Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: «ЗАДАЧА НАЙКРАЩОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНОЇ ВІДСТАНІ НАБЛИЖЕННЯ ДЕЯКОГО АБСТРАКТНОГО ДИСКРЕТНОГО БАГАТОЗНАЧНОГО ВІДОБРАЖЕННЯ МНОЖИНОЮ НЕПЕРЕРВНИХ ОДНОЗНАЧНИХ ВІДОБРАЖЕНЬ»

Виконала: студентка II курсу, групи М1-М22
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)
Савчук Марія Русланівна

Керівник: кандидат фізико-математичних
наук, доцент **Гудима У.В.**

Рецензент: кандидат фізико-математичних
наук, доцент **Сорич В.А.**

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Теорія наближення функцій, певним чином, має справу з наближенням окремих функцій та класів функцій за допомогою підпросторів, кожен з яких складається з функцій, що є в деякій мірі більш простими, ніж апроксимовані функції.

Задачі наближення функції беруть свій початок ще з часів Архімеда і в математиці вони зустрічаються постійно. Однак датою народження теорії наближення прийнято вважати 1854 р., коли П. Л. Чебишев опублікував свою працю, в якій досліджуючи задачу про рівномірне наближення неперервної на відрізку дійснозначної функції підмножиною алгебраїчних поліномів степеня, що не перевищує m, сформулював перші принципи пошуку найкращого наближення.

Згодом у працях багатьох математиків було розглянуто різні постановки задач теорії наближення функцій, зокрема і абстрактних, які відрізняються вибором міри відхилення та апроксимуючої множини.

Серед них особливе місце займають задачі одночасного наближення кількох або нескінченної кількості елементів [1-5,7,10,11,13,14,16].

Одна із таких задач розглядається в роботі.

Позначимо через K — компакт, z — його елементи, Y — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $C(K,Y)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір однозначних відображень $p: K \to Y$ з нормою $\|p\| = \max\limits_{z \in K} \|p(z)\|$, $(C(K,Y))^m$ — впорядкована множина m відображень простору $C(K,Y)$: $\{a_i\}_{i=1}^{m} \in (C(K,Y))^m$, $a_i \in C(K,Y)$, $i = \overline{1,m}$, $\delta_i \in C(K)$, $\delta_i(z) > 0$, $i = \overline{1,m}$, $z \in K$, $W \subset C(K,Y)$.

Задачею найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення $\left\{a_i\right\}_{i=1}^{m}$ множиною W простору $C(K,Y)$ будемо називати задачу відшукання величини

$$\alpha^*(W;\left\{a_i\right\}_{i=1}^{m};\left\{\delta_i\right\}_{i=1}^{m}) = \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p(z)-a_i(z)\right\|. \qquad (0.1)$$

Якщо існує елемент $p^* \in W$ такий, що має місце рівність

$$\alpha^*(W;\left\{a_i\right\}_{i=1}^{m};\left\{\delta_i\right\}_{i=1}^{m}) = \inf_{p\in W}\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p_i(z)-a_i(z)\right\| =$$

$$=\max_{1\le i\le m}\max_{z\in K}\delta_i(z)\left\|p_i^*(z)-a_i(z)\right\|,$$

то його будемо називати екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.1).

У випадку, коли $\delta_i(z)=1,\ z\in K,\ i=\overline{1,m}$ задача відшукання величини (0.1) є задачею одночасної апроксимації кількох неперервних на компакті абстрактних функції лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору підмножиною цього підпростору.

Метою роботи є: розглянути властивості функціоналу та оператора найкращого наближення для задачі відшукання величини (0.1); встановити деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1); умови характеризації та єдиності екстремального для величини (0.1); критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною; співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною; теорему про очистку.

Об'єктом дослідження є задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Предметом дослідження є проблеми теорії наближення, що стосуються задачі найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Завданнями дослідження є:

– розглянути властивості функціоналом рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$;

– розглянути властивості оператора найкращого наближення A: $(C(K,Y))^m \to W$;

– встановити деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1);

– розглянути необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– розглянути необхідні та достатні умови єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– встановити критерій екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановити співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– сформулювати та довести теорему «про очистку» на випадок задачі (0.1).

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

– встановлено властивості функціоналом рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$;

– встановлено властивості оператора найкращого наближення A: $(C(K,Y))^m \to W$;

– доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (0.1);

– розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– сформульовано та доведено теореми єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1);

– сформульовано та доведено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановлено співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (0.1);

– окремі результати конкретизовані на деякі часткові випадки.

Практичне значення отриманих результатів. Результати отримані в роботі носять теоретичний характер і можуть бути використанні для подальшого дослідження задачі найкращої у розумінні зваженої відстані наближення абстрактного дискретного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на науковій конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету 1 листопада 2023 року.

Основні результати наукових досліджень опубліковано у працях:

Савчук М. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення опуклою скінченновимірною множиною неперервних однозначних відображень. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [Електронний ресурс]. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С. 12-15.

Савчук М. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення опуклою скінченновимірною множиною неперервних однозначних відображень. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 16. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. С.67-72.

Структура дипломної. Дипломна робота складається із вступу, двох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), встановлено властивості функціонала та оператора найкращого наближення для задачі відшукання величини (0.1), розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1), доведено теореми характеризації та єдиності екстремального елемента.

У другому розділі роботи встановлено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною, співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (0.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною та узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (0.1).

ВИСНОВКИ

У роботі розглядалась задача найкращого у розумінні зваженої відстані наближення деякого абстрактного дискретного багатозначного відображення множиною неперервних однозначних відображень.

Зокрема:

– розглянуто властивості функціоналу рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$, зокрема, встановлено, що функціонал рівномірного наближення $\alpha^*(W;\{a_i\}_{i=1}^m;\{\delta_i\}_{i=1}^m)$ є неперервним по $\{a_i\}_{i=1}^m$ на $((C(K,Y))^m,\rho)$ для довільної множини W та напівадетивним на $(C(K,Y))^m$ та додатно однорідним, якщо W — підпростір простору $C(K,Y)$;

– розглянуто властивості оператора найкращого наближення $A:(C(K,Y))^m \to W$, зокрема, встановлено, що оператор найкращого наближення A є однорідним , якщо W — підпростір простору $C(K,Y)$ та неперервним на $C(K,Y)$, якщо W — скінченновимірний підпростір простору $C(K,Y)$;

– доведено деякі теореми існування екстремального елемента для задачі (1.1);

– розглянуто необхідні, достатні умови та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання величини (1.1);

– сформульовано та доведено теореми єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1);

– сформульовано та доведено критерії екстремального елемента для задачі відшукання величини (1.1) у випадку апроксимації скінченновимірною множиною;

– встановлено співвідношення двоїстості для задачі відшукання величини (1.1) у випадку апроксимації скінченновимірною опуклою множиною;

– узагальнено теорему «про очистку» на випадок задачі відшукання величини (1.1);

– окремі результати конкретизовані на деякі часткові випадки.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ward J. D. Chebyshev centers in spaces of continuous functions: Pacific journal of mathematics. 1974. №1. P.283-287.
2. Гнатюк Ю. В. Алгоритми найкращого одночасного рівномірного наближення сім'ї неперервних на компакті функцій чебишовським підпростором. Український математичний журнал. 2003. №2. С. 291-307.
3. Гнатюк Ю. В. Найкраще рівномірне наближення сім'ї неперервних на компакті функцій: Український математичний журнал. 2002. №11. С. 1574-1580.
4. Гнатюк Ю. В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів: Український математичний журнал. 1996. №9. С.1183-1193.
5. Гольштейн Е. Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения: Наука, 1971. 352 с.
6. Кантович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный аналіз: Наука, 1977. 742 с.
7. Klee V. L. Circumspheres and inner products: Math. Scand. 1960. №2. P. 363-370.
8. Лисенко З. М., Шанін Р. В. Функціональний аналіз: Метричні простори: Конспект лекцій: Одеса: Одеський національний університет імені І. І. Мечникова, 2022. Ч І. 43 с.
9. Лоран П.-Ж.. Апроксимация и оптимизация: Мир, 1975. 496 с.
10. Mach J. On the existence of best simultaneous approximation: J. Approximation theory. 1989. P.258-265.
11. Pevae L. Chebyshev centres in normed spaces: Publications de L'Institut Mathematique. 1989. Tome 49. P. 109-112.
12. Саранчук С. Б. Задача найкращого зваженого рівномірного відновлення неточно заданої за допомогою абстрактних функцій функціональної залежності елементами опуклої множини з додатковим

обмеженням, що задається системою многогранних множин, які неперервно змінюються: магістерська роб.: 014 Середня освіта (Математика). Кам’янець-Подільський, 2018. 63 с.

13. Степанец А. И. Методы теории приближений: Киев: Ин-т математика НАН Украины, 2002. Ч I. 427 с.

14. Степанец А. И. Методы теории приближений: Киев: Ин-т математика НАН Украины, 2002. Ч II. 438 с.

15. Фань Цзи. Теоремы о минимаксе. Бесконечные антагонистические игры: М : Физматгиз, 1963. С. 31-39.

16. Franchetti C., Singer I. Deviation and farthest points in normed linear spaces: Rev. Roum. Math. Pures et Appl. 1979. №3. P. 373-381.