

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра комп'ютерних наук

Дипломна робота
магістра

з теми: **«ДОСЛІДЖЕННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ
РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СЛАР У ВИПАДКАХ РОЗРІДЖЕНИХ ДАНИХ»**

Виконав: студент групи KN1-M22
спеціальності 122 Комп'ютерні науки
Гончар Фаррух Шуфратович

Керівник:
Моцик Р.В., кандидат педагогічних наук,
доцент кафедри комп'ютерних наук

Рецензент:
Сморжевський Ю.Л., кандидат
педагогічних наук, доцент,
завідувач кафедри математики

Кам'янець-Подільський – 2023

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА ТОЧНИХ ТА НАБЛИЖЕНИХ ЧИСЕЛЬНИХ МЕТОДІВ РОЗВ'ЯЗАННЯ СИСТЕМ ЛІНІЙНИХ АЛГЕБРАЇЧНИХ РІВНЯНЬ.....	8
1.1. <i>Поняття про точні та наближені чисельні методи розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь</i>	8
1.2. <i>Особливості методів Гауса та переваги ітераційних методів</i>	11
1.3. <i>Дещо про схему Холецького.....</i>	13
РОЗДІЛ 2. ОСОБЛИВОСТІ ВИКОРИСТАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ МЕТОДІВ.....	17
2.1. <i>Проблеми застосування ітераційних методів.....</i>	17
2.2. <i>Класи ітераційних методів.....</i>	18
2.3. <i>Порівняння прямих та ітераційних методів</i>	23
РОЗДІЛ 3. ЗАСТОСУВАННЯ ІТЕРАЦІЙНИХ АЛГОРИТМІВ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ.....	27
3.1. <i>Алгоритм простої ітерації.....</i>	27
3.2. <i>Алгоритм методу Зейделя та верхньої релаксації</i>	28
3.3. <i>Поняття розріджених даних</i>	31
3.4. <i>Формати збереження розріджених матриць.</i>	32
<i>Скалярний добуток векторів</i>	35
3.5. <i>Множення матриці на вектор</i>	35
3.6. <i>Результати експерименту.....</i>	36
ВИСНОВКИ	38
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	39
Додаток. Лістинг програми алгоритму методу Зейделя розв'язування СЛАР	41

ВСТУП

Якщо взяти будь-яку задачу Коші, наприклад, для звичайного диференціального рівняння першого порядку

$$y'(x) = f(x)$$

з початковою умовою

$$y(x_0) = y_0,$$

то навіть у цьому простому випадку методом Ейлера із деяким кроком h ми прийдемо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь

$$y_{i+1} - y_i = hf(x_i), i = \overline{0, n-1}.$$

В прикладних задачах, математичні моделі яких описуються більш складними функціональними залежностями у вигляді систем диференціальних рівнянь чи нерівностей, методом сіток ми також одержимо систему лінійних алгебраїчних рівнянь, але, цілком очевидно, що в таких випадках головна матриця буде мати набагато складнішу структуру.

Якщо проаналізувати її структуру, то тут важливо відмітити, що в обох випадках головна матриця буде дуже розрідженою. Практично завжди при побудові математичних моделей подібного характеру в кожному рядку із тисячами невідомих не більше десяти коефіцієнтів матимуть ненульові значення.

Зокрема, в наведеному вище прикладі головна матриця матиме діагональну структуру: по головній діагоналі стоятимуть -1 , а над нею буде діагональ, де стоятимуть лише 1 . Тобто лише два коефіцієнти в кожному рядку головної матриці будуть не нульовими хоча n (кількість рівнянь і невідомих) може бути як завгодно великим.

В наведеному прикладі матриця є структурованою – ненульові елементи не розміщені хаотично, а у більш складних задачах це не спостерігається.

Постає питання, якими алгоритмами найбільш ефективно розв'язувати систему лінійних алгебраїчних рівнянь з такою головною матрицею.

Виходячи з цього, можна зробити висновок, що тема кваліфікаційної роботи є досить актуальною.

Відповідно до цього була сформульована і **мета кваліфікаційної роботи** – дослідити поведінку в розумінні швидкодії ітераційних методів розв'язування системи лінійних алгебраїчних рівнянь, якщо її головна матриця має структуру розріджених даних хаотичного характеру. Поставлена мета нашла своє відображення у темі кваліфікаційної роботи: “Дослідження ітераційних методів розв'язування СЛАР у випадках розріджених даних”.

Об'єктом дослідження є – системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності.

Предметом дослідження є – алгоритми розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь, методи та підходи пошуку оптимальних за швидкістю алгоритмів.

Досягнення поставленої мети передбачає вирішення таких *завдань*:

1. Здійснити загальну характеристику точних та наближених чисельних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь.
2. Проаналізувати проблеми та особливості використання ітераційних методів.
3. Розглянути формати збереження розріджених матриць розріджених даних та провести комп'ютерний експеримент щодо застосування ітераційних алгоритмів розв'язування системи лінійних рівнянь з такими матрицями.

Методи дослідження. Для розв'язання поставлених завдань використано: теорія чисельних методів, принципи вибору ефективних алгоритмів, порівняльний аналіз.

Наукова новизна роботи:

Наукова новизна полягає у тому, що поєднано ітераційні методи, які виявляються ефективнішими для систем рівнянь великої розмірності, з оптимальними методами збереження та обробки розріджених даних.

Структура та обсяг дипломної роботи. Дипломна робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків, списку використаних джерел та додатку.

В першому розділі обґрунтовано необхідність пошуку ефективніших ніж метод Гаусса алгоритмів розв'язання системи лінійних алгебраїчних рівнянь великої розмірності. Показано, що ітераційні методи мають ряд переваг:

- Час обчислення пропорційний n^2 на ітерацію, тоді як для методу Гауса – n^3 . Якщо для розв'язку потрібно менше ніж n ітерацій, то втрати машинного часу будуть менші.
- Як правило похибки округлення при ітераційному методі впливають на остаточні результати значно менше, ніж при методі Гауса, оскільки при його використанні похибки не нагромаджуються.
- Ітераційний метод стає особливо зручним при розв'язуванні розріджених систем, тобто коли переважна кількість коефіцієнтів системи дорівнює 0.

У другому розділі показано, що ітераційні методи застосовуються головним чином для розв'язування складних задач великої вимірності.

Разом з тим, ефективному використанню ітераційних методів заважають ряд обставин, зокрема:

1) невідомо, який метод належить застосовувати і яким чином його можна реалізувати;

2) невідомо, як обирати ітераційні параметри, що необхідні для роботи конкретних методів, наприклад, коефіцієнт релаксації для методу послідовної верхньої релаксації.

3) неясний вибір моменту закінчення ітераційного процесу.

4) значною проблемою постає задача перетворення системи лінійних алгебраїчних рівнянь у загальній формі у збіжну ітераційну форму.

У третьому розділі було проведено цілий ряд чисельних експериментів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Зокрема порівнювалася швидкодія методу Зейделя без врахування розрідженості матриці та з врахуванням розрідженості. Встановлено, що запропонований метод при великій розмірності та точності обчислення порядку 10^{-11} швидкодія запропонованого методу була кращою до 15 відсотків в порівнянні із звичними ітераційними методами без врахування розрідженості.

Одержані результати доцільно використовувати при читанні курсу “Обчислювальні методи”. Також вони будуть корисними в різного роду вибіркових дисциплінах, де звертається увага на використання ефективних чисельних методів. Цікавими можуть бути продовження досліджень з використанням розгалужених обчислень.

Апробація результатів дослідження проводилася шляхом виступу на наукових конференціях:

1. Фаррух ГОНЧАР. Обробка розріджених даних. Збірник наукових праць студентів та магістрантів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип. 17, с. 251-253.
2. Фаррух ГОНЧАР Дослідження ітераційних методів розв'язання СЛАР у випадках розріджених даних. Збірник матеріалів наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. 1 листопада 2023 року [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський :

Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана
Огієнка, 2023, с. 30-31.

Результати досліджень опубліковано у роботі:

Гончар Ф.Ш., Моцик Р.В. Порівняльна характеристика точних та
наближених чисельних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних
рівнянь. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету
імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 15. Кам'янець-
Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені
Івана Огієнка, 2022, с. 12-15.

Повний обсяг дипломної роботи становить 44 сторінки, у тому
числі: 38 сторінок основного тексту, список використаних джерел із 12
найменувань та 1 додатку.

ВИСНОВКИ

За проведеним аналізом можна зробити висновки, що про великих розмірах системи ітераційні методи розв'язування систем лінійних алгебраїчних рівнянь ефективніші за точні методи. Як правило похибки округлення при ітераційному методі впливають на остаточні результати значно менше, ніж при методі Гауса, оскільки при його використанні похибки не нагромаджуються. Ітераційні методи стають особливо зручним при розв'язуванні розріджених систем, тобто коли переважна кількість коефіцієнтів системи дорівнює 0.

Разом з тим, ефективному використанню ітераційних методів заважають ряд обставин, зокрема:

1) невідомо, як обирати ітераційні параметри, що необхідні для роботи конкретних методів, наприклад, коефіцієнт релаксації для методу послідовної верхньої релаксації.

2) значною проблемою постає задача перетворення системи лінійних алгебраїчних рівнянь у загальній формі у збіжну ітераційну форму.

Встановлено, що запропонований метод врахування розрідженості для ітераційних методів при великій розмірності та точності обчислення порядку 10^{-11} показує кращу швидкодію до 15 відсотків в порівнянні із звичними ітераційними методами без врахування розрідженості.

Одержані результати можна використати при читанні курсу “Обчислювальні методи”. Також вони будуть корисними в різного роду вибіркових дисциплінах, де звертається увага на використання ефективних чисельних методів.

Цікавими можуть бути продовження досліджень з використанням розгалужених обчислень.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Волонтир Л.О, Зелінська О.В., Потапова Н.А., Чіков І.А. Чисельні методи : навчальний посібник. Вінниця : ВНАУ, 2020. 322 с.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 Т. М.: 1962. Т. 1. 464 с. 1962. Т.2. 620 с.
3. Гончар Ф.Ш., Моцик Р.В. Порівняльна характеристика точних та наближених чисельних методів розв'язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 15. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022, с. 12-15.
4. Демидович Б. Л., Марон И. А. Основы вычислительной математики. М.: 1970. 664 с.
5. Калиткин Н.Н. Численные методы. М. : Наука, 1978. 512 с.
6. Ляшенко М.Я., Головань М.С. Чисельні методи : підручник. Київ : Либідь, 1996. 288 с.
7. Мясковська М.О., Щирба В.С., Щирба О.В. Чисельні методи – Кам'янець-Подільський : видавець ПП Зволейко Д.Г., 2013. 84 с.
8. Мясковська М. О., Фуртель О. В., Щирба В. С. Лабораторний практикум з курсу обчислювальних методів: навчально-методичний посібник. 2-е вид, доп. і перероб. [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. 167 с. Електронна версія посібника доступна за покликаннями:
URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/7476>
9. Стіренко С. Г. Зберігання розріджених матриць великих розмірностей в системі з локальною пам'яттю. Вісник НТУУ «КПІ»

Інформатика, управління та обчислювальна техніка: зб. наук. праць.
Київ: Век+, 2020. № 52. С. 111–117.

10. Хейгеман Л., Янг Д. Прикладные итерационные методы. М.: Мир, 1986. 446 с.

11. Джерела інформації

1. http://eprints.zu.edu.ua/18543/1/metody_obchyslen.pdf

2. <http://www.unicyb.kiev.ua/Library/OM/ZAD1/index.html>