Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Дипломна робота
магістра

з теми: **«Відносна задача Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якій міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід’ємної опуклої функції повільного зростання, та деякі її часткові випадки»**

Виконав: студент ІІ курсу, М1-М22 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Вербівський Ярослав Васильович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Щирба В. С.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам’янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП

Як відомо, останнім часом інтенсивно розвиваються такі галузі математики, які теорія оптимізації, теорія екстремальних задач та інші, результати дослідження яких широко використовуються в економіці, теорії оптимального керування, теорії апроксимації, теорії багатозначних відображень тощо.

Класичною задачею теорії апроксимації є задача про наближення неперервної на відрізку [c,d] функції $c(s)$ множиною A алгебраїчних поліномів $y(s)$, степеня, що не перевищує n, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{y \in A} \max_{s \in [c,d]} |y(s) - c(s)|, \tag{0.1}$$

яка розглядалась у 50-х роках XIX століття.

Пізніше досліджувалось багато подібних задач, у яких функції наближають алгебраїчними, тригонометричними функціями в різних просторах.

З розвитку теорії лінійних нормованих просторів стає зрозуміло, що низка з цих задач вкладаються в постановку задачі такого змісту:

Нехай $(Y, \|\circ\|)$ є лінійним нормованим, в тому числі і банаховим простором, $e \in Y, A \subset Y.$

Задачею найкращого наближення елемента $e \in Y$ множиною $A \subset Y$ називають задачу відшукання величини

$$\inf_{y \in A} \|y - e\|. \tag{0.2}$$

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\|y^* - e\| = \inf_{y \in A} \|y - e\|, \tag{0.3}$$

то його називають елементом найкращого наближення елемента e в множині А (множиною А) або екстремальним елементом для величини (0.2).

Мірою відхилення елементів $y \in A$ до елемента e в задачі відшукання величини (0.2) виступає норма $\|\circ\|$, шукається у множині А елемент $y^* \in A$, який у розумінні норми має найменше відхилення від елемента e.

Елемент $y^* \in A$, який задовольняє співвідношення (0.3), найкраще у розумінні норми наближає елемент e порівняно з іншими елементами $y \in A$.

Однак, серед задач апроксимації гідне місце займають останнім часом задачі теорії найкращої апроксимації не у розумінні норми, а у розумінні, так званої, «викривленої метрики». Серед цих задач є задачі найкращого наближення за переднормою, будь-якою опуклою функцією, в тому числі й опуклою функцією повільного зростання (див., наприклад, [4, 7-9]), задача Чебишова – Стілтьєса, задача Поссе (див., наприклад, [10]) та інші.

Розглянуті вище приклади зводяться до задачі відшукання величини

$$\inf_{y \in A} h(y - e), \tag{0.4}$$

де e та A визначаються, як і вище, а h є переднормою, невід’ємним сублінійним функціоналом.

Узагальненням задачі (0.4) є класична задача Штейнера, яка полягає у відшуканні

$$\inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\|, \tag{0.5}$$

де $e_i \in Y, i = \overline{1,r},$ – фіксовані елементи лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ (див., наприклад, [11, с. 314]).

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\| = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} \|y^* - e_i\|,$$

то його називають точкою Штейнера відносно множини A фіксованих точок $y_1, \dots, y_r$ лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ або просто екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.5).

Практичне значення точки Штейнера полягає в тому, що це точка множини *A*, сума відстаней від якої до фіксованих точок $y_1, \dots, y_r$ лінійного нормованого простору $(Y, \|\circ\|)$ не перевищує (є найменшою) суми відстаней від інших точок множини *A* до цих фіксованих точок $e_i, i = \overline{1,r}$.

Узагальненням задачі (0.4) для випадку, коли h є невід'ємною неперервною опуклою функцією повільного зростання, є задача відшукання величини

$$\Im_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} h(y - e), \qquad (0.6)$$

яка розглядається у дипломній роботі і називається відносною задачею Штейнера в лінійному нормованому просторі $(Y, \|\circ\|)$, в якому відхилення між елементами множини *A* та фіксованими елементами $e_i, i = \overline{1,r}$, цього простору оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої неперервної функції повільного зростання h.

Якщо існує елемент $y^* \in A$ такий, що

$$\sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i) \ \leq \sum_{i=1}^{r} h(y - e), y \in A,$$

тобто, для якого

$$\mathfrak{I}_A^h(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} h(y - e) = \sum_{i=1}^{r} h(y^* - e_i),$$

то його будемо називати узагальненою точкою Штейнера в розумінні функції повільного зростання h у множині A або екстремальним елементом для величини (0.6).

Отримані при дослідженні задачі (0.6) результати мають теоретичне значення. Їх можна використати також при дослідженні задач, які включаються у постановку задачі (0.6), як її часткові випадки, зокрема при дослідженні задач (0.1), (0.2), (0.4), (0.5) та задач типу задачі (0.6), в яких h є нормою, переднормою, сублінійним функціоналом.

Актуальним також є питання існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6), умови його екстремальності та інші питання, які розглядаються в дипломній роботі.

Метою роботи є: ознайомитись з деякими допоміжними поняттями та твердженнями, які використовуються в роботі, зокрема, з поняттям функції (функціонала) повільного зростання, розглянути різного роду приклади функціоналів повільного зростання; встановити властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції; запропонувати свій метод доведення замкнутості та локальної компактності скінченновимірного підпростору лінійного нормованого простору; сформувати та довести теорему існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6), розглянути наслідки з теорем (часткові випадки задачі (0.6)); отримати двоїсте подання похідної за будь-яким напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли простір $(Y, \|\cdot\|)$ є банаховим простором, а h є неперервним сублінійним функціоналом, заданим на $(Y, \|\cdot\|)$, які потрібні для встановлення умов екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (0.6); встановити необхідну, достатню умову та критерії екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (0.6) в розглядуваному випадку. Отримані умови та критерії конкретизувати на деякі задачі, які вкладаються у схему постановки задачі відшукання величини (0.6).

Об'єктом дослідження є дослідження задачі Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної опуклої неперервної функції повільного зростання.

Предметом дослідження є такі проблеми теорії екстремальних задач, як теореми існування та екстремальності елементів, необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимих елементів цих задач. В роботі ці та інші проблеми досліджуються стосовно відносної задачі Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної неперервної функції повільного зростання, зокрема з допомогою невід'ємного неперервного сублінійного функціонала, заданого на цьому лінійному просторі.

Задачами дослідження є :

1. Ознайомитись з деякими допоміжними поняттями та твердженнями, зокрема з поняттям функції (функціонала) повільного зростання, розглянути приклади функціоналів повільного зростання.
2. Встановити властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
3. Сформулювати та довести теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі відшукання величини (0.6).

4. Отримати двоїсте подання похідної за будь-яким напрямком цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом.
5. Встановити необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, та конкретизувати ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

При вирішенні постановлених задач в дипломній роботі використовувались методи математичного, функціонального та опуклого аналізів, методи теорії екстремальних задач, теорії оптимізації.

Наукова новизна отриманих результатів

Результати роботи є новими і полягають в наступному:

1. Розглянуто низку прикладів функцій повільного зростання, заданих на лінійному нормованому просторі. Наведено відповідні обґрунтування.
2. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
3. Сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі (0.6).
4. Отримано двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом.

5. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, та конкретизовано ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

Практичне значення отриманих результатів

Наукове та практичне значення роботи. Дипломна робота має суто теоретичний характер, її результати можна застосувати при побудові збіжних чисельних методів розв'язування задачі (0.6) та інших задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.6), при дослідженні задач апроксимаційного характеру, в яких міра відхилення між елементами визначається «викривленою метрикою».

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та списку використаних джерел.

У першому розділі наведені основні поняття та твердження, які використовуються в дипломній роботі. Розглянуто з відповідним обґрунтуванням низку прикладів функціоналів повільного зростання.

У другому розділі роботи постановлено задачу відшукання точки Штейнера в лінійному нормованому просторі $(Y, \|\cdot\|)$, в якому міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід'ємної неперервної функції повільного зростання h, тобто задачу відшукання величини

$$\mathfrak{J}_A^{\|\cdot\|}(\{e_i\}_{i=1}^r) = \inf_{y \in A} \sum_{i=1}^{r} (y - e_i), \text{де } e_i \in Y, i = \overline{1, r}, A \subset Y. \qquad (2.1)$$

В цьому ж розділі встановлено властивості цільової функції задачі (2.1), сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем.

В третьому розділі для випадку, коли h є невід'ємним неперервним сублінійним функціоналом, отримано двоїсте подання похідної за напрямком цільової функції задачі відшукання величини (2.1) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (2.1), які використано при встановленні умов екстремальності допустимого розв'язку задачі (2.1).

Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі (2.1) та конкретизовано умови та критерії на важливі часткові випадки.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі «Відносна задача Штейнера в лінійному нормованому просторі, в якій міра відхилення між елементами оцінюється з допомогою невід’ємної опуклої функції повільного зростання, та деякі її часткові випадки»:

6. Розглянуто низку прикладів функцій повільного зростання , заданих на лінійному нормованому просторі. Наведено відповідні обґрунтування.
7. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та властивості спряженої до неї функції.
8. Сформульовано та доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.6) та наслідки з цих теорем, які стосуються часткових випадків задачі (0.6).
9. Отримано двоїсте подання похідної за напрямками цільової функції задачі відшукання величини (0.6) та двоїсте подання конуса внутрішніх напрямків для деякої лебегової множини цільової функції задачі (0.6) у випадку, коли h є невід’ємним неперервним сублінійним функціоналом.
10. Встановлено необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (0.6) у випадку, коли h є невід’ємним неперервним сублінійним функціоналом та конкретизовано ці умови і критерії на важливі часткові випадки.

Результати дипломної роботи можна використати при дослідженні та розв’язуванні й інших екстремальних задач, які вкладаються у схему постановки задачі (2.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации / Н.И. Ахиезер. – М.: Наука, 1965. – 407 с.

2. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций / В.К. Дзядык. – М.: Наука, 1977. – 510 с.

3. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения / Н.П. Корнейчук. – М.: Наука, 1976. – 320 с.

4. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация / П.-Ж. Лоран. – М.: Мир, 1975. – 496 с.

5. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.I. – 427 с.

6. Степанец А.И. Методы теории приближений / А.И. Степанец. – Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. – Ч.II. – 468 с.

7. Гнатюк В. А. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции / В. А. Гнатюк, В. С. Щирба // Укр. мат. журн. – 1982. – 4, №5. – С.608-613.

8. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення / Ю.В. Гнатюк // Доп. НАН України. – 1995. - №6. – С. 23-26.

9. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі лінійного одночасного наближення кількох елементів / Ю.В. Гнатюк // Укр. мат. – 1996.-48, №9. – С. 1183-1193.

10. Крейн М.Г. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи / М.Г. Крейн, А.А. Нудельман. – М.: Наука, 1973. – 552 с.

11. Зуховицкий С.И. Линейное и выпуклое програмирование /С.И. Зуховицкий, Л.И. Авдеева. – М.: Наука, 19.

12. Гудима У.В. Опуклий аналіз: навчальний посібник / У.В. Гудима, В.О. Гнатюк. – Кам’янець-Подільський: – Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. – 112 с.

13. Ус С.А Функціональний аналіз: навч. посібник / С.А. Ус. – Д.: Національний гірничий університет, 2013. – 236 с.

14. Люстерник Л.А. Краткий курс функционального анализа / Л.А. Люстерник, В.И.Соболев. – М.: Высшая школа, 1982. – 271 с.

15. Йоффе А.Д. Теория экстремальных задач / А.Д. Йоффе, В.М. Тихомиров. – М.: Наука, 1974.-480с.

16. Гнатюк В.А. О некоторых свойствах функционалов медленного роста / В.А. Гнатюк, В.В. Мойко // Укр. мат. журн. – 1977. – Вып. 29, №1. – С. 39-49.

17. Алексеев В.М. Оптимальное управление / В.М. Алексеев, В.М. Тихомиров, С.И. Фомин. – М.: Наука, 1979. – 429с.

18. Демьянов В.Ф. Приблеженные методы решения экстремальных задач / В.Ф. Демьянов, А.И. Рубинов. – Л.: Изд.-во ЛГУ, 1968.-178с.

19. Пшеничный Б.Н. Необходимые условия экстремума / Н.Б. Пшеничный. – М.: Наука, 1982. – 143с.

20. Жалдак М.І. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник / М.І. Жалдак, Ю.В. Триус. – Черкаси: Брама-Україна, 2005. – 608 с.