченного результату, але відкинув цю ідею як неможливу, і це призвело до відомого парадоксу Зенона. Пізніше, Арістотель спробував філософський підхід до цього питання, але не дійшов математичного висновку. Такий висновок знайшов Архімед, використовуючи метод вичерпування, що дозволяє обробити нескінченну кількість поділів і отримати скінченний результат.

Ряди Тейлора і методи, пов'язані з ними, були вперше застосовані в 14-му столітті Мадхавою з Сандамаграми. Навіть якщо його роботу не збережено, індійські математики пізніших часів вказують на те, що він досліджував ряди Тейлора для різних функцій, включаючи тригонометричні, такі як синус, косинус, тангенс і арктангенс. Керальська школа математики і астрономії до 16-го століття розвивала його ідеї, розширюючи ряди і створюючи раціональні наближення [9].

У 17-му столітті Джеймс Грегорі також вніс вклад у цю область та опублікував ряди Маклорена. Проте загальний метод побудови рядів Тейлора для різних функцій був офіційно запропонований тільки в 1715 році Бруком Тейлором, і зараз ці ряди відомі саме під його ім’ям. Іноді цей ряд також називається рядом Маклорена, на честь іншого шотландського математика Маклорена, який використовував його в своїх дослідженнях. Основна ідея полягає в тому, що будь-яка функція може бути наближена за допомогою скінченної кількості членів ряду Тейлора. Цей наближений поліном називається многочленом Тейлора. Теорема Тейлора дозволяє оцінювати точність такого наближення і вказує на можливі похибки [11].

Ряд Тейлора є результатом ускладнення многочленів Тейлора зі зростанням їх степенів. Принциповою є важливість збіжності цього ряду до функції за певних умов. Варто зауважити, що функція може не збігатися до свого ряду Тейлора, навіть якщо ряд збігається в кожній точці. Функція, яка співпадає зі своїм рядом Тейлора на певному відкритому інтервалі (чи в колі в комплексній площині), називається аналітичною в цьому інтервалі.

Вивчення ряду Тейлора доцільно починати з розгляду ідеї та важливості цієї математичної концепції. Іноді нам потрібно наблизити значення функції або отримати її апроксимацію в околі певного значення аргумента x. У фізиці часто виникає ситуація, коли нам цікавий вигляд функції навколо нуля. Якщо ми намагаємося знайти наближений вираз для функції у вигляді нескінченного ряду

$$y(x) = C_0 + C_1x + +C_2x^2 + C_3x^3 + \cdots,$$

то такий ряд називається рядом Маклорена, і він є найпростішим випадком ряду Тейлора. Для того щоб записати цей ряд для конкретної функції, нам потрібно знайти значення коефіцієнтів $C_0, C_1, C_2 \ldots$

На цьому етапі варто запропонувати обчислити коефіцієнти розвинення для конкретної функції, наприклад, $3y = 2 + x^3$. Проте, важливо зрозуміти, що для виконання цього завдання не потрібно запам'ятовувати формули для коефіцієнтів ряду Маклорена. Достатньо знати, що розвинення в ряд Маклорена - це розвинення за невід'ємними цілими степенями аргумента. Тоді можна просто правильно розкрити дужки у виразі: $(2 + x)(2 + x)(2 + x)$.

Перед тим як отримати загальну формулу для коефіцієнтів розвинення в ряд Маклорена, важливо розглянути геометричний зміст апроксимації функції поліномом разом з учнями. Ми можемо встановити, що поліном першого степеня $(C_0 + C_1x)$ - це вираз для дотичної до графіка вихідної функції у точці $x = 0$. І тоді стає очевидним, що $C_0 = y(0)$, а $C_1 = y'(0)$.

Тепер можемо спростити вирази для похідних:

$$y'(x) = C_1 + 2C_2x + 3C_3x^2 + \cdots + nC_nx^{n-1}$$
$$y''(x) = 2C_2 + 6C_3\,x + \cdots + n(n-1)C_nx^{n-2}$$

Після отримання виразу для n-тої похідної:

$$y^{(n)}(x) = n!\,C_n + (n+1)!\,C_{n+1}\,x + \cdots$$

Можна записати кінцеву формулу для ряду Маклорена. Дійсно, достатньо підставити $x = 0$, і отримаємо:

$$C_n = \frac{y^{(n)}(0)}{n!}$$

Отже, ряд Маклорена має наступний вигляд:

$$y(x) = y(0) + y'(0)x + \frac{y''(0)x^2}{2!} + \frac{y'''(0)x^3}{3!} + \ldots$$

Використовуючи цю формулу, можна легко отримати розвинення важливих функцій. Наприклад:

$$\sin(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^6}{6} + \cdots$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Розглянемо ситуацію, коли інтегрування допомагає нам знайти розвинення функції $y = arctg(x)$. Ми знаємо похідну цієї функції:

$$\frac{d}{dx}(\mathrm{arctg}(x)) = \frac{1}{1+x^2}$$

Тепер розглянемо розвинення цієї похідної в ряд Маклорена:

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots$$

Тут ми скористалися формулою, яку отримали раніше, замінивши x на $-x$ (тобто b_1 у відповідній геометричній прогресії, як і раніше, буде дорівнювати одиниці, але $q = -x^2$). Тепер інтегруємо це рівняння:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots.$$

Знайдемо значення сталої, використовуючи умову $arctg(0) = 0$. Отже, отримуємо розклад функції $arctg(x)$ в ряд Маклорена у вигляді:

$$arctg(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots$$

Той самий метод можна використовувати для розвинення функції $y = ln(1 + x)$. Можемо отримати перші доданки ряду, використовуючи загальну формулу, але також існує інший спосіб.

Зрозуміло, що ряд Маклорена, про який ми говорили, матиме однаковий вигляд для будь-якого натурального m. Але для натуральних значень m можна легко отримати перші доданки цього ряду, оскільки коефіцієнти перед першими степенями x можна знайти за допомогою комбінаторних міркувань.

Наприклад, для функції $y = 1 + x,$ ми можемо легко отримати перші доданки розкладу в ряд Маклорена, встановивши $m = 2$:

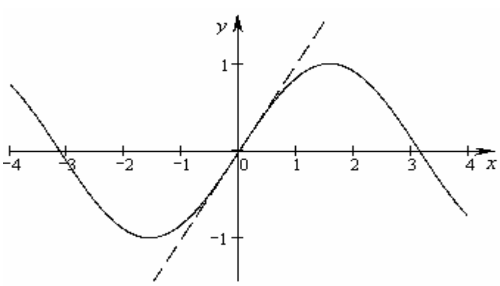
$$1 + x = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots.$$

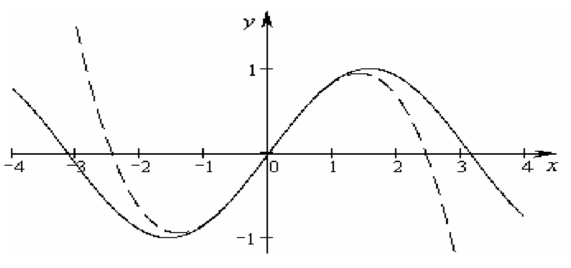
Ці коефіцієнти перед першими степенями x можна знайти, розглядаючи кількість способів вибрати деяку кількість членів з добутку $(1 + x)^m$. Тут також можна згадати біном Ньютона та трикутник Паскаля.

Якщо m не є натуральним числом, це не справляє вплив на цю формулу. Отже, перші доданки розкладу для функції y=1+x можна отримати, встановивши $m = \frac{1}{2}$:

$$1 + x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^8}{16} + \cdots.$$

Для практичного використання розвинень функцій в ряд Маклорена у фізичних задачах важливо визначити, скільки ненульових членів потрібно враховувати у кожній конкретній ситуації. Це можна зробити, будуючи графіки функцій і аналізуючи їх поведінку. Для цього можна використовувати різноманітні програмні засоби, такі як MathCad. Графіки допоможуть легше уявити математичні концепції і переконатися у важливості вивченого матеріалу [1] (рис. 1.1 – 1.4).

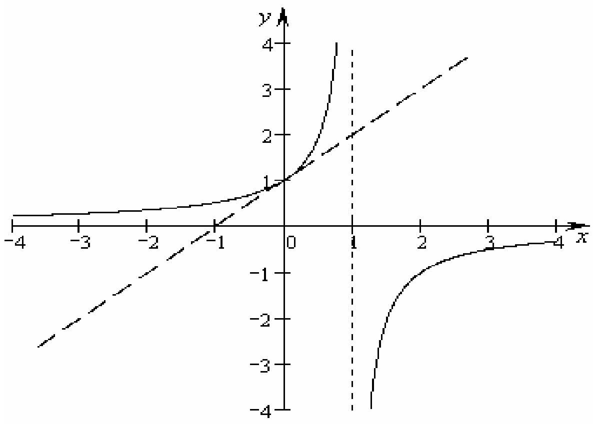


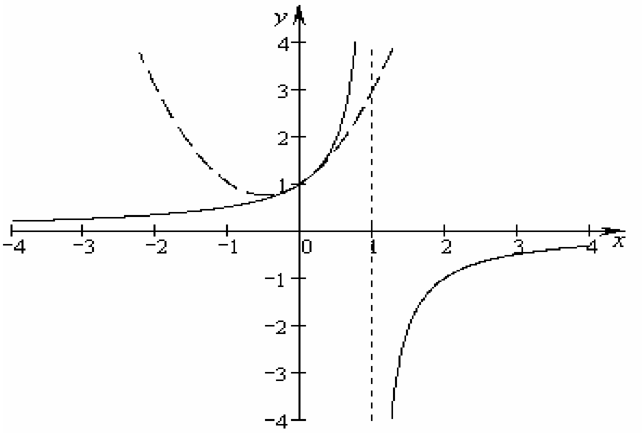


x^3

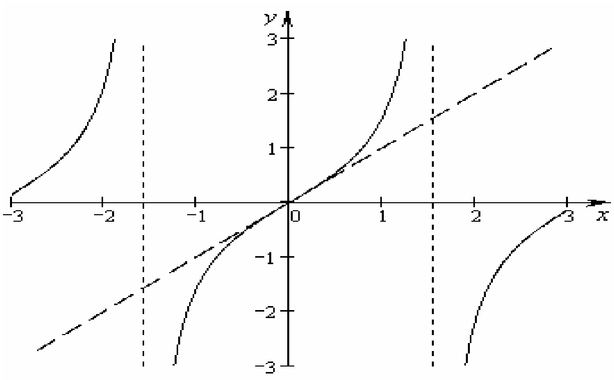
$\sin x \approx x$ $\qquad\qquad$ $\sin x \approx x - \frac{x3}{3}$

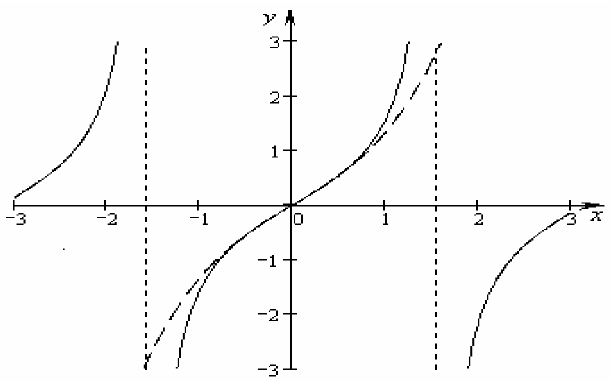
Рис. 1.1





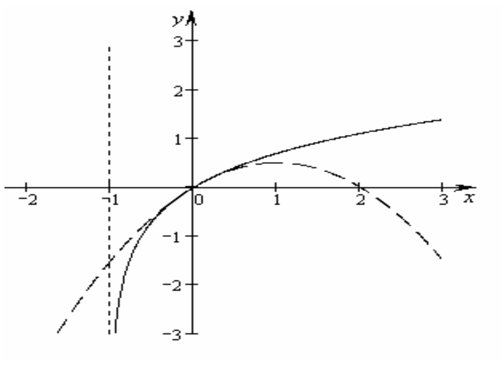
$\frac{1}{1-x} \approx 1 + x$ $\qquad\qquad$ $\frac{1}{1-x} \approx 1 + x + x^2$

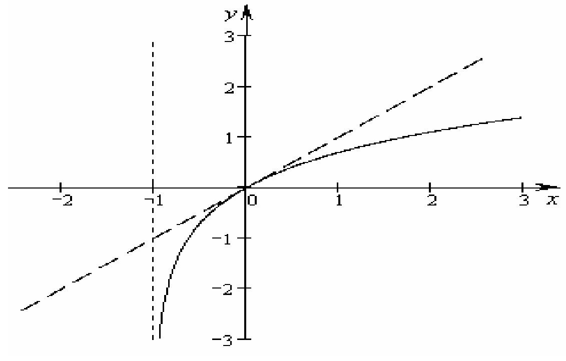




$\text{tg}x \approx x$ $\qquad\qquad$ $\text{tg}x \approx x + \frac{1}{3}\, x3$

Рис. 1.3





$\ln(1 + x) \approx x$ $\qquad\qquad$ In (1+x)$\approx x - \frac{x2}{2}$

Ці рисунки дозволяють учням "відчути" значення виразу "при малих значеннях x" у випадках, коли ми обмежуємося певною кількістю членів ряду Маклорена для наближення конкретної функції. Перехід від ряду Маклорена до ряду Тейлора виконується досить легко, і це просто лінійне перетворення змінної, коли ми розвиваємо функцію в околі точки x=a.

Формула Тейлора - це математичний результат, який дозволяє апроксимувати складні функції за допомогою поліномів більш простого вигляду. Вона виникла в результаті розвитку теорії функцій і чисельних методів. Формула Тейлора допомагає аналізувати властивості функцій в точках і розглядати їх поведінку. Її історія пов'язана з роботою математиків Леонарда Ейлера та Брука Тейлора в 18 столітті. Цей математичний інструмент є важливим для численних областей, включаючи фізику, інженерію та чисельний аналіз.

Формула Тейлора грає важливу роль у різних галузях науки і дозволяє вирішувати різноманітні завдання, де необхідно аналізувати або апроксимувати функції. Вона є одним із фундаментальних математичних інструментів, що допомагає розглядати складні явища у більш простому світлі. Застосування формули Тейлора допомагає вирішувати різні завдання, такі як обчислення значень функцій в точках, де вони складні для аналізу, знаходження апроксимованих значень похідних функцій, а також розв'язування диференціальних рівнянь. Цей інструмент став важливим у численних наукових дисциплінах таі інженерії, допомагаючи моделювати та розуміти різноманітні явища в природі та технологіях [15].

Застосування формули Тейлора в математиці має величезне значення через наступні аспекти [11]:

1) дозволяє аналізувати та розуміти властивості складних функцій, включаючи їхню поведінку в околі конкретних точок. Це допомагає математикам розкривати структуру функцій та властивості, такі як екстремуми, точки перегину та інші характеристики.

2) може бути використана для розв'язання диференціальних рівнянь та інших математичних задач. Вона дозволяє наближено знаходити розв'язки та апроксимувати їхню поведінку в околі заданих точок.

3) за допомогою формули можна обчислювати інтеграли, які важко або навіть неможливо обчислити аналітично. Вона використовується в чисельних методах для апроксимації інтегралів.

4) в математичних статистичних дослідженнях формула може використовуватися для апроксимації розподілів і функцій ймовірностей. Вона допомагає розробляти статистичні методи і моделі.

5) використовується для дослідження динамічних систем, включаючи системи диференціальних рівнянь. Вона дозволяє розглядати стабільність, точки рівноваги та інші важливі характеристики таких систем.

Важливість формули Тейлора полягає в тому, що вона надає математикам потужний інструмент для аналізу та моделювання різних математичних явищ. Вона є основою для багатьох чисельних методів і досліджень у математиці та пов'язаних галузях науки.

Формула Тейлора має важливі застосування для розв'язання фізичних задач у різних галузях фізики. Формула Тейлора може бути використана для апроксимації траєкторій руху тіл у фізичних системах. Наприклад, в механіці формула Тейлора дозволяє прогнозувати майбутнє положення об'єкта на основі вихідних даних про його швидкість та прискорення. В електродинаміці формула Тейлора використовується для розв'язання рівнянь Максвелла та апроксимації електромагнітних полів у визначених умовах [2].

У термодинаміці формула Тейлора може бути застосована для апроксимації фізичних величин, таких як температура, тиск та об'єм, у функції стану газів та рідин. У квантовій механіці формула Тейлора може бути використана для апроксимації енергетичних рівнянь та хвильових функцій систем квантових частинок. В оптиці формула Тейлора допомагає апроксимувати властивості оптичних систем, таких як фокусна відстань, зсув фази та інші параметри лінз та дзеркал [5].

Загалом, формула Тейлора в фізичних задачах допомагає спростити та розуміти складні фізичні явища, а також вирішувати завдання, де аналіз та моделювання є ключовими. Вона є потужним інструментом для вивчення руху тіл, розгляду електродинамічних та термодинамічних процесів, аналізу поведінки частинок у квантовій механіці, оптиці та багатьох інших галузях фізики. Завдяки формулі Тейлора фізики можуть отримувати точні результати та розв'язувати складні задачі, використовуючи апроксимацію фізичних величин та функцій. Вона допомагає розробляти теоретичні моделі, спрощувати аналіз фізичних систем і дозволяє враховувати вплив різних факторів на результати досліджень.

Отже, формула Тейлора є невід'ємною частиною фізичної науки, яка допомагає фізикам розкрити та пояснити складні фізичні явища, проводити обчислення та вдосконалювати наукові теорії та моделі. Вона дозволяє перетворювати складні фізичні системи на більш зрозумілі та аналізовані моделі, що допомагає зрозуміти природу навколишнього світу та розвивати нові технології на основі фізичних принципів.

1.2 Формула Тейлора для функції однієї змінної

Функцію $R_n(x)$ визначаємо як різницю між значеннями функції $f(x)$ і побудованого многочлена $P_n(x)$: $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. З цього випливає, що функцію $f(x)$ можна виразити як суму $R_n(x)$ і $P_n(x)$: $f(x) = R_n(x) + P_n(x)$. Це вираження можна розгорнути наступним чином:

$$P_n(x) = f(x_0) + (x - x_0) + (x - x_0)^2 + \ldots + (x - x_0)^n + R_n(x)$$

Ця формула відома як формула Тейлора, і функцію $R_n(x)$ називають залишковим членом формули Тейлора. Залишковий член $R_n(x)$ визначає похибку наближення функції $f(x)$ її многочленом $P_n(x)$. Якщо припускаємо, що залишок $R_n(x)$ є малим, то його можна ігнорувати з невеликою похибкою. Це дозволяє нам отримати наближену формулу:

$$P_n(x) \approx f(x_0) + (x - x_0) + (x - x_0)^2 + \ldots + (x - x_0)^n,$$

що дає нам можливість наближено знаходити значення функції $f(x)$.

Формула Тейлора для функцій однієї змінної є математичним інструментом, який дозволяє апроксимувати складні функції у вигляді поліномів більш простого вигляду. Формула Тейлора виглядає так:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)2 + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)3 + \cdots$$

де:

$f(x)$ - це функція, яку ми апроксимуємо.

a - це точка, навколо якої ми розглядаємо апроксимацію.

$f(a)$ - значення функції у точці a.

$f'(a)$ - перша похідна функції у точці a (похідна відносно x).

$f''(a)$ - друга похідна функції у точці a.

$f'''(a)$ - третя похідна функції у точці a (ділене на факторіал числа 3, щоб врахувати вагу доданку).

Так само продовжуємо додавати інші похідні, які діляться на відповідні факторіали, для отримання додаткових доданків ряду.

Формула Тейлора використовується для аналізу функцій, обчислення значень функцій, обчислення похідних та інтегралів, і вона має широке застосування в численних галузях математики, фізики, інженерії та інших наукових дисциплінах.

Постановка формули Тейлора передбачає апроксимацію функції $f(x)$ навколо точки a, і ця апроксимація стає точнішою, коли враховуються більше членів многочлену Тейлора. Якщо ми хочемо апроксимувати функцію з більшою точністю, ми можемо включити більше членів у формулу. Зазвичай перші кілька членів формули Тейлора найбільше використовуються, і це називається "ряд Тейлора першого порядку" або "лінійне наближення". Воно виглядає так:

$$T(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

Це лінійна апроксимація, де перший член $f(a)$ відповідає значенню функції $f(x)$ в точці a, а другий член $f'(a)(x-a)$ враховує нахил функції у точці a. Якщо додати ще один член, то ми отримаємо квадратичне наближення:

$$T(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2$$

Ця форма вже краще враховує поведінку функції в околі точки a, оскільки включає другу похідну $f''(a)$. На практиці, формула Тейлора дозволяє нам апроксимувати складні функції та обчислювати значення функцій в точках, де вони можуть бути складними для обчислення безпосередньо.

Загалом, формула Тейлора дає засіб апроксимувати складні функції за допомогою многочленів, і вона є корисним інструментом у численних галузях математики, фізики та інших наук. Зважаючи на бажану точність апроксимації, формула Тейлора може бути записана з більшим або меншим числом членів. Ось загальна постановка формули Тейлора для функції однієї змінної:

Для функції $f(x)$ і точки a, формула Тейлора в n −му ступені наближення має вигляд:

$$T(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3}(x-a)^3 + \cdots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

де:

$T(x)$ - многочлен Тейлора, який апроксимує функцію $f(x)$ навколо точки a;

$f(a)$ - значення функції $f(x)$ в точці a;

$f'(a)$, $f''(a)$, $f'''(a)$ і так далі - похідні функції $f(x)$ в точці a. Перший, другий, третій і так далі похідні відповідають першому, другому, третьому і так далі членам розкладу.

Факторіали $1!, 2!, 3!...$ - це факторіали, які використовуються у знаменниках кожного члена послідовності. Наприклад, $n!$ - це факторіал числа n.

За допомогою формули Тейлора можна апроксимувати функції, визначити їх значення в точках, вивчати їх поведінку та властивості. Додавання більше членів у розклад дозволяє отримати більш точну апроксимацію в обраному околі точки a. У межах цього околу многочлен Тейлора стає дуже схожим на саму функцію $f(x)$, що дозволяє проводити аналіз та обчислення з більшою точністю.

Зважаючи на бажану точність апроксимації та ступінь многочлена Тейлора n, формула Тейлора для функцій однієї змінної може бути записана більш докладно у вигляді.

Для функції $f(x)$ та точки a, формула Тейлора n-го порядку має вигляд:

$$T_n(x) = f(a) + (x-a)\frac{f'(a)}{1!} + \frac{(x-a)^2}{2!}\,\frac{f''(a)}{2!} + \frac{(x-a)^3}{3!}\,\frac{f'''(a)}{3!} + \cdots + \frac{(x-a)^n}{n!}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

де:

$T_n(x)$ - це многочлені Тейлора n −го порядку, який апроксимує функцію $f(x)$ навколо точки a.

$f(a)$ - значення функції $f(x)$ в точці a.

$f'(a),\ f''(a),\ f'''(a)$ і так далі - похідні функції $f(x)$ в точці a. Перший, другий, третій і так далі похідні відповідають першому, другому, третьому і так далі членам розкладу.

Факторіали $1!, 2!, 3!$ і так далі - це факторіали, які використовуються у знаменниках кожного члена послідовності. Наприклад, $n!$ - це факторіал числа n. У межах обраного степеня точності n, многочлен Тейлора $T_n(x)$ наближає функцію $f(x)$ в околі точки a. Чим більше членів включено у розклад (від першого до n-го), тим більш точно апроксимація відповідає оригінальній функції в цьому околі.

Важливо відзначити, що точність апроксимації зростає зі збільшенням степеня n, але також залежить від того, наскільки "близько" точка x до точки a. Іншими словами, формула Тейлора надає локальну апроксимацію функції в околі точки a, і точність апроксимації зменшується з віддаленням від цієї точки.

1.3 Застосування формули Тейлора для апроксимації функцій

Формула Тейлора - це математичний інструмент, який дозволяє наближено виразити функцію у вигляді ряду за допомогою її похідних в точці, яку ми називаємо центром розвинення. Така апроксимація корисна, коли ми хочемо аналізувати або обчислити значення функції в околі центру розвинення. Основна формула Тейлора для функції $f(x)$ в точці а виглядає так:

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f'(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{f''(a)}{3!}(x-a)^3 + \cdots$$

де:

$f(a),\ f'(a),\ f''(a),$ - це похідні функції $f(x)$ в точці a.

Для апроксимації функції фіксованого порядку n ми можемо обрізати цей ряд до $n-$ го члена:

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

Ця апроксимація може бути корисною, коли функція складна для обчислення або аналізується в околі точки a. Також ця формула використовується для наближеного обчислення значень функцій і виведення інших важливих результатів у математиці, фізиці, інженерії та інших галузях.

Давайте розглянемо приклад апроксимації функції за допомогою формули Тейлора. Припустимо, ми хочемо апроксимувати функцію e^x навколо точки $a = 0$ (центр розвинення). Похідні функції e^x виглядають так:

$$f(x) = e^x, f''(x) = e^x, f'''(x) = e^x, f''''(x) = e^{\ x} \ldots$$

Тепер можемо використовувати формулу Тейлора для апроксимації функції e^x в точці $a = 0$:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \cdots$$

Це розкладає функцію e^x в ряд, який може бути використаний для апроксимації значень e^x для різних значень x, близьких до 0. Чим більше членів ряду ми використовуємо, тим точніше буде наближення до функції e^x. Це лише один приклад застосування формули Тейлора для апроксимації функцій, і цей метод може бути застосований до багатьох інших функцій і точок розвинення.

Розглянемо кілька важливих застосувань [14].

1) У фізиці формула Тейлора дозволяє апроксимувати складні фізичні функції та процеси. Наприклад, для опису руху об'єкту вздовж траєкторії можна використовувати ряд Тейлора для апроксимації шляху, швидкості та прискорення.

2) Формула Тейлора допомагає виводити нові математичні результати та досліджувати властивості функцій. Наприклад, вона може бути використана для доведення різних математичних тверджень і теорем.

3) Формула Тейлора може бути використана для обчислення складних інтегралів, апроксимуючи функцію під інтегралом поліномами Тейлора та обчислюючи їхні інтеграли. Це корисно в чисельних методах і обчислювальній математиці.

4) В динаміці систем формула Тейлора може бути використана для апроксимації розв'язків диференціальних рівнянь. Це допомагає вивчати стійкість систем і передбачати їхню поведінку в майбутньому.

5) У фізиці та інженерії формула Тейлора може бути використана для аналізу фізичних явищ, таких як розповсюдження хвиль, оптичні явища, електричні коливання.

6) У фінансовій математиці ряди Тейлора можуть бути використані для апроксимації цін на фінансові інструменти, оцінки ризику та прийняття фінансових рішень.

7) У деяких застосуваннях машинного навчання та обробки сигналів ряди Тейлора можуть використовуватися для розкладу сигналів і даних у більш прості або аналізовані компоненти.

Загалом, формула Тейлора є потужним інструментом для апроксимації та аналізу функцій, і вона знаходить застосування у багатьох галузях науки та технології. Розглянемо конкретні приклади застосування формули Тейлора для апроксимації функцій:

Синус та косинус. Функції синус і косинус можуть бути апроксимовані за допомогою рядів Тейлора. Наприклад, апроксимація синуса:

$$sin(x) \approx x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots$$

Апроксимація косинуса:

$$cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \cdots$$

Ці ряди корисні в обчисленнях, дослідженні коливан і хвиль у фізиці та інженерії.

Експоненціальна функція. Функцію експоненти e^x можна апроксимувати рядом Тейлора навколо нуля:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

Ця апроксимація допомагає в обчисленнях, особливо в областях, де потрібно працювати з експоненціальними функціями.

Фізика. У фізиці формула Тейлора використовується для апроксимації руху об'єктів. Наприклад, рух тіла зі змінною швидкістю або прискоренням може бути описаний за допомогою рядів Тейлора.

Обчислення чисел. Формула Тейлора може бути використана для обчислення складних математичних функцій, таких як логарифми, тригонометричні функції і інші. Наприклад, апроксимація логарифму:

$$ln(x) \approx (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + \frac{(x-1)^3}{3} - \cdots$$

Обчислення інтегралів. Формула Тейлора може бути використана для апроксимації функцій під інтегралами. Це корисно в чисельних методах для обчислення інтегралів.

Фінанси. У фінансовій математиці формула Тейлора може бути використана для апроксимації цін на фінансові інструменти, які залежать від складних факторів.

Сигнальна обробка. У сигнальній обробці формула Тейлора може бути використана для апроксимації та аналізу сигналів, де нам потрібно виділити або моделювати певні компоненти сигналу.

Ці приклади показують, як формула Тейлора може бути застосована для апроксимації функцій у різних наукових та інженерних областях. Вона допомагає спрощувати складні задачі та обчислення, зробивши їх більш зрозумілими та доступними для аналізу.

Функцію можна наближено подати за допомогою обмеженої кількості членів ряду Тейлора. Теорема Тейлора дозволяє нам визначити, наскільки точним буде таке наближення і вказує, яку похибку ми робимо, використовуючи це наближення. Многочлен, який складається з обраних початкових членів ряду Тейлора, називається многочленом Тейлора.

Ряд Тейлора для певної функції є результатом розгортання многочленів Тейлора цієї функції з усе більшою кількістю членів, при умові, що існує границя для цього процесу. Важливо зазначити, що функція може відрізнятися від свого ряду Тейлора, навіть якщо ряд збігається в кожній окремій точці.

Функція, яка співпадає зі своїм рядом Тейлора на певному відкритому інтервалі (або в колі в комплексній площині), називається аналітичною на цьому інтервалі [8].

Приклад. Апроксимація спектра перетворення.

Нехай у нас є система електричних ланцюгів, і ми хочемо апроксимувати спектральні характеристики цієї системи в околі певної частоти ω_0 за допомогою ряду Тейлора. Припустимо, що ми маємо функцію передачі $H(\omega)$, яку ми хочемо апроксимувати.

Визначимо функцію передачі $H(\omega)$ у вигляді ряду Тейлора в околі частоти ω_0:

$$H(\omega) = H(\omega_0) + (\frac{dH}{d\omega})|\omega_0 * (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}(\frac{d^2H}{d\omega^2})|\omega_0 * (\omega - \omega_0)^2 + \ldots$$

де:

$H(\omega_0)$ - значення функції передачі при частоті ω_0, $(\frac{dH}{d\omega})|\omega_0$ - похідна функції передачі при частоті при ω_0 і так далі.

Для апроксимації на кожній частоті ми можемо обчислити обернену матрицю вузлових провідностей (або інших параметрів системи), які визначають функцію передачі. Ця обернена матриця допоможе нам відновити параметри системи зі спектральних даних. Для розрахунку похідних можна використовувати чисельні методи, такі як метод скінчених різниць або символьні обчислення в програмах для обробки сигналів або аналізу систем.

Приклад. Апроксимація спектра акустичної системи.

Нехай у нас є акустична система, така як мікрофон, яка реагує на звуки різних частот. Ми хочемо апроксимувати спектральні характеристики цього мікрофона для певної частоти.

Функція передачі акустичної системи H(ω) визначає, як мікрофон реагує на звук різних частот. Ми хочемо апроксимувати $H(\omega)$ навколо певної частоти ω_0. Використовуючи ряд Тейлора, ми можемо виразити $H(\omega)$ у вигляді ряду, схожого на попередній приклад:

$$H(\omega) = H(\omega 0) + (\frac{dH}{d\omega})|\omega_0 * (\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}(\frac{d^2H}{d\omega^2})|\omega_0 * (\omega - \omega_0)^2 + \ldots$$

де:

$H(\omega_0)$ - значення функції передачі при ω_0 , $(\frac{dH}{d\omega})|\omega_0$ - похідна функції передачі при частоті при ω_0 і так далі.

Для обчислення похідних $(\frac{dH}{d\omega})|\omega_0, (\frac{d^2H}{d\omega^2})|\omega_0$ та інших параметрів можна використовувати символьні обчислення в програмах, таких як MATLAB або Python з бібліотекою SymPy. Це дозволяє отримати числові значення цих похідних для подальших обчислень.

За допомогою отриманих апроксимацій можна аналізувати, як мікрофон реагує на звуки поблизу частоти ω_0 і використовувати цю інформацію для подальших досліджень або налаштування системи. Це приклад апроксимації спектрів перетворень для акустичної системи з використанням ряду Тейлора та обчисленнями похідних для аналізу реакції системи на звукові хвилі

1.4 Формула Тейлора для функцій двох змінних

Згадаємо, що коли функція однієї змінної $F(t)$ має неперервні похідні до $(n+1)$ −го порядку на відрізку $[\alpha, \beta]$, то маємо формулу Тейлора:

$$F(t) = F(t_0) + (t - t_0)F'(t_0) + (t - t_0)^2 \frac{F''(t_0)}{2} + \ldots + (t - t_0)^{\mathrm{n}} \frac{F^{\mathrm{n}}(t_0)}{n!} + R^t,$$

де t_0 - точка розвинення, $0 < \theta < 1$, та t належить відрізку $[\alpha, \beta]$.

Для скорочення, можна використовувати приріст t_0, позначений як $\Delta t = t - t_0$. Тоді формула Тейлора записується так:

$$F(t) = F(t_0) + \Delta t F'(t_0) + (\Delta t)^2 \frac{F''(t_0)}{2} + \ldots + (\Delta t)^n \frac{F^n(t_0)}{n!} + R^t,$$

де $F'(t_0), F''(t_0)$, ... - похідні функції $F(t)$ у точці t_0.

Дана формула може бути корисною для апроксимації значень функцій в околі точки t_0 з використанням їх похідних. Аналогічна формула Тейлора також може бути отримана для функцій багатьох змінних.

Розглянемо функцію з двома змінними $z = f(x, y)$, яка має неперервні частинні похідні до $(n+1)$ −го порядку включно в області D. Візьмемо дві точки $M(x_0, y_0)$ та $M(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$, такі, що відрізок MM_{01} належить області D.

Введемо нову змінну t за допомогою таких формул: $x(t) = x_0 + t\Delta x, y(t) = y_0 + t\Delta y,$ де $0 \leq t \leq 1$.

При $t = 0$, ці формули дають координати точки M_0, а при $t = 1$ - координати точки M_1. Під час зміни t від 0 до 1 точка $M(x(t), y(t))$ рухається вздовж відрізка MM_{01}. Тоді функція $f(x, y)$ стає функцією однієї змінної t:

$$f(x, y) = f(x(t), y(t)) = F(t), \text{де } F(t) = f(x(t), y(t)).$$

Запишемо формулу для функції F при $t = 0, \Delta = t = 1$:

$$F(1) = F(0) + \Delta F(0) + (\Delta F/\Delta t)(0) \\ + (1/2)(\Delta^2 F/\Delta t^2)(0)\Delta t^2 + \ldots + (1/n!)(\Delta^{\mathrm{n}} F/\Delta t^{\mathrm{n}})(0)\Delta t^{\mathrm{n}}$$

Ця формула дозволяє апроксимувати значення функції F в точці $t = 1$, використовуючи похідні функції f в точці $t = 0$ та приріст $t = 1$. Аналогічно до попереднього виразу, розглянемо диференціали, що входять в формулу. За рівностями, ми маємо:

$$dF = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{\partial y}\, dy$$

$$d^2F = f\,(x^2)(dx)^2 + 2f(xy)\, d(x)\, d(y) + f(y^2)(dy)^2.$$

Оскільки ми розглядаємо значення в точці $t = 0, \Delta = t = 1$, то ми можемо позначити функції та їх похідні в точці M_{00} та M_{10} як f_{00}, f_{10}, f_{01}. Тоді, використовуючи вищевказані диференціали, ми можемо обчислити dF в точці $t = 0$:

$$dF(0) = f_{00}dx + f_{01}dy + f_{10}dx + f_{11}dy \\ = (f_{00} + f_{10})dx + (f_{01} + f_{11})dy.$$

Підставивши цей результат у формулу Тейлора, ми отримаємо вираз приросту $\Delta F(0)$ у вигляді суми доданків, які містять похідні функції $f(x, y)$ та їх похідні в точці M_{00}.

Аналогічно, для більш високих похідних, ми можемо обчислити їх у вигляді суми доданків, що містять похідні функцій $f(x, y)$ та їх похідні в точці M_{00}, і використовувати їх для побудови апроксимації функції F в точці $t = 1$ за допомогою формули Тейлора. Ця процедура може бути повторена для похідних більшого порядку, отримуючи прирости ΔF для різних порядків похідних функції $f(x, y)$ та їх похідних в точці M_{00}.

Формулу, яку ми розглядаємо, називають формулою Тейлора для функції двох змінних з залишковим членом R^{+1} у формі Лагранжа. Ця формула застосовується для наближених обчислень функції $f(x, y)$. При різних значеннях n отримуємо формули різного порядку точності для наближеного обчислення значень функції $f(x, y)$. Абсолютну похибку цих наближених обчислень оцінюють за допомогою залишкового члена R^{+1}.

Повний диференціал функції дозволяє обчислити наближене значення функції при малих змінах її аргументів. Використовуючи повний диференціал, ми можемо записати наближене значення функції за допомогою формули Тейлора.

Повний диференціал функції $f(x, y)$ записується як:

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}\, dx + \frac{\partial f}{dy}\, dy$$

Це вираз вказує на те, як зміниться значення функції f в результаті малих змін її аргументів x і y. За допомогою цього повного диференціалу, можна обчислити наближене значення функції поблизу точки $(x_0,\ y_0)$ з використанням формули Тейлора:

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + (\frac{\partial f}{\partial x} \,||\, (x_0, y_0))\Delta x + (\frac{\partial f}{dy} \,||\, (x_0,\ y_0))\Delta y$$

де:

$\Delta x = x - x_0$ і Δy

$= y - y_0 -$ це малі зміни аргументів від точки (x_0, y_0),

$(\frac{\partial f}{\partial x} \,||\, (x_0, y_0))$ і $(\frac{\partial f}{dy} \,||\, (x_0, y_0))$ - частинні похідні функції f по x і y в точці (x_0, y_0).

Ця рівність буде тим точніша, що менший приріст Δx і Δy. Формула Тейлора для функцій двох змінних виглядає так:

$$f(x,y) \approx f(x_0, y_0) + (\frac{\partial f}{\partial x} || (x_0, y_0))\Delta x + (\frac{\partial f}{dy} || (x_0, y_0))\Delta y + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} |$$

$$| (x_0, y_0))(\Delta x)^2 + \frac{1}{2} (\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} || (x_0, y_0))(\Delta y)^2 + (\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} |$$

$$| (x_0, y_0))(\Delta x)(\Delta y) + R$$

де:

R - залишковий член у формі Лагранжа.

Ця формула дозволяє наближено обчислити значення функції $f(x,y)$ поблизу точки (x_0, y_0) з врахуванням додаткових членів, які вказують на вплив змін у похідних вищих порядків.

Абсолютну похибку цих наближень можна оцінити через залишковий член R, і це допомагає визначити точність наближення.

Розглянемо питання про рівність змішаних частинних похідних $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}}$ і $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}}$ для функції двох змінних $f(x,y)$. Це означає, що ми хочемо зрозуміти, коли змішані частинні похідні можна переставити місцями. Нехай у нас є функція $f(x,y)$, і спочатку ми диференціюємо за x, а потім за y. Згідно теореми про рівність змішаних частинних похідних, ці похідні будуть рівні, якщо функція f та її частинні похідні другого порядку є неперервними в розглянутій області.

Отже, $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = \frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{y}\, \partial \mathrm{x}}$, якщо функція $f(x,y)$ та її другі частинні похідні є неперервними в розглянутій області. Це означає, що порядок, в якому ми беремо змішані частинні похідні, не має значення, якщо функція та її похідні другого порядку є неперервними.

Розвиненняя функції в ряд Тейлора може бути скінченним (з певною кількістю членів) або нескінченним. Скінченне розвинення Тейлора називається наближенням функції у близькій точці за допомогою обмеженої кількості членів ряду. У формулі Тейлора для функцій двох змінних кожен член ряду включає у себе похідні функції в точці (x_0, y_0), які обчислюються відповідно до змінних x і y. Другі часткові похідні вказують на форму взаємодії між змінними x і y. Наприклад, якщо $\frac{\partial^2 \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} \neq 0$, то це означає наявність змішаної похідної і взаємодію між змінними x і y в точці (x_0, y_0) [3].

При використанні цієї формули можна робити наближені обчислення значень функції $f(x, y)$ близько до точки (x_0, y_0). Точність наближення залежить від того, наскільки близько до точки (x_0, y_0) робимо розвинення і скільки членів ряду Тейлора ми розглядаєм.

Формула Тейлора для функцій двох змінних є корисним інструментом у математичному аналізі та чисельних методах, і вона застосовується для розв'язання різноманітних задач, таких як знаходження мінімумів та максимумів функцій, обчислення інтегралів та інші. Зважаючи на складність формули Тейлора для функцій двох змінних і можливу велику кількість членів, наведу приклади апроксимації функцій за допомогою формули Тейлора до першого та другого порядку.

Апроксимація до першого порядку (лінійне наближення).

Формула Тейлора для лінійного наближення виглядає так:

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \mid (x_0, y_0) * (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \mid (x_0, y_0) * (y - y_0)$$

Наприклад, якщо ми маємо функцію $f(x, y) = x^2 + y^2$ і розкладаємо її навколо точки $(1; 2)$, то апроксимація до першого порядку буде:

$$f(x, y) \approx 1 + 2(x - 1) + 4(y - 2) = 2x + 4y - 5$$

Це лінійне наближення функції $f(x, y)$ навколо точки $(1; 2)$.

Апроксимація до другого порядку (квадратичне наближення).

Формула Тейлора для квадратичного наближення включає також другі часткові похідні і виглядає так:

$$f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x} \mid (x_0,y_0) * (x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y} \mid (x_0,y_0) * (y-y_0) + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mid (x_0,y_0) * (x-x_0)^2 + \frac{1}{2} * \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \mid (x_0,y_0) * (y-y_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x dy} \mid (x_0,y_0) * (x-x_0)(y-y_0)$$

Наприклад, для функції $f(x,y) = x^2 + y^2$ і розвинення навколо точки $(1;2)$ до другого порядку отримаємо:

$$f(x,y) \approx 1 + 2(x-1) + 4(y-2) + \frac{1}{2} * 2 * (x-1)^2 + \frac{1}{2} * 2 * (y-2)^2 + 2 * (-1)(y-2)$$

Після спрощення це буде:

$$f(x,y) \approx x^2 + 4xy + y^2 - 7$$

Це квадратичне наближення функції $f(x,y)$ в околі точки $(1;2)$.

Все це ілюструє, як можна апроксимувати функції двох змінних за допомогою формули Тейлора до першого і другого порядку. У загальному випадку, кількість членів ряду може бути більшою, але ці приклади демонструють основну ідею наближення функцій в околі точки розвинення.

1.5. Прикладне значення формули Тейлора для функції двох змінних

Формула Тейлора для функцій двох змінних має широке прикладне значення в науці та інженерії. Вона дозволяє наблизити складні функції в околі певної точки, спростити обчислення і вирішувати різні задачі. У прикладі ми розглядаємо функцію $f(x,y) = e^{xy}$ і розвиваємо її за допомогою формули Тейлора в околі точки $M_0(1,0)$ до членів другого порядку включно.

Обчислимо частинні похідні другого порядку функції $f(x,y)$ в точці $M_0(1,0)$. Ці похідні обчислюються як:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mid\mid (1{,}0) = \frac{\partial}{\partial x}(e^x) \mid\mid (1{,}0) = (0)\mathrm{e}^{1*0} = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \mid\mid (1{,}0) = \frac{\partial}{\partial y}(e^{xy}) \mid\mid (1{,}0) = (\mathrm{x})\mathrm{e}^{1*0} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x d y} \mid\mid (1{,}0) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})\right) \mid\mid (1{,}0) = \frac{\partial}{\partial y}(x * e^{x}) \mid\mid (1{,}0) =(\frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}(0))$$

$$\mid\mid(1{,}0) = 0$$

Тепер обчислимо прирости змінних: $\Delta x = x - 1$ і $\Delta y = y$, а також позначимо $\rho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2$:

$$\Delta x = x - 1;\ \Delta y = y\, \rho^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 = (x - 1)^2 + y^2$$

Підставимо знайдені частинні похідні і прирости в формулу Тейлора та знайдемо приріст функції:

$$\Delta \mathrm{f} = \mathrm{y} + (\tfrac{1}{2})\mathrm{y}^2 + \mathrm{R}_2$$

$$\Delta f = (\frac{\partial f}{\partial x} \mid\mid (1{,}0))(\Delta x) + (\frac{\partial f}{\partial y} \mid\mid (1{,}0))(\Delta y) + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \mid$$

$$\mid (1{,}0))(\Delta x)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \mid\mid (1{,}0))(\Delta y)^2 + (\frac{\partial^2 f}{\partial x d y} \mid$$

$$\mid (1{,}0))(\Delta x)(\Delta y) + R_2$$

$$\Delta f = (0)(x - 1) + (1)(y) + \frac{1}{2}(0)(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(1)(y)^2 + (0)(x$$

$$- 1)(y) + R_2$$

$$\Delta f = 0 + y + 0 + y^2(\frac{1}{2}) + 0 + R_2$$

$$\Delta f = y + (\frac{1}{2})y^2 + R_2$$

Враховуючи залишковий член R_2, отримуємо розвинення функції $f(x, y) = e^{xy}$ за формулою Тейлора в околі точки $M_0(1, 0)$ до членів другого порядку включно:

$$f(x,y) \approx y + (\frac{1}{2})y^2 + R_2$$

де R_2 - залишковий член в формі Лагранжа.

У наступному прикладі потрібно розкласти функцію $z(x, y)$ в околі точки $(1; 1)$ за допомогою формули Тейлора до членів другого порядку включно.

Спочатку задаємо функцію неявно як:

$$F(x, y, z) = z + yz - xy - x = 0$$

Потім знаходимо частинні похідні за x та y, використовуючи правила диференціювання функцій, заданих неявно:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y-1; \frac{\partial f}{\partial y} = z-x; \frac{\partial f}{\partial z} = y$$

Після цього знаходимо значення цих похідних в точці $(1; 1)$:

$$\frac{\partial f}{\partial x} || (1; 1) = -1 - 1 = -2; \frac{\partial f}{\partial y} || (1; 1) = 1 - 1 = 0; \frac{\partial f}{\partial z} || (1; 1) = 1$$

Тепер знаходимо другі похідні:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0; \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0 ; \frac{\partial^2 f}{\partial x dy} = -1$$

Після цього можемо використовувати формулу Тейлора, яка виглядає так:

$$z(x, y) \approx z(1; 1) + (\frac{\partial z}{\partial x} || (1; 1))(x - 1) + (\frac{\partial z}{\partial y} || (1; 1))(y - 1) +$$

$$(1/2)(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} || (1; 1))(x - 1)^2 + \frac{1}{2}(\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} || (1; 1))(y - 1)^2 + (\frac{\partial^2 z}{\partial x dy} ||$$

$$(1; 1))(x - 1)(y - 1) + R$$

Підставимо знайдені значення похідних в формулу:

$$z(x, y) \approx 1 + (-2)(x - 1) + 0(y - 1) + \frac{1}{2}(0)(x - 1)^2 + \frac{1}{2}0(y - 1)^2$$

$$+$$

$$(-1)(x - 1)(y - 1) + R$$

Спростимо вираз:

$$z(x, y) \approx 1 - 2(x - 1) - (x - 1)(y - 1) + R$$

Отже, ми отримали розвинення функції z(x, y) в околі точки (1;1) до членів другого порядку включно.

Розглянемо ще декілька конкретних прикладів використання формули Тейлора для функцій двох змінних.

Приклад. Мінімізація функції

Уявімо, що ми маємо функцію двох змінних, і нам потрібно знайти її локальний мінімум. Для цього ми можемо скористатися формулою Тейлора, щоб наблизити функцію навколо потенційної точки мінімуму і знайти точку, в якій похідні першого порядку будуть дорівнювати нулю.

Розглянемо функцію $f(x,y) = x^2 + 4y^2 + 4xy + 2x + 6y + 9$. Нам потрібно знайти локальний мінімум цієї функції.

Знаходимо похідні першого порядку:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 2x + 4y + 2$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = 8y + 4x + 6.$$

Знаходимо точку, де похідні дорівнюють нулю: Поставимо $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = 0$ та $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = 0$ і розв'яжемо систему рівнянь:

$$\begin{cases} 2x + 4y + 2 = 0 \\ 8y + 4x + 6 = 0 \end{cases}$$

Розв'язуючи цю систему, отримаємо:

$$\begin{cases} x = -1 \\ y = -1 \end{cases}$$

Використовуємо формулу Тейлора для апроксимації функції навколо точки $(-1; -1)$:

$$f(x,y) \approx f(-1,-1) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(-1,-1) \cdot (x - (-1)) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(-1,-1) \cdot (y - (-1))$$

Після підстановки значень отримуємо:

$$f(x,y) \approx 6 + 0 + 0 = 6$$

Отже, ми знайшли, що локальний мінімум функції $f(x,y)$ рівний 6 і він досягається в точці $(-1; -1)$.

Приклад: Апроксимація функції

Припустимо, що ми маємо функцію $f(x,y) = e^x + y$, і нам потрібно апроксимувати її значення навколо точки $(0; 0)$ до другого порядку за допомогою формули Тейлора.

Знаходимо похідні першого та другого порядку:

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}} = e^x + y,$$

$$\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = e^x + y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x + y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x + y,$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} = e^x + y.$$

Використовуємо формулу Тейлора для апроксимації функції:

$$f(x,y) \approx f(0{,}0) + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{x}}(0{,}0) * x + \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y}(0{,}0) * y + 21\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0{,}0) * x^2 +$$

$$21\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} f(0{,}0) * y^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial \mathrm{x}\, \partial \mathrm{y}} f(0{,}0) * x$$

Після підстановки значень похідних отримаємо:

$$f(x,y) \approx 1 + x + y + 21x^2 + 21y^2 + xy$$

Ця апроксимація дозволяє наблизити значення функції $f(x,y) = e^x + y$ навколо точки $(0;0)$ за допомогою квадратичного наближення.

Отже, загальна ідея полягає в тому, що формула Тейлора надає інструмент для апроксимації та аналізу функцій в околі точки, що є важливим при вивченні різних галузей науки і інженерії. Додавання більше членів у розклад дозволяє отримати більш точну апроксимацію, але може збільшити обчислювальну складність.

РОЗДІЛ 2. ПРАКТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ФОРМУЛИ ТЕЙЛОРА ПРИ РОЗВ'ЯЗУВАННІ ФІЗИЧНИХ ЗАДАЧ

2.1 Типи фізичних задач, які можна розв'язати за допомогою формули Тейлора

Формула Тейлора - це математичний інструмент, який дозволяє апроксимувати складні функції за допомогою поліномів. Вона знаходить широке застосування в розв'язанні фізичних задач і включає в себе деякі типи застосувань. Вона дозволяє наближено представити складні функції деякими першими членами ряду Тейлора, що допомагає спростити обчислення та розуміння поведінки функцій в фізичних моделях. За допомогою формули Тейлора можна обчислити похідні функцій у вигляді ряду. Це важливо для аналізу руху, траєкторій та інших параметрів в фізичних системах [16].

Формула Тейлора допомагає вивчати асимптотичне поведінку функцій, коли аргументи наближаються до певного значення. Це корисно для розуміння фізичних явищ, що проявляють асимптотичну збіжність або розбіжність. У чисельних методах, таких як обчислення інтегралів і диференціальних рівнянь, формула Тейлора використовується для апроксимації похідних та інших значень функцій у вигляді числових даних. Також, формула може бути використана для створення моделей різних фізичних систем, таких як гравітаційні системи, коливання, електромагнетизм.

Загалом, формула Тейлора є корисним інструментом для аналізу та моделювання різних фізичних явищ у багатьох галузях фізики та природничих наук. Застосування формули Тейлора для апроксимації функції положення $x(t)$ в контексті вивчення руху об'єкта є важливим методом в фізиці, особливо в механіці.

У фізиці рух об'єкта часто моделюється функцією положення $x(t)$, де t - час, а x - положення об'єкта. Проте, ця функція може бути складною, та іноді аналітично знайти точний розв’язок може бути неможливо. Тут і виникає необхідність у використанні формули Тейлора для її апроксимації [7].

Формула Тейлора дозволяє наблизити функцію $x(t)$ в околі певної точки t_0 за допомогою полінома. Вона має вигляд:

$$x(t) = x(t_0) + (t - t_0) * x'(t_0) + \frac{(t - t_0)^2}{2!} * x''(t_0) + \frac{(t - t_0)^3}{3!} * x'''(t_0) + \cdots$$

де:

$x'(t_0), x''(t_0), x'''(t_0)$ і так далі - похідні від функції $x(t)$ у точці t_0.

При застосуванні до руху об'єкта, ця формула дозволяє апроксимувати положення об'єкта в малому інтервалі часу відносно точки t_0. Таким чином, ми можемо отримати апроксимацію шляху руху, швидкості і прискорення об'єкта в цей момент часу. Наприклад, якщо ми маємо функцію положення $x(t)$ і хочемо знати положення об'єкта в момент часу $t_0 + \Delta t$, то ми можемо використовувати формулу Тейлора для апроксимації значення $x(t_0 + \Delta t)$ на основі відомого значення $x(t_0)$, похідних $x'(t_0), x''(t_0)$ і так далі.

Цей метод дуже корисний в фізиці, де рух об'єктів може бути дуже складним, і аналітичні розв’язки не завжди доступні. Формула Тейлора надає можливість наблизити розв’язок та отримати аналітичні вирази для важливих фізичних параметрів руху.

В контексті динаміки вона може бути використана для апроксимації рівнянь руху, особливо коли відомі значення похідних в певних точках.

В задачах про вільне падіння тіла під впливом сили тяжіння формула Тейлора може бути застосована для апроксимації швидкості та положення тіла в залежності від часу. Рівняння руху для тіла, яке падає вільно в полі сили тяжіння, може бути записане як:

$$F = m * a,$$

де:

F - сила тяжіння,

m - маса тіла,

a - прискорення тіла.

Сила тяжіння може бути виражена як

$$F = m * g,$$

де:

g - прискорення вільного падіння (приблизно 9.8 м/с² на поверхні Землі).

За допомогою другого закону Ньютона $F = m \cdot a$, можемо отримати рівняння для прискорення: $a = g$.

Інтегруючи рівняння прискорення за часом, ми можемо отримати рівняння для швидкості:

$$v = v_0 + g \cdot t,$$

де:

v_0 - початкова швидкість,

t - час.

Подальше інтегрування цього рівняння дозволяє отримати рівняння для положення h тіла:

$$h = h_0 + v_0 * \ t + \frac{1}{2} g \cdot t^2,$$

де: h_0- початкова висота,

t - час.

Тепер, коли ми маємо ці рівняння, ми можемо використовувати формулу Тейлора для апроксимації швидкості і положення в будь-який момент часу. Формула Тейлора дозволяє розвинути функції $v(t)$ і $h(t)$ в ряди Тейлора і обчислити їх значення при невеликих змінах часу. Це основний підхід до моделювання руху об'єктів під впливом сил в фізиці. Точність апроксимації залежить від того, наскільки добре апроксимаційні ряди відображають реальний рух об'єкта і наскільки маленькі зміни в часі ми розглядаємо.

В контексті вивчення руху частинок в електромагнітних полях формула Тейлора може бути корисною для апроксимації траєкторій частинок у складних полях, таких як магнітні поля, які можуть змінюватися з часом або зі спостереженнями.

Основними рівняннями, що описують рух зарядженої частинки в електромагнітному полі, є рівняння Лоренца. Ці рівняння включають силу

Лоренца, яка враховує вплив магнітного та електричного поля на частинку. Сила Лоренца, що діє на частинку, може бути записана так:

$$F = q(E + v \times B)$$

де:

F - сила Лоренца

q - заряд частинки

E - електричне поле

v - вектор швидкості частинки

B - магнітне поле

$\times$ - векторний добуток

Для апроксимації траєкторії частинки у складних магнітних полях, які можуть змінюватися зі спостереженнями, можна використовувати методи чисельного розв'язання рівнянь Лоренца, такі як метод Ейлера, метод Верле або інші чисельні методи. Однак для отримання більш точних результатів в складних полях може знадобитися розклад Тейлора. Застосування формули Тейлора до апроксимації траєкторії може виглядати наступним чином:

1) Розвинути магнітне поле (B) в ряд Тейлора навколо точки, в якій ви хочете апроксимувати траєкторію.

2) Врахувати лише перші декілька членів цього ряду (найбільший степінь), щоб апроксимувати магнітне поле в цій точці.

3) З використанням апроксимованого магнітного поля обчислити силу Лоренца, що діє на частинку, і використовувати її для чисельного обчислення траєкторії частинки.

Цей підхід допоможе отримати більш точні результати у складних полях, але він також може вимагати більше обчислювальних ресурсів і роботи для розв'язання рівнянь руху. Точність апроксимації буде залежати від того, як добре ви врахуєте додаткові члени ряду Тейлора та інші деталі моделювання системи.

В квантовій механіці формула Тейлора може бути використана для апроксимації енергетичних рівнів системи, таких як атоми або молекули. Цей підхід допомагає наблизити спектральні лінії та визначити енергетичні рівні, зокрема, в контексті атомної або молекулярної спектроскопії. Розглянемо деталі цього процесу:

Гамільтоніан системи є основним оператором, який описує квантовий стан системи. Він містить оператори кінетичної енергії та потенціальної енергії частинок в системі.

Власні функції та енергетичні рівні. Розв'язання власних задач для гамільтоніана дає нам власні функції та відповідні енергетичні рівні системи. Основний власний стан має найнижчу енергію, інші власні стани мають вищі енергетичні рівні.

Апроксимація рядом Тейлора. Іноді точний розв'язок гамільтоніана важко отримати аналітично, особливо для складних систем. Тоді можна використовувати формулу Тейлора для апроксимації гамільтоніана навколо деякого відомого стану системи. Ряд Тейлора розкладає гамільтоніан у степені деякого параметра (зазвичай рівноважного стану), а потім використовує лише перші декілька членів цього ряду для апроксимації гамільтоніана.

Наближені розв'язки. Після апроксимації гамільтоніана ви можете розв'язувати отримані спрощені рівняння Шредингера для власних функцій та власних значень. Це надає наближені енергетичні рівні та відповідні власні функції для системи.

Спектральна лінія і спектроскопія. Отримані енергетичні рівні можуть бути використані для розрахунку спектральних ліній, які спостерігаються в спектроскопії. Спектроскопічні методи дозволяють визначити енергію рівнів і вивчати взаємодію системи з електромагнітним випромінюванням.

Важливо зауважити, що апроксимація рядом Тейлора може бути досить грубою, і точність результатів буде залежати від обраного рівня апроксимації. Для більш точних розрахунків зазвичай використовують чисельні методи або розв'язують відповідні рівняння Шредингера без апроксимацій. Але апроксимація рядом Тейлора може бути корисною для отримання початкового наближення, зокрема, коли точний аналітичний розв'язок недоступний [2].

Формула Тейлора застосовується в чисельних методах для обчислення похідних, інтегралів та інших величин у фізичних задачах, коли аналітичні рішення не завжди доступні або важко отримувати. Цей підхід називається чисельним диференціюванням і чисельним інтегруванням. Розглянемо деякі деталі використання формули Тейлора в чисельних методах.

Чисельне диференціювання. Для обчислення першої похідної функції $f(x)$ в точці x_0 можна використовувати формулу Тейлора для ряду Тейлора в околі x_0:

$$h^1 f'(x_0) \approx hf(x_0 + h) - f(x_0),$$

де:

h - невеликий приріст x від x_0. Ця формула дає наближене значення першої похідної.

Аналогічно можна використовувати ряд Тейлора для обчислення похідних вищих порядків. Наприклад, друга похідна може бути обчислена як:

$$h^2 f''(x_0) \approx h^2 f(x_0 + h) - 2f(x_0) + f(x_0 - h).$$

Чисельне інтегрування. У методі трапецій для чисельного інтегрування може бути використана формула Тейлора для апроксимації функції між сусідніми точками інтегрування. Вона розглядає функцію як лінійну між двома точками та інтегрує цей відрізок.

Метод Сімпсона також може використовувати формулу Тейлора для апроксимації функції між точками інтегрування, але використовує квадратичну апроксимацію, щоб забезпечити більшу точність [19].

Зазвичай для чисельних обчислень величин використовуються чисельні методи, які комбінують багато таких апроксимацій для отримання наближених значень похідних, інтегралів та інших фізичних величин. Ці методи дозволяють отримувати результати, коли аналітичні розв’язки недоступні або дуже складні для отримання. Важливо враховувати обрану точність апроксимації та обрану кількість точок для чисельних обчислень, оскільки це може вплинути на точність та обчислювальний обсяг обчислень.

2.2 Задачі про рух тіл

Теоретичні аспекти задач з руху тіл включають основні величини руху, такі як шлях (s), швидкість (v) і прискорення (a). Формула Тейлора може бути використана для апроксимації цих величин. Формула Тейлора для швидкості та прискорення дозволяє наближено описати, як швидкість та прискорення змінюються в часі. Другий закон Ньютона виражає взаємозв'язок між силою (F), масою тіла (m) і прискоренням (a). Рух тіла може бути різним, і формула Тейлора може бути корисною для аналізу руху в залежності від конкретних умов задачі. Ці теоретичні концепції використовуються для вирішення задач з руху тіл у фізиці та інженерії [17].

Формула Тейлора також може бути корисною для вирішення задач, пов'язаних з рухом тіл у фізиці. Вона дозволяє апроксимувати рух тіл та їхні траєкторії в різних умовах, зокрема, коли відома початкова позиція, початкова швидкість та прискорення.

Загальна формула Тейлора для функції $f(x)$ в околі точки x_0 виглядає так:

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)f'(x_0) + \frac{(x - x_0)^2}{2!}f''(x_0) + \frac{(x - x_0)^3}{3!}f'''(x_0) + \cdots$$

У контексті руху тіл ця формула може бути застосована наступним чином:

Якщо ви маєте інформацію про початкову позицію (x_0), початкову швидкість (v_0), та можливо прискорення (a_0), то ви можете використовувати формулу Тейлора для апроксимації траєкторії тіла у будь-який момент часу. Наприклад, для одномірного руху тіла вздовж осі x відома така формула:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}a_0 t$$

Для більш складних рухів у тривимірному просторі, може бути застосована аналогічна формула для кожного напрямку.

Також можна використовувати формулу Тейлора для апроксимації швидкості та прискорення тіла в будь-який момент часу. Наприклад, для швидкості:

$$v(t) = v_0 + a_0 t$$

Для прискорення:

$$a(t) = a_0$$

Ці формули допомагають описати залежність швидкості та прискорення від часу у випадку рівномірного прискореного руху.

Застосування формули Тейлора у фізичних задачах допомагає отримувати наближені результати у випадках, коли аналітичні розв'язки складні або недоступні. Важливо враховувати, що точність апроксимації буде залежати від кількості членів ряду Тейлора, які ви використовуєте, та точності вхідних даних.

Викид об'єкта зі стартовою швидкістю вздовж горизонталі.

Задача**:** Об'єкт викидається горизонтально з початковою швидкістю v_0 і початковим положенням $x_0 = 0$. Знайдіть положення об'єкта $x(t)$ в будь-який момент часу t, враховуючи стале прискорення a.

Розв'язання**:** Ми використовуємо формулу Тейлора для руху об'єкта:

$$x(t) = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

Підставляючи відомі значення $x_0 = 0,\ v_0$ і a отримуємо:

$$2x(t) = v_0 t + 2\frac{1}{2} a t^2$$

Це є рівняння траєкторії об'єкта у вигляді функції від часу t.

Гармонічне коливання маятника.

Задача**:** Маятник з амплітудою x_0 та періодом T коливається. Знайдіть положення маятника $x(t)$ у будь-який момент часу t.

Розв'язання: Використовуємо формулу Тейлора для синуса:

$$x(t) = x\,_0 cos(\omega t) + \omega v_0\ sin(\omega t)$$

де:

ω - кругова частота, пов'язана з періодом T як $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Якщо $v_0 = 0$ (початкова швидкість), то рівняння спрощується до:

$$x(t) = x_0\, cos(\frac{2\pi}{T}t)$$

Рух під дією опору середовища.

Задача**:** Об'єкт рухається під дією опору середовища. Знайдіть швидкість об'єкта $v(t)$ у будь-який момент часу t, враховуючи, що $v(0) = v_0$.

Розв’язання**:** Ми використовуємо формулу Тейлора для функції $v(t)$:

$$v(t) = v_0 - kv_0t$$

Це є рівняння швидкості об'єкта у функції від часу t, де k - коефіцієнт опору середовища.

Ці рівняння ілюструють використання формули Тейлора для розв'язання фізичних задач про рух тіл. Формула Тейлора допомагає апроксимувати рух і визначати залежності між різними фізичними величинами і часом.

Представте собі тіло, яке рухається по прямій лінії, і вам потрібно знайти апроксимацію його шляху і швидкості в момент часу t. Знаючи рівняння руху тіла та початкові умови, ми можемо використати формулу Тейлора для цього.

Рівняння руху:

Припустимо, що рух тіла описується рівнянням:

$$s(t) = s_0 + v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

де:

$s(t)$ - шлях тіла в момент часу t,

s_0 - початковий шлях,

v_0 - початкова швидкість,

a - прискорення.

Формула Тейлора для швидкості:

Формула Тейлора для швидкості тіла може бути отримана, обчисливши похідну від рівняння руху:

$$v(t) = v_0 + at$$

Розв'язок задачі:

Для знаходження шляху та швидкості в момент часу t, ми можемо використовувати ці формули, підставивши значення t та початкові умови s_0 , v_0, a:

$$s(t + \Delta t) \approx s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2 + (v_0 + at)\Delta t + \frac{1}{2}a(\Delta t)^2$$

$$v(t) = v_0 + at$$

Ці формули допоможуть нам отримати апроксимацію шляху та швидкості тіла в момент часу t.

Представте собі автомобіль, який рухається прямолінійно зі сталою прискореністю a на дорозі. Вам потрібно знати, яка буде відстань, яку автомобіль подолає через певний час t, використовуючи формулу Тейлора.

Рівняння руху:

Рух автомобіля може бути описаний рівнянням:

$$s(t) = s_0 + v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

де:

$s(t)$ - шлях автомобіля в момент часу t,

s_0 - початковий шлях (наприклад, початковий кілометраж),

v_0 - початкова швидкість автомобіля,

a - прискорення автомобіля.

Формула Тейлора для шляху:

Формула Тейлора для шляху автомобіля виглядає так:

$$s(t + \Delta t) \approx s(t) + v(t)\Delta t + \frac{1}{2}a(t)(\Delta t)^2$$

де:

$s(t + \Delta t)$ - новий шлях автомобіля в момент часу $t + \Delta t,$

$s(t)$ - шлях автомобіля в момент часу t,

$v(t)$ - швидкість автомобіля в момент часу t,

$a(t)$ - прискорення автомобіля в момент часу t,

Δt - зсув в часі.

Розв'язок задачі:

Для знаходження відстані, яку автомобіль подолає через певний час $t,$ використаємо формулу Тейлора:

$$s(t + \Delta t) \approx s_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 + (v_0 + at)\Delta t + \frac{1}{2} a (\Delta t)^2$$

Замінимо в цій формулі значення $s_0, v_0,$ a на відповідні величини з початкових умов задачі, і отримаємо відстань, яку автомобіль подолає через час $t + \Delta t.$ Цей приклад показує, як можна використовувати формулу Тейлора для апроксимації руху тіла в задачах зі сталим прискоренням.

Отже, використання формули Тейлора в фізичних задачах на рух тіла є важливим інструментом для апроксимації шляху, швидкості та прискорення в певний момент часу. Такий метод дозволяє розкласти складний рух на більш прості частини, аналізувати нелінійність і передбачати майбутні події.

2.3. Задачі про теплопередачу та механіку рідин

Теоретичні аспекти задач з теплопередачі та механіки рідин включають в себе використання формули Тейлора для апроксимації градієнтів і швидкості. У задачах теплопередачі, розподіл температури може бути описаний рівнянням теплопровідності, і формула Тейлора може бути використана для апроксимації градієнта температури в точці.

У задачах механіки рідин, рух рідини описується рівняннями Нав'є-Стокса, і формула Тейлора може бути використана для апроксимації швидкості рідини в певній точці. Ці теоретичні концепції є основою для вирішення конкретних задач із зазначених областей.

Теплопередача включає передачу тепла між об'єктами з різними температурами. Один зі способів моделювання цього процесу - це використання рівняння теплопровідності, такого як рівняння Фур'є. Узагальненою формулою для теплопередачі може бути:

$$Q = -k * A * (\Delta T / \Delta x)$$

де:

Q - кількість тепла,

k - коефіцієнт теплопровідності,

A - площа перекладки,

ΔT - різниця в температурі між двома точками,

Δx - відстань між цими точками.

Формула Тейлора може використовуватися для апроксимації температурного профілю вздовж площини теплопередачі:

$$T(x) \approx T(x_0) + \frac{dt}{dx}|x_0 * (x - x_0)$$

де:

$T(x)$ - температура в точці x,

$T(x_0)$ - температура в початковій точці x_0,

$\frac{dt}{dx}|x_0$ - градієнт температури в точці x_0.

Механіка рідин включає в себе рух рідин, гідродинаміку, і деякі основні рівняння, такі як рівняння Нав'є-Стокса. Для апроксимації руху рідини можна використовувати формулу Тейлора для швидкості.

Формула Тейлора для швидкості рідини може бути записана так:

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \frac{dv}{dx}|x * \Delta x$$

де:

$v(x)$ - швидкість рідини в точці x,

$\frac{dv}{dx}|x$ - градієнт швидкості в точці x,

Δx - зсув від точки x.

Ця формула може бути корисною при аналізі руху рідини та вивченні її властивостей.

Приклад: Знайдемо температурний градієнт в середині стіни товстої плити, яка перебуває в тепловому контакті з двома середовищами з різними температурами T_1 і T_2. Відомо, що коефіцієнт теплопровідності матеріалу стіни - k, а товщина стіни - d.

Формула для теплопередачі через стінку:

$$Q = -k * A * \frac{\Delta T}{d}$$

де:

Q - кількість тепла,

A - площа перекладки,

ΔT - різниця температур ($T_2 - T_1$),

d - товщина стінки.

Можемо використати формулу Тейлора для апроксимації температурного градієнту в середині стіни:

$$\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx \frac{dt}{dx}|x_0$$

де:

Δx - відстань по товщині стіни,

x - позиція всередині стіни.

Розв'язок: $\frac{\Delta T}{\Delta x} \approx \frac{T2 - T1}{d}$

Таким чином, температурний градієнт в середині стіни дорівнює $\frac{T_2 - T_1}{d}$.

Механіка рідин:

Приклад. Розглянемо задачу про рух рідини в трубі. Хочемо знайти швидкість рідини в певній точці труби на певній відстані від початку труби.

Формула Тейлора для швидкості:

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \frac{dv}{dx}|x * \Delta x$$

де:

$v(x)$ - швидкість рідини в точці x,

$\frac{dv}{dx}|$x - градієнт швидкості в точці x,

Δx - зсув від точки x.

Розв'язок. В цьому прикладі швидкість рідини може залежати від радіусу труби, тиску та інших факторів. Градієнт швидкості ($\frac{dv}{dx}|$x) в даній точці може бути визначений на основі рівнянь Нав'є-Стокса для руху рідини. Результат буде залежати від конкретних умов задачі.

Приклад. Розглянемо задачу про теплопередачу через циліндр. Нехай циліндр має радіус R, а поверхня циліндра перебуває в контакті з рідиною при температурі T_1. Температура циліндра сама за собою змінюється від T_1 в центрі до T_2 на зовнішній стороні.

Формула для теплопередачі через циліндр:

$$Q \; = \; 2\pi \; kL \, \frac{T_2 - T_1}{ln\,(\frac{R_2}{R_1})}$$

де:

Q - кількість тепла,

k - коефіцієнт теплопровідності,

L - довжина циліндра,

$R1$ і $R2$ - радіуси циліндра на внутрішній і зовнішній сторонах відповідно,

ln - натуральний логарифм.

Використаємо формулу Тейлора для апроксимації градієнту температури на поверхні циліндра:

$$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta \mathrm{r}} \approx \frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\, |r_0$$

де:

$\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta \mathrm{r}}$ - температурний градієнт на радіусі r,

$\frac{\mathrm{dT}}{\mathrm{dr}}\, |r_0$ - градієнт температури на радіусі r_0.

Розв'язок: $\frac{\Delta \mathrm{T}}{\Delta \mathrm{r}} \approx \frac{T_1 - T_2}{R_2 - R_1}$

Механіка рідин:

Приклад. Розглянемо задачу про течію рідини вздовж рівної труби. Ми хочемо знати середню швидкість руху рідини в трубі.

Формула Тейлора для швидкості:

$$v(x + \Delta x) = v(x) + \frac{dv}{dx}|x * \Delta x$$

де:

$v(x)$ - швидкість рідини в точці x,

$\frac{dv}{dx}|x$ — градієнт швидкості в точці x,

Δx - зсув від точки x.

Розв'язок. Середню швидкість v-середня можна обчислити, поділивши загальний об'єм рідини, який проходить через трубу за певний час, на площу поперечного перерізу труби:

$$v(\text{сер.}) = \frac{1}{A} * \int v dA$$

де:

A - площа поперечного перерізу труби.

Цей інтеграл може бути складним у випадку складних профілів швидкості $v(x)$, і він повинен бути обчислений на основі конкретних умов задачі та форми профілю швидкості.

Теплопередача:

Приклад. Розглянемо задачу про теплопередачу через стінку під час зміни часу. Нехай товщина стінки d і температура внутрішньої та зовнішньої сторін стінки змінюється у часі: $T_1(t)$ і $T_2(t)$. Знайдемо кількість тепла, яка проходить через стінку за певний час t.

Формула для теплопередачі через стінку у вигляді диференціального рівняння:

$$\frac{dQ}{dt} = -k * A * \frac{dt}{dx}|x * \frac{dT}{dt}$$

де:

$\frac{dQ}{dt}$ - швидкість зміни кількості тепла в часі,

k - коефіцієнт теплопровідності,

A — площа перекладки,

$\frac{dt}{dx}|x$ - градієнт температури в точці x,

$\frac{dT}{dt}$ - швидкість зміни температури в часі.

Можемо використати формулу Тейлора для апроксимації градієнта температури:

$$\frac{dT}{dx}|x \approx (T2 - T1) / d$$

Розв'язок: $\frac{dQ}{dt} = -k * A * \frac{T_2 - T_1}{d} * \frac{dT}{dt}$

Ця формула дозволяє обчислити швидкість зміни кількості тепла через стінку в залежності від зміни температури в часі.

Механіка рідин.

Приклад. Розглянемо задачу про обертання циліндра з рідиною. Нехай циліндр з радіусом R має рідину всередині і починає обертатися зі сталою кутовою швидкістю ω.

Формула Тейлора для швидкості рідини може бути використана для обчислення швидкості частинки рідини на певній відстані від центру циліндра:

$$v(r + \Delta r) = v(r) + \frac{dv}{dr}|r * \Delta r$$

де:

$v(r)$ - швидкість рідини на радіусі r,

$\frac{dv}{dr}|r$ - градієнт швидкості на радіусі r,

Δr - зсув від радіусу r.

Розв'язок: У цьому прикладі градієнт швидкості може бути залежним від конкретних умов задачі та форми руху рідини всередині циліндра. Якщо рідина обертається разом з циліндром зі швидкістю ω, то швидкість буде пропорційною радіусу:

$$v(r) = \omega * r$$

Це один із можливих варіантів розв'язку.

Отже, використання формули Тейлора в досліджуваних фізичних областях дозволяє апроксимувати градієнти температури, швидкості та інших параметрів у визначених точках простору та часу.

Такий метод є корисним інструментом для аналізу та моделювання процесів теплопередачі та руху рідини в складних умовах, а також для розв'язання задач де нелінійність або зміни змінних є значущими.

2.4. Задачі з електродинаміки

Формула Тейлора в електродинаміці може бути використана для апроксимації різних параметрів і величин. В задачах, пов'язаних з електромагнітною індукцією, формула Тейлора може допомогти апроксимувати швидкість зміни магнітного потоку з часом. В задачах, де необхідно обчислити електричне поле, формула Тейлора може використовуватися для апроксимації цього поля в точці в просторі, зокрема, коли розподіл заряду або форма поверхні не є симетричними [20].

У випадку електромагнітних хвиль, формула Тейлора може бути корисною для апроксимації характеристик хвиль, таких як частота, амплітуда, фазовий кут тощо, в залежності від геометрії або зміни параметрів в середовищі. Формула Тейлора є важливим інструментом для аналізу фізичних явищ в електродинаміці та дозволяє отримувати числові розв'язки в різних задачах.

Розрахунок сили між двома точковими зарядами

Припустимо, ми маємо два точкових заряди: $q_1 = 2$мКл і $q_2 = -3$мКл, розташовані на відстані м$r = 0.1$м один від одного в вакуумі. Знайдемо силу між ними за допомогою закону Кулона:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon_{\ 0}} \ \frac{q_1 q_2}{r_2}$$

Підставимо значення:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \times 10^{-12} K^{-1} M^{-1}} \ \frac{(2 \times 10^{-3}\text{Кл})(-3 \times 10^{-3}\text{Кл})}{(0{,}1\text{м})^2}$$

Вирахуємо силу:

$$F \ \approx \ -6.74 \times 10 - 6 \text{ Н}$$

Таким чином, сила між зарядами дорівнює приблизно -6.74 мікроньютона (Н).

Електричне поле між двома рівномірно зарядженими пластинами

Розглянемо дві рівномірно заряджені пластини, з поверхневим зарядом $\sigma = 10\text{нКл}/\text{м}2$, розташовані паралельно одна одній на відстані м$d = 0.02$м.

Знайдемо силу електричного поля між ними:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Підставимо значення:

$$E = \frac{10 \times 10^{-9} \frac{K\text{л}}{m^2}}{2 \cdot 8.85 \times 10^{-12} K^{-1} m^{-1}}$$

Вирахуємо електричне поле:

$$E \ \approx \ 5687.85 \ \frac{H}{\text{Кл}}$$

Таким чином, електричне поле між пластинами дорівнює приблизно $5687.85 \frac{H}{\text{Кл}}$.

Потенціал від точкового заряду

Розглянемо точковий заряд $Q = 5\text{мКл}$, розташований на відстані м$r = 0.02$ м від точки спостереження. Знайдемо потенціал в цій точці:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_{\ 0}} \ \frac{Q}{r}$$

Підставимо значення:

$$V = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \times 10^{-12} K^{-1} m^{-1}} \ \frac{5 \times 10^{-3}\text{Кл}}{0{,}02 \text{ м}}$$

Вирахуємо потенціал:

$$V \approx 179403.85\ \text{В}$$

Таким чином, потенціал в точці спостереження дорівнює приблизно 179403.85 Вольт.

Сила на кінці діелектричної трубки

Розглянемо діелектричну трубку радіусом м$R = 0.02$м та довжиною м$L = 0.1$м, з зарядом $Q = 1$мКл розподіленим по її поверхні. Знайдемо силу, з якою трубка притягує маленький точковий заряд $q = 0.01$мКл розташований на відстані $d = 0.05$м від кінця трубки.

Використовуємо закон Кулона для точкових зарядів:

$$F = \frac{1}{4\pi\epsilon 0}\frac{qQ}{d2}$$

Підставимо значення:

$$F = \frac{1}{4\pi \cdot 8.85 \times 10^{-12} K^{-1} m^{-1}} \frac{(0.01 \times 10^{-3}\text{Кл})(1 \times 10^{-3}\text{Кл})}{(0{,}05\text{м})^2}$$

Вирахуємо силу:

$$F \approx 226.76\ \text{Н}$$

Таким чином, сила, з якою трубка притягує точковий заряд, дорівнює приблизно 226.76 Ньютонів.

ВИСНОВКИ

Розділ 1 даної роботи присвячений формулі Тейлора, яка є важливим інструментом у математичному аналізі та диференціальному рівнянні. В цьому розділі було розглянуто основні поняття, необхідні для вивчення формули Тейлора, її застосування для апроксимації функцій однієї та двох змінних. Формула Тейлора дозволяє наближено представити складні функції у вигляді більш простих поліномів, що дуже корисно у чисельних обчисленнях та моделюванні.

Основні поняття, що були розглянуті, включають в себе ідею розкладу складної функції в ряд Тейлора, де кожний член ряду відображає доданок в апроксимації функції. Також описали поняття похідних та їхню роль у формулі Тейлора, а також вказали на важливість точки, в якій розвивається функція, для правильної апроксимації.

Формула Тейлора дозволяє наближено аналізувати складні функції та допомагає вирішувати різноманітні завдання, що зустрічаються в наукових дослідженнях і практичних застосуваннях.

У підрозділі 1.2 було охарактеризовано формулу Тейлора для функцій однієї змінної, що є ключовою складовою аналізу функцій та їхніх наближень.

Варто зауважити, що формула Тейлора для функцій однієї змінної є важливим інструментом у математичному аналізі. Вона дозволяє наближено описувати функції та їхні властивості в околах конкретних точок, що є корисним як для теоретичних досліджень, так і для практичних застосувань. Та, безумовно, є основою для подальшого розгляду апроксимацій функцій та застосування їх у різних наукових галузях.

У підрозділі 1.3 дослідили застосування формули Тейлора для апроксимації функцій, що є важливим практичним застосуванням цього математичного інструменту та показали, що досліджувана формула дозволяє наближено представити складні функції у вигляді поліномів більш простого виду, що спрощує їхнє обчислення та аналіз.

Апроксимація функцій за допомогою формули Тейлора дозволяє наближено досліджувати різноманітні явища та знаходити розв’язки складних задач, що робить її важливим інструментом для наукових та практичних застосувань.

Далі розглядається формула Тейлора для функції двох змінних, розглядається розвинення функції у ряд, де кожний член містить похідні за обома змінними в точці розвинення, що й дозволяє наближено подавати функції з двома незалежними змінними та апроксимувати їхню поведінку в околі конкретної точки. Тому, важливим аспектом вивчення формули Тейлора для функцій двох змінних є розуміння, як ця формула може бути корисною в різних областях, таких як фізика, інженерія та економіка, оскільки дозволяє апроксимувати функції, які залежать від двох змінних, і використовується для моделювання складних процесів, наприклад, у геофізиці, динаміці рідин, термодинаміці та багатьох інших галузях.

У розділі 2 нами було розглянуто практичне застосування формули Тейлора при розв'язанні фізичних задач, оскільки дана формула допомагає наближено описувати фізичні процеси, що відбуваються в природі, і дозволяє аналізувати рух тіл, теплопередачу, механіку рідин та електродинаміку. Вона також може бути застосована для апроксимації фізичних явищ та моделювання систем, що залежать від змінних.

Слід відмітити, що в роботі були також розглянуті застосування формули Тейлора для аналізу руху тіл, оскільки вона дозволяє апроксимувати траєкторії руху об'єктів, розглядаючи їхні зміни в часі, що є корисним в механіці та астрофізиці для прогнозування руху планет, а також у фізиці руху тіл; дослідили використання формули для вивчення теплопередачі та механіки рідин, так як вона може бути застосована для апроксимації температурних та тискових профілів в теплових і гідродинамічних системах, що допомагає в розумінні і оптимізації цих процесів, а також розглянули її використання в задачах з електродинаміки, де вона може бути використана для моделювання розподілу електромагнітних полів та апроксимації характеристик електричних схем, що допомагає в розробці та оптимізації електричних пристроїв та систем зв'язку.

Загалом, ми дійшли висновку, що формула Тейлора є потужним інструментом у математичному моделюванні та дослідженні фізичних явищ, адже вона допомагає в розв'язанні широкого спектру задач у різних областях науки й техніки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Андрєєв А.М., Марченко О.А. Застосування математичних знань для вирішення фізичних задач // Фізика та астрономія в школі. – 2014. – №5. – С. 12 – 15.

2. Балаш В.А. Задачі з фізики і методи їх вирішення: Посібник для вчителя. – 4-е вид., перероб. і доп. – К.: Просвітлення, 1983. – 43 – 52 с.

3. Бугров Я. С., Нікольський С. К.; "Вища математика: посібн. для вузів: В 3 т. / під ред. В. А. Садовничого." 6-е видання, стереотип. 2015. Том 2: Диференціальне і інтегральне числення. 51 – 62 с.

4. Давидов М.О. Курс математичного аналізу: підручник для студентів фіз. -мат. факультетів педагогічних інститутів. Київ: Вища школа, 1990. Ч. 1: Функції однієї змінної. 38 – 53 с.

5. Денисюк В. П. Вища математика: підручник: у 4 ч. Ч. 2. / В. П. Денисюк, В. К. Репета. – 4-те вид., стереот. – К.: НАУ- друк, 2019. – 27 – 46 с.

6. Дубовик В. П. Вища математика: навч. посібник / В. П. Дубовик, І. І. Юрик. – К.: Вища шк., 1993. – 64 – 78 с.

7. Гельфгат І.М., Генденштейн Л.Є, Кирик Л.А. 1001 задача з фізики з відповідями, вказівками, розв’язаннями. – Харків, 2011. – 35 – 52 с.

8. Загородний В.В. Загальна фізика. Механіка. Київ: НТУУ «КПУ», 2016. 36 – 53 с.

9. Електронний ресурс: Біографія Тейлора: http://www.univer.sity.ua/Edu/Math/tteilor.htm

10. Електронний ресурс: «Остача в формулі Тейлора та її оцінка»: http://webmath.exponenta.com/s/kiselev1/node58.htm

11. Електронний ресурс: «Формула Тейлора»: http://matica.org.ua/kratkiy-kurs-lektsiy-po-differentsialnomu-ischisleniiu/5-3-formula-teylora

12. Кенєва І.П., Мінаєв Ю.П., Тихонська Н.І. Фізико-математичні вправи на вступних іспитах до університету та олімпіадах для абітурієнтів:

Навчальний посібник / За заг. ред. Ю.П. Мінаєва. – Запоріжжя: ЗДУ, 2015. – 98 с.

13. Марченко О.А., Мінаєв Ю.П. Знайомство з рядом Тейлора і розвиток критичного мислення // Наукові записки. – Випуск 60. Серія: Педагогічні науки. Частина 2. – Кіровоград: РВЦ КДПУ ім. В. Винниченка. – 2015. – С.77 – 84.

14. Математика для економістів: навч. посібник у 3 ч. Ч. 2 / І. О. Ластівка, Н.І. Затула, Є.Ю. Корнілович [та ін.]. – К.: НАУ. 2012. – 31 – 42 с.

15. О.І. Соколенко. "Вища математика: підручник". Київ: Видавничий центр «Академія», 2013. 43 – 50 с.

16. Пискунов Н.С. Диференціальне і інтегральне числення. Для втузів. Москва: Наука, 1972. Т. 2. 56 – 70 с.

17. Швець О., Бойко Л. Міжпредметні зв'язки математики і фізики: стан, проблеми, перспективи // Фізика та астрономія у школі. – 2012. – №6. – С. 21-25.

18. Шкіль М.І. "Математичний аналіз: В 2 частинах." -- Київ: Вища школа. Головне видавництво, 1981. Ч. 2. 45 – 55 с.

19. Юрик І., І. П.Вовкодав [та ін.]; за ред. В. П. Дубовика, І. І. Юрика. – К.: А.С.К., 2011. – 48 – 60 с.

20. Халперн Д. Психологія критичного мислення. – К.: «Просвітництво», 2010. – 51 – 62 с.