

Національна академія наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України  
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є Пухова НАН України  
Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Національний університет «Одеська політехніка»  
Черкаський державний технічний університет  
Національний університет водного господарства та природокористування  
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського  
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)  
University of National and World Economy (Sofia, Bulgaria)  
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)  
Atatürk University (Erzurum, Turkey)  
Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)



## **СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ**



### **ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ**

10-ї Міжнародної наукової конференції  
пам'яті почесного професора

Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка,  
д.т.н., професора, почесного академіка НАПНУ  
Анатолія Федоровича ВЕРЛАНЯ

Електронне видання

Кам'янець-Подільський  
2024

Рекомендувала вчена рада Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 6 від 27 червня 2024 року.

**Редакційна колегія:**

- О. М. Хіміч**, д.ф-м. н., професор, академік НАН України (голова);  
**В. А. Федорчук**, д. т. н., професор (заступник голови);  
**А. А. Верлань**, д. т. н., професор;  
**В. А. Іванюк**, д. т. н., доцент;  
**О. Є. Коваленко**, д. т. н., професор;  
**Р. В. Моцик**, к. пед. н., доцент;  
**Ю. В. Теплінський**, д. ф-м. н., професор.

**Відповідальні секретарі:**

- В. А. Іванюк**, д. т. н., доцент;  
**І. С. Понеділок**, асистент кафедри.

**С91 Сучасні проблеми математичного моделювання, прогнозування та оптимізації:** тези доповідей 10-ї Міжнародної наукової конференції. Пам'яті почесного професора Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, д.т.н., професора, почесного академіка НАПНУ Анатолія Федоровича ВЕРЛАНЯ [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. 142 с.

**Електронна версія збірника доступна за покликаннями:**

URL: <http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8145>

У збірнику друкуються нові результати досліджень з проблем математичного моделювання, прогнозування та оптимізації.

Для наукових та науково-педагогічних працівників, докторантів, здобувачів, аспірантів і студентів вищих навчальних закладів.

**Пленарне засідання**  
**Відкриття 10-ї Міжнародної наукової конференції**  
**«СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ,**  
**ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ»**

**ДОПОВІДІ**

**Л. О. Митько**, канд. фіз.-мат. наук

Інститут проблем моделювання в енергетиці  
імені Г. Є. Пухова НАН України, м. Київ

**НАУКОВИЙ ДОРОБОК ТА СПАДЩИНА**  
**АНАТОЛІЯ ФЕДОРОВИЧА ВЕРЛЯНЯ**

А. Ф. Верлянь, член-кореспондент і почесний академік Національної академії педагогічних наук України, доктор технічних наук, професор.

Народився А. Ф. Верлянь 28 січня 1934 року в місті Хмільник Вінницької області у сім'ї військового. Вищу освіту Анатолій Федорович отримав у Київському політехнічному інституті. Після закінчення електротехнічного факультету (1956 р.), працював на підприємствах Мінавіапрому: авіаційний завод у м. Уфа, кафедра автоматичного управління Київського інституту цивільного повітряного флоту. Активну наукову діяльність розпочав з 1960 року в Інституті кібернетики АН України. У 1964 р., після закінчення аспірантури, захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня кандидата технічних наук й у стислі терміни пройшов шлях від молодшого наукового співробітника до завідувача науковим відділом Сектора електроніки і моделювання (1968 р.), яким тоді керував академік Г. Є. Пухов. З 1971 р. після переведення Сектора електроніки і моделювання до Інституту електродинаміки АН України А. Ф. Верлянь продовжив свою наукову діяльність в цьому інституті, де у 1973 р. захистив дисертацію на здобуття наукового ступеня доктора технічних наук, а у 1978 р. йому було присвоєне вчене звання професора.

А. Ф. Верлянь в колі учнів і однодумців академіка Г. Є. Пухова належав до числа фундаторів Інституту проблем моделювання в енергетиці, створеного у 1981 році. Впродовж десяти років він обіймав посаду заступника директора цього інституту з наукової роботи. З моменту створення інституту й до травня 2015 року він очолював науковий відділ, а останні роки працював головним науковим співробітником наукового відділу моделювання енергетичних процесів і систем.

А. Ф. Верлянь відомий український вчений, який вніс значний вклад у розвиток методів математичного моделювання та інформа-

ційних технологій, зокрема в галузі електротехніки та енергетики. На основі створеного ним наукового напрямку у комп'ютерному моделюванні фізичних та інформаційних процесів створена наукова школа, представниками якої є чисельні науковці в нашій країні та за її межами. Запропонований А. Ф. Верланем інтегральний метод математичного моделювання динамічних систем дозволяє ефективно вирішувати складні задачі аналізу, синтезу та діагностики систем керування, електричних і електронних кіл, дослідження та контролю електричних об'єктів з розподіленими параметрами, проектування сучасних технічних об'єктів. В його науковому доробку близько 527 наукових праць, серед яких понад 50 монографій, довідників, наукових збірників та 30 патентів і авторських свідоцтв на винаходи.

Саме інтегральні рівняння стали наріжним каменем його досліджень і першим підсумком цих досліджень стала його кандидатська дисертація «Питання побудови електричних схем та пристроїв для розв'язування інтегральних рівнянь», яка була захищена у 1964 році. А в 1965 році Анатолій Федорович отримує спочатку авторське свідоцтво на «Пристрій для розв'язання інтегральних рівнянь», а через рік авторські свідоцтва «Пристрій для моделювання нелінійних інтегральних рівнянь» та «Аналого-дискретна модель для розв'язання інтегральних рівнянь». Саме з цих пір в його наукових і практичних досягненнях постійно зустрічаються наукові терміни – інтегральні рівняння і моделювання, а закономірним продовженням цих досягнень стає докторська дисертація «Методи електронного моделювання інтегральних та інтегро-диференціальних рівнянь», захист якої відбувся у 1973 році. В дисертації в основних результатах написано: – «Розроблено та досліджено методику електронного моделювання інтегральних співвідношень, що представляє собою сукупність математичних прийомів перетворення та підготовки виразів, що моделюються, методів синтезу розв'язувальних схем та обчислювальних пристроїв на основі електронних моделюючих ланцюгів, а також способів та алгоритмів їх використання, що дозволяє розширити можливості та підвищити ефективність аналогових обчислювальних засобів під час розв'язування задач, що описуються інтегральними та інтегро-диференціальними рівняннями».

Запропоновані в дисертації методи електронного моделювання використовувалися при розв'язанні практичних задач, а також при розробці обчислювальних засобів. До організацій, в розробках яких використовувалися результати дисертаційної роботи або для яких були розв'язані задачі відносяться ЦКБ «Геофізика» (м. Москва), Київський машинобудівний завод ім. Артема, ЦНДІ «Морфізприлад» (м. Ленінград), Харківський політехнічний інститут (Проблемна лабораторія електронного моделювання), завод «Азовкабель» (м. Бер-

дянськ), Львівський політехнічний інститут (науково-дослідні роботи кафедр електротехніки та електромереж), Інститут металофізики АН України. Результати роботи були використані також при розробці математичного аналогового обчислювального комплексу АЗК-2 в («НИИсчетмаш» м. Москва).

Наступним етапом внеску А. Ф. Верланя в розвиток теорії інтегральних рівнянь і їх практичному використанні стала монографія «Методи розв'язування інтегральних рівнянь із програмами для ЕОМ» у співавторстві з Сізіковим В. С., яка побачила світ у 1978 році. А вже в 1986 році автори видали наступну монографію «Інтегральні рівняння: методи, алгоритми, програми», яка мала фактично світове визнання, оскільки отримала позитивні відгуки у провідних світових реферативних журналах, входила до рекомендованих підручників багатьох зарубіжних навчальних закладів і до сих пір використовується в науковому середовищі.

На основі запропонованої А. Ф. Верланем концепції комп'ютерного моделювання створено високопродуктивну методику дослідження довгих ліній електропостачання, аналізу перехідних процесів в кабельних лініях, розв'язання важливої практичної задачі дослідження режимів реактор-трансформаторної частини апарату конденсаторного відбору потужності. Методи моделювання енергетичних процесів в суцільних середовищах дозволили розв'язувати такі трудомісткі задачі як дослідження і формування поверхневих якостей матеріалів для термоелектронних перетворювачів, моделювання теплових полів, діагностики високотемпературної плазми. До важливих результатів необхідно віднести розробку і обґрунтування методів розв'язування прямих і зворотних задач дослідження електричних кіл, синтезу схем, ідентифікації та відновлення зовнішніх збурень. Запропонований А. Ф. Верланем теоретико-груповий підхід до теорії подібності динамічних систем дозволяє вийти за межі традиційних методів теорії подібності за рахунок використання груп перетворень, розширює коло об'єктів, що моделюються за рахунок використання моделей, що їм традиційно не подібні.

Розробки, що виконувалися під керівництвом А. Ф. Верланя, отримали широке впровадження. Зокрема до них відносяться програмні засоби діагностики автономних джерел енергопостачання високо-температурної плазми, пристрої обробки вимірів теплових потоків, програми розрахунку періодичних режимів потужних перетворювачів (вирівнювачів, перетворювачів частоти, інверторів та ін.), засоби контролю герметичності великогабаритних паливних резервуарів та автоматизації контролю металевих конструкцій засобів транспортування енергоносіїв.

Анатолій Федорович вів активну педагогічну діяльність. Серед його учнів – 21 доктор наук та понад 40 кандидатів наук. Понад десять років очолював спеціалізовану вчену раду із захисту дисертацій

в Інституті проблем моделювання в енергетиці імені Г. С. Пухова НАН України та був членом спеціалізованих вчених рад із захисту дисертацій в інших наукових установах. Входив до складу редколегій ряду фахових видань як в Україні, так і за її межами.

Більше 30 років А. Ф. Верлань брав участь в удосконаленні освіти як у вищій так і в середній школі, сприяв розвитку позашкільних закладів України. Починаючи з 1965 р. приймав участь в розробці шкільних учбових програм, приладів та створював багатотиражні посібники з основ кібернетики. На основі цих публікацій А. Ф. Верланем (спільно з В. М. Касаткіним) був написаний перший в Україні підручник «Основи інформатики та обчислювальної техніки» для 9 та 10 класів середньої школи, що видавався у 1985 та 1986 рр. видавництвом «Радянська школа». В Україні у 1998 році з'явився перший пробний національний підручник з інформатики (Вікіпедія) – Верлань А. Ф., Апатова Н. В. Інформатика. Підручник для учнів 10-11 класів середніх загальноосвітніх шкіл. – Київ: Квazar-Мікро, 1998. – 200 с.

У 2000-2001 роках вийшли три видання підручника «Інформатика» для 10-11 класів загальноосвітньої середньої школи (авт. А. Ф. Верлань, Н. В. Апатова) загальним накладом біля 500 тисяч примірників (українською та російською мовами), який був рекомендованим МОН України для використання загальноосвітніми закладами країни.

А. Ф. Верлань брав участь у становленні першої в колишньому СРСР Малої академії наук (Кримської) та низки інших малих академій в Україні, а також є засновником у 1975 р. Київської малої академії, вніс величезний вклад у справу підтримки і розвитку творчих, інтелектуальних здібностей юнацтва і молоді.

Указом Президента України від 4 березня 1992 року була заснована Академія педагогічних наук України, яка 24 лютого 2010 року отримала статус національної. В листопаді 1992 року на Загальних зборах було сформовано склад і керівні органи АПН України. Відділення дидактики, методики та інформаційних технологій в освіті було утворене 18 листопада 1992 р. у числі перших трьох відділень Академії, яке згодом стало називатись – Відділення загальної середньої освіти. Перший склад відділення налічував 11 осіб – 5 дійсних членів і 6 членів-кореспондентів АПН України, одним із них був А. Ф. Верлань, який входив до складу бюро відділення. Учені Відділення зробили помітний внесок у формування концептуальних засад нової школи суверенної Української Держави. Враховуючи вагомий внесок Анатолія Федоровича у формування і розвиток освіти його було обрано почесним академіком Національної академії педагогічних наук України по Відділенню загальної середньої освіти.

Значне місце у науковій та педагогічній діяльності Анатолія Федоровича займала співпраця з фахівцями та науковими колективами Рес-

публіки Узбекистан, яка тривала понад тридцять років. В результаті такої співпраці було підготовлено 5 докторів наук і 8 кандидатів наук, 9 монографій, понад 130 статей, 10 патентів. Рішенням вченої ради Ташкентського державного технічного університету А. Ф. Верляня було обрано Почесним доктором цього університету. Анатолія Федоровича також було обрано Почесним професором Вінницького національного університету, Черкаського державного технологічного університету та Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Останні 20 років свого життя А. Ф. Верлянь приділяв значну увагу розвитку систем із вбудованим інтелектом на базі архітектури машини діалогу, когнітивному управлінню в інтелектуальних навчальних системах, інформаційним системам з адаптивним управлінням процесами сприймання знань та проблемам інтерпретації та розвитку штучного інтелекту, що знайшло відображення в монографіях «Інформаційні системи з адаптивним управлінням процесами сприймання знань», «Когнитивное управление в интеллектуальных обучающих системах», «Математичне моделювання неперервних динамічних систем», «Императивное программирование и объектно-ориентированное моделирование: Java, UML, OCL».

За високий професіоналізм та особистий внесок у розвиток науки А. Ф. Верляня було нагороджено орденом «Знак Пошани», нагрудними знаками Міністерства освіти і науки України «А. С. Макаренка», «Відмінник освіти України», Почесними грамотами НАН України, медалями Національної академії педагогічних наук України «Ушинський К. Д.», «Григорій Сковорода», «Володимир Мономах». За визначні результати у галузі досліджень з енергетики А. Ф. Верлянь був удостоєний іменної премії ім. Г. Ф. Проскури НАН України. У 1995 році йому було присвоєно почесне звання «Заслужений діяч науки і техніки України».

Анатолій Федорович Верлянь належить до наукової еліти України, світла пам'ять про нього назавжди збережеться в історії науки України, у наших душах і серцях.

**О. М. Хіміч**, д-р фіз.-мат. наук, професор, академік НАН України  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ: ІННОВАЦІЇ, ПРОБЛЕМИ І ПЕРСПЕКТИВИ**

Високопродуктивні обчислення і суперкомп'ютерні технології на основі паралельних обчислень на даний час є одним з основних інструментів (а інколи і єдиним) математичного моделювання в наукових і інженерних дослідженнях.

Разом із зростанням можливостей паралельних комп'ютерів зростають і проблеми їх створення та експлуатації, реалізації високопродуктивних обчислень. Вже зараз є суттєві відмінності за рахунок комунікаційних втрат між максимальною та експлуатаційною продуктивностями [1]. Основні проривні досягнення в цих напрямках: нові моделі обчислень, що враховують багаторівневий паралелізм (розподілені, паралельні, гібридні обчислення, квантові обчислення), блочно-циклічні методи розподілу та обробки інформації на розподілених обчислювальних системах, які дозволили позбутися обмеження на ефективність внаслідок ефекту Гайдна та забезпечили створення збалансованих паралельних обчислювальних алгоритмів; методи структурної регуляризації для ущільнення великих розріджених даних, кеш-когерентні методи обробки даних (кешизація обчислень), динамічна адаптивна реконфігурація архітектури в процесі обчислень [2-4]. На часі дослідження та розробка квантових обчислень та програмного забезпечення для задач математичного моделювання, що забезпечить інтенсивний, принципово новий шлях нарощування ресурсу високопродуктивних обчислень.

Ключовою проблемою математичного моделювання процесів, систем та об'єктів незалежно від їх природи (механічних, фізичних економічних, медичних, соціальних тощо) є проблема достовірності отримуваних комп'ютерних результатів. Відомо, що у ряді випадків при вирішенні наукових та інженерних завдань на комп'ютерах користувачі отримують машинні результати, що не містять фізичного сенсу. Це відбувається з багатьох причин, але насамперед через похибку у вихідних даних, відмінності властивостей математичних та машинних моделей задач, відмінності арифметики та машинної арифметики тощо. Практично всі інженерні та наукові задачі мають наближені вихідні дані. Характерною особливістю математичних моделей з наблизеними вихідними даними є те, що їх математичні властивості апріорі невідомі і в рамках похибок вихідних даних можуть змінюватись. Більше того, у фіксованому комп'ютерному середовищі неможливо розрізнити вироджену матрицю від погано обумовленої, патоло-



гічно близькі власні значення від кратних тощо. Проблема достовірності комп'ютерних рішень залишається й надалі однією з практично важливих. Істотна роль покладається на математичні методи оцінювання спадкової, обчислювальної та повної похибок комп'ютерних результатів, програмний та технічний інструментарій багаторозрядної та змішаної арифметики [2-3, 5-6].

Іншою, не менш важливою проблемою практичної реалізації методів математичного моделювання на основі високопродуктивних обчислень є створення програмного забезпечення рівня кінцевого користувача – інтелектуальних програмних засобів, що забезпечують спілкування з комп'ютером мовою предметної області та автоматичну адаптацію методу, комп'ютерного алгоритму, програми та топології комп'ютера до властивостей комп'ютерної задачі у процесі отримання рішення. Програмний інструментарій для цього – знання орієнтовані технології, що базуються на методах гібридного штучного інтелекту з використанням формальних методів та методів машинного навчання [6-7].

Вирішення перерахованих проблем для основних класів задач обчислювальної та прикладної математики (систем лінійних рівнянь алгебри, алгебраїчної проблеми власних рішень, систем звичайних диференціальних рівнянь, нелінійних рівнянь) розглядається в рамках розробки засадничих принципів математичного моделювання, в основі яких лежить тріада: високопродуктивні обчислення, комп'ютерна математика, штучний інтелект. Реалізація такого підходу дозволяє істотно перерозподілити роботи з постановки і розв'язування задач між користувачем і комп'ютером порівняно з традиційними технологіями, автоматизувати процес дослідження та розв'язання задач, забезпечити достовірність комп'ютерних розв'язків та істотно скоротити час математичного моделювання.

#### **Список використаних джерел:**

1. URL: [www.top500.org](http://www.top500.org)
2. Химич А. Н., Молчанов И. Н., Попов А. В. и др. Параллельные алгоритмы решения задач вычислительной математики. Киев: Наук. думка, 2008. 248 с.
3. Khimich O. M., Popov A. V., Chistyakov O. V., Kokhanovskiy V. O. Adaptive Algorithms for Solving Eigenvalue Problems in the Variable Computer Environment of Supercomputers. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023, Vol. 59. №3. P. 480-492.
4. Khimich O. M., Popov A. V. Solving Ill-Posed Problems of the Theory of Elasticity Using High-Performance Computing Systems. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59. №6. P. 743-752.
5. Nikolaevskaya E., Khimich A., Chistyakova T. Programming with Multiple Precision. *Studies in Computational Intelligence*. Berlin: Springer-Verlag. Heidelberg, 2012. 120 p.

6. Khimich O. M., Chistyakova T. V., Sidoruk V. A., Ershov P. S. Adaptive computer technologies for solving problems of computational and applied mathematics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. №6. P. 990-997.
7. ХИМИЧ А. Н., МОЛЧАНОВ И. Н., МОВА В. И. и др. Численное программное обеспечение МИМД-компьютера Инпарком. Киев: Наук. думка, 2007. 221 с.

**Andriy Verlan**, DSc

Norwegian University of Science and Technology, National Technical University of Ukraine «Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

### **SMART ENERGY LAB: INTELLIGENT MULTI-AGENT ENVIRONMENT FOR SMART ENERGY SYSTEM MODELLING, DESIGN AND TRAINING**

The world around is rapidly saturated with new technologies and automation tools. Recently such concepts as Internet of Things, Big Data, unmanned technologies, cloud computing, smart / intelligent building/city are becoming commonplace. Today's trends are: growing share of renewable and non-traditional energy sources, both centralized and «consumer»; development of energy storage market; development of online customer services, in particular, sale of energy, integration of energy and financial services; growth of the world market of building management systems; growth of the world market of energy management services; development of municipal smart energy infrastructures; management of energy use connected with the situational demand [1]. And behind these familiar concepts there are some hidden specialized processes of planning, design, creation and operation. Sustainable development of the above processes requires more and more specialized professionals. Qualitative and timely training of specialists in smart energy approach is one of the driving forces of sustainable development of society nowadays.

The Smart Energy System for more secure and efficient energy supply is the matter of how we use the intelligent approach to energy management to get safe, clean, reliable and flexible energy system.

Trends in smart energy reflect a dynamic shift toward sustainability, decentralization, and technological integration. The urgency of the situation is marked by global recognition of the need for clean energy solutions, supported by policy frameworks and increased consumer awareness. The current situation requires continuous development of infrastructure and technology, supported by joint efforts to create a more sustainable energy future.

To challenge the above vital tasks a collaborative NTNU-KPI research team has been working on a new strategic project initiative to build a joint NTNU-KPI Smart Energy Lab (SEL) for research and educational purposes substantially enriching capacity in providing knowledges and

practical skills in the strategic area of energy sustainability (Fig. 1). SEL key research objectives are intelligent multi-agent environment for smart energy system modelling, design and training.

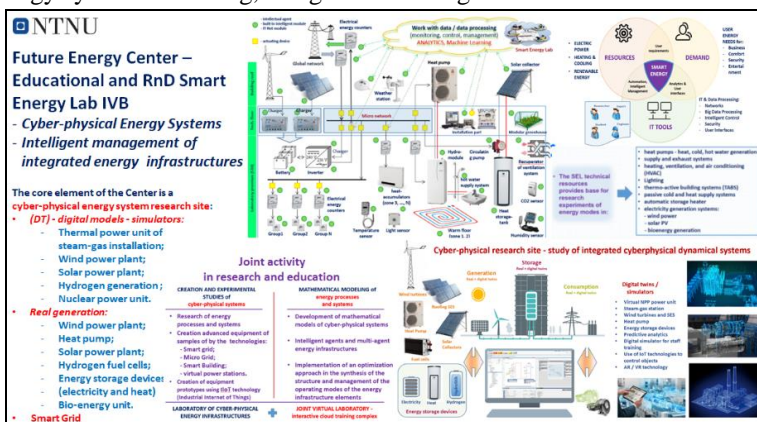


Fig. 1. Smart Energy Lab concept

Main SEL activities are: development of a joint virtual software complex, cyber-physical power engineering systems lab, intelligent and well-being environment model, learning and research facility management system, math modelling and multi-agent approach, experimental Models and Agent Interactions (MAS), cloud training simulator for Intelligent Management of Integrated Engineering System Infrastructure, cloud-based distributed system of power engineering students and personnel training.

The scope of the SEL includes the following research directions using AI, ML, DT, IoT and smart sensor networks: identification of users' energy needs, intelligent management of energy use (generation, accumulation, distribution, consumption), meeting sustainability requirements for ensuring a healthy environment, intelligent management of multiple/blended energy generation – complex usage of renewable, traditional energy sources and energy storages (micro-GRID, smart GRID, smart buildings, etc. [2, 3]), math models of energy systems, intelligent agents and multi-agent energy infrastructures, training and research stands, optimization approach in the synthesis of the structure and management of the operation modes of the energy system infrastructure elements.

## References:

1. Sioshansi F. P. Smart Grid: Integrating Renewable, Distributed & Efficient Energy. Academic Press. 2011.
2. Borlase S. Smart Grids: Infrastructure, Technology, and Solutions. CRC Press. 2013.
3. Chowdhury S., Chowdhury S. P., Crossley P. Handbook of Smart Grid Technologies. Palgrave Macmillan. 2013.

**I. M. Cherevko**, Dr. Sc., Professor,  
**L. A. Piddubna**, PhD.,  
**O. V. Matwiy**, PhD.,  
**S. A. Ilika**, PhD.

Yuriy Fedkovych Chernivtsi National University, Chernivtsi

## APPROXIMATION SCHEMES FOR DIFFERENTIAL- DIFFERENCE EQUATIONS AND THEIR APPLICATIONS

Schemes for approximating differential-difference equations by special schemes of ordinary differential equations are proposed in the work [1]. Further research was found in various functional spaces [2, 3].

Consider the Cauchy problem for a delayed differential equation

$$\frac{dx}{dt} = F(t, x(t), x(t - \tau)), \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [t_0 - \tau, t_0], \quad (2)$$

where  $x \in R^n, \tau > 0, t_0 \in R, F(t, u, v)$  is a continuous function.

Equation (1) corresponds to an approximating system

$$\frac{dt_0}{dt} = F(t, z_0, z_m), \quad (3)$$

$$\frac{dz_j}{dt} = \frac{m}{\tau} (t_{j-1}(t) - z_j(t)), j = \overline{1, m},$$

$$z_j(t_0) = \varphi(t_0 - \frac{j\tau}{m}), j = \overline{0, m}. \quad (4)$$

**Theorem 1 [2].** If the solution of the problem (1)-(2)  $x(t) \in ([t_0 - \tau, T])$ , then

$$\left| x(t - \frac{j\tau}{m}) - z_j(t) \right| \leq \beta(\omega(x, \frac{\tau}{m})), j = \overline{0, m}, t \in [t_0, T],$$

where  $\beta(\delta) \rightarrow 0$  and  $\delta \rightarrow 0, \omega(x, \frac{\tau}{m})$  – the continuity modulus of the function  $x(t)$  on  $[t_0 - \tau, T]$ .

The study of approximation of linear stationary systems with a delay allowed us to construct algorithms for approximate detection of nonasymptotic roots of quasi-polynomials. Using these algorithms, a method for modelling the stability of solutions of linear systems is developed [2, 3].

Consider the initial problem for a linear system with many delays

$$\frac{dx}{dt} = Ax(t) + \sum_{i=1}^k B_i x(t - \tau_i), \quad (5)$$

$$x(t) = \varphi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \quad (6)$$

where  $A, B_i, i=\overline{1, k}$  fixed  $n \times n$  matrix,  $x \in R^n$ ,  $0 < \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_k = \tau$ .

Let us correspond to the initial problem (5)-(6) the system of ordinary differential equations

$$\begin{aligned} \frac{dz_0(t)}{dt} &= A(t)z_0(t) + \sum_{i=1}^k B_i z_{l_i}(t), \quad l_i = \left[ \frac{\tau_i m}{\tau} \right], \\ \frac{dz_j(t)}{dt} &= \mu(z_{j-1}(t) - z_j(t)), \quad j = \overline{1, m}, \quad \mu = \frac{m}{\tau}, \quad m \in N, \end{aligned} \quad (7)$$

with initial conditions  $z_j(0) = \varphi(-\frac{\tau j}{m}), \quad j = \overline{0, m}$ .

**Theorem 2 [2].** If the zero solution of the system with delay (1) is exponentially stable (not stable), then there is  $m_0 > 0$  such that for all  $m > m_0$ , the zero solution of the approximating system (3) is also exponentially stable (not stable).

If for all  $m > m_0$  the zero solution of the approximation system (3) is exponentially stable (not stable) then the zero solution of the system with a delay (1) is exponentially stable (not stable).

It follows from Theorem 2 that the asymptotic stability of the solutions of the delayed linear equations and the corresponding approximating system of ordinary differential equations for sufficiently large values of  $m$  are equivalent. The obtained algorithms for finding non-asymptotic quasipolynomial roots of linear delay differential equations can be used to study applied problems of modeling of dynamic processes with delay.

### References:

1. Halanay A. Approximations of delays by ordinary differential equations. Recent advances in differential equations. New York: Academic Press, 1981. P. 155-197.
2. Matviy O. V., Cherevko I. M. About approximation of system with delay and them stability. *Nonlinear oscilations*. 2004. Vol. 7. №2. P. 208-216.
3. Ilika S. A., Piddubna L. A., Tuzyk I. I., Cherevko I. M. Approximation of linear differential-difference equations and their application. *Bukovinian Mathematical Journal*. 2018. Vol. 6. №3-4. P. 80-83.

**O. Kovalenko**, Dr. Sc. (Eng)\*,

**D. Velev**, Dr., Professor,\*\*

**N. Karevina**, PhD,\*\*\*

**L. Li**, MSc\*\*\*\*

\*National University of Life and Environmental  
Sciences of Ukraine, Kyiv, Ukraine,

\*\*University of National and World Economy, Sofia, Bulgaria,

\*\*\*Institute of Mathematical Machines

and Systems Problems NAS of Ukraine, Kyiv, Ukraine,

\*\*\*\*Bengbu University, Bengbu, China

## **SITUATIONAL AGENTS IN DISASTER RISK MANAGEMENT PROBLEMS DECISION**

Disaster risk management has a situational nature and is determined by the available capabilities in the target system to prevent or eliminate the consequences of catastrophic processes. The transformation of normal processes into abnormal, critical, and further into catastrophic ones is determined by a series of events and related phenomena occurring in the target system under controlled or uncontrolled conditions. Therefore, observability and predictability of system behavior are key conditions for ensuring its controllability.

Formally, the dynamics of any system can be represented by its phase trajectory in multi-coordinate space. The dissipative nature of most natural and technical systems makes it necessary to take into account the impact of dissipative forces on the systems and ensure their predicted dissipation. The process of disaster risk management can be considered dissipative. A condition for stable functioning of such systems is the management of dissipation processes.

A key factor in adequate control of the system is the timely acquisition of information about its state and the use of this information to correct the phase trajectory of the system. Cyberization of various spheres of activity necessitates the development and use of cyber-convergent systems based on situational agents [1], including in disaster risk management.

A situational agent is an intelligent agent that functions on the basis of a domain model and is able to respond to situations in the target system according to the semantics of the situation in this system. Thus, a situational agent combines the properties of a reactive and deliberative agent. The deliberative constituent analyzes the content of the situation and determines its semantics. Instead, the reactive constituent forms a model of response to the situation, according to its semantics.

The formation of knowledge and, based on knowledge, models of the subject area is carried out by processing information obtained during ob-

servations and analysis. Due to the large amount of information related to catastrophic phenomena, it is necessary to use artificial intelligence methods for its processing [2].

Sources of information about catastrophic phenomena should provide the most comprehensive coverage of the investigated phenomena and processes. Such sources can be sensor networks placed directly on objects and in observation areas, as well as data obtained by aerospace monitoring means [3]. At the same time, the influence of atmospheric phenomena on the results of such observations should be taken into account [4].

Based on project requirements and information obtained from other sources, the architecture of the convergent disaster risk management system is being built. This architecture consists of components describing external sources of events, actors, internal processes, target functions, interactions in the form of extensional or intensional knowledge, ontologies, artificial intelligence models, and utility functions. The construction of the system should provide for the creation of a tuple of digital doubles of the problem area, capable of dynamically adapting and learning in the process of functioning in accordance with situational semantics. The technological basis of adaptation is the creation of a metamodel of knowledge about the methods and means of artificial intelligence and the criteria for their application in accordance with best practices.

Therefore, the construction of cyber-convergent disaster risk management systems is based on a multidisciplinary architecture corresponding to groups of processes carried out in the system by tuples of problem-oriented situational agents. The formation of goals, models of behavior and reactions to changes in the state of the controlled system is carried out on the basis of knowledge models and methods of artificial intelligence, taking into account the restrictions on their implementation.

### References:

1. Kovalenko O. Knowledge Driven Cyber-Convergent Systems Based on Situational Agents. *2022 IEEE 17th International Conference on Computer Sciences and Information Technologies (CSIT)*. 2022. P. 243-246. DOI: 10.1109/CSIT56902.2022.10000762.
2. Velev D., Zlateva P. Challenges of Artificial Intelligence Application for Disaster Risk Management. *Int. Arch. Photogramm. Remote Sens. Spatial Inf. Sci.* XLVIII-M-1-2023. P. 387-394. DOI: 10.5194/isprs-archives-XLVIII-M-1-2023-387-2023, 2023.
3. Зацерковний В. І., Каревіна Н. П. Аерокосмічні дослідження Землі: історія становлення: монографія в 2-х т. Київ: ТОВ «Юстон ЛТД», 2014. Т. 1. 302 с.; 2015. Т. 2. 406 с.
4. Yang R., Li L., Zhao Z. and Lu T., Cloud simulation and attenuation at Ka band on slant path. *2013 Cross Strait Quad-Regional Radio Science and Wireless Technology Conference*. Chengdu, China, 2013. P. 300-303. DOI: 10.1109/CSQRWC.2013.6657414.

**В. А. Федорчук**, д-р техн. наук, професор,

**В. А. Іванюк**, д-р техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ІНТЕГРАЛЬНІ МОДЕЛІ В ЗАДАЧАХ ВІДНОВЛЕННЯ ВХІДНИХ СИГНАЛІВ НЕЛІНІЙНИХ ВИМІРЮВАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЮВАЧІВ**

Ключовою задачею, що виникає в процесі вимірювання, є задача відновлення вхідних сигналів, яка відноситься до класу обернених некоректних задач. З метою забезпечення необхідної адекватності в багатьох практичних задачах математичні моделі вимірювальних перетворювачів повинні враховувати різні властивості, зокрема нелінійність процесів та розподіленість параметрів у просторі. Врахування таких характеристик значно ускладнює моделі, і як наслідок, програмне забезпечення пристроїв динамічної корекції. Перспективним є використання операторних моделей в інтегральній формі, які мають ряд позитивних властивостей (висока універсальність, згладжування даних вимірювання, можливість ефективної побудови макромоделей тощо, які у випадку розв'язування задачі відновлення набувають вигляду інтегрального рівняння Вольтерри першого роду. Тобто, базовою інтегральною формою моделі для відновлення сигналів є модель:

$$\int_0^t K(\xi, \zeta, t, s) x(\zeta, s) ds = y(\xi, t), \quad (1)$$

де  $K(\xi, \zeta, t, s)$  – ядро інтегрального оператора,  $y(\xi, t)$  – заданий вихідний сигнал в точці  $\xi$ ,  $x(\zeta, t)$  – шуканий вхідний вплив в точці  $\zeta$ ,  $t \in [0, T]$ . Використання таких моделей можливе лише для опису лінійних процесів. Для врахування нелінійних властивостей базовою моделлю може розглядатися модель у формі поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду [1]

$$\sum_{m=1}^n \int_0^t \dots \int_0^t K_m(\xi, \zeta, t, s_1, \dots, s_m) \prod_{i=1}^m x(\zeta, s_i) ds_i = y(\xi, t), \quad (2)$$

де  $K_m(\xi, \zeta, t, s_1, \dots, s_m)$  – багатовимірні ядра,  $x(\zeta, t)$ ,  $y(\xi, t)$  – відповідно вхідний і вихідний сигнали прикладені у точках  $\zeta$  і  $\xi$  розподіленого об'єкта,  $n$  – деяке натуральне число,  $T$  – час перехідного процесу.

Проблематиці щодо розв'язування обернених задач на основі (1) присвячено багато публікацій, в яких найбільш ефективним є засто-



сування регуляризаційних методів. Розробці методів розв'язування рівнянь (2) присвячені дослідження, які, зазвичай, будуються на основі застосування прямих або ітераційних методів. Застосування наявних методів для розробки математичного та програмного забезпечення для пристроїв динамічної корекції вимірювальних перетворювачів є ускладненим через ряд проблем, зокрема, накопичення кількості обчислень під час числової реалізації багатовимірних інтегральних моделей та некоректність задачі, що не дозволяє в достатній мірі відновлювати сигнали за умов наявності високочастотних шумових завад у вхідних даних. Тому актуальною є задача розробки методів розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь, які стануть основою для розробки програмного забезпечення комп'ютеризованих пристроїв динамічної корекції для вимірювальних перетворювачів.

В якості моделі нелінійного вимірювального перетворювача розглянемо поліноміальне інтегральне рівняння Вольтерри першого роду другого степеня

$$\int_0^t K_1(\xi, \zeta, t, s)x(\zeta, s)ds + \int_0^t \int_0^t K_2(\xi, \zeta, t, s_1, s_2)x(\zeta, s_1)x(\zeta, s_2)ds_1ds_2 = y(\xi, t), \quad (3)$$

де  $y(\xi, t)$  – значення, яке отримане з датчика,  $x(\zeta, t)$  – шукане значення вимірювання,  $K_1(\xi, \zeta, t, s)$  – ядро першого порядку,  $K_2(\xi, \zeta, t, s_1, s_2)$  – ядро другого порядку. Ядра інтегрального рівняння (3), в залежності від методу, що використовується, можуть мати різний вигляд: аналітичний вигляд при застосуванні аналітичних методів перетворення інших типів моделей; табличний вигляд – при використанні методів ідентифікації [2]. В даному випадку ядро  $K_1(\xi, \zeta, t, s)$  подане в табличному вигляді (вектор), а ядро  $K_2(\xi, \zeta, t, s_1, s_2)$  – у вигляді матриці.

Розглянемо метод розв'язування (3) на основі регуляризації моделі.

**Регуляризація моделі.** У зв'язку з тим, що задача відновлення сигналу є некоректною, а застосування відомих методів та алгоритмів не дає змогу знаходити розв'язки із необхідною точністю для випадку наявності завад у вхідних даних за умов обмеження у часі, оскільки обчислення необхідно проводити в реальному часі, пропонується будувати регуляризаційні алгоритми на основі застосування диференціального регуляризаційного оператора

$$Dx(\zeta, t) = \rho_2 \alpha^2 \frac{d^2 x(\zeta, t)}{dt^2} + \rho_1 \alpha \frac{dx(\zeta, t)}{dt} + \rho_0 \alpha x(\zeta, t) \quad (4)$$

де  $\alpha$  – параметр регуляризації,  $\rho_i$  – коефіцієнти регуляризації, які визначають порядок оператора, можуть мати значення 0 або 1.

На основі методу модельних експериментів виявлено, що найкращі результати отримуються при використанні диференціального регуляризаційного оператора першого порядку. Тоді розв'язування поліноміального інтегрального рівняння Вольтерри першого роду зводиться до розв'язування поліноміального інтегро-диференціального рівняння:

$$\alpha \frac{dx(\zeta, t)}{dt} + \int_0^t K_1(\xi, \zeta, t, s) x(\zeta, s) ds + \int_0^t \int_0^t K_2(\xi, \zeta, t, s_1, s_2) x(\zeta, s_1) x(\zeta, s_2) ds_1 ds_2 = y(\xi, t), \quad (5)$$

де  $\alpha$  – параметр регуляризації, пошук якого пропонується здійснювати на основі методу модельних експериментів [3].

**Алгоритм розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь.** Поставлену задачу пропонується розв'язувати шляхом заміни інтегралів квадратурними сумами, що дозволяє отримати ряд переваг, зокрема простоту реалізації та високу стійкість обчислювальних алгоритмів за рахунок регуляризаційних властивостей вибору кроку дискретизації [3].

**Розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь з ядрами табличного виду на нескінченному проміжку часу.** Особливістю моделі (5) є те, що вона визначена ядрами інтегральних операторів, які задані таблично (вектор та матриця). При цьому ядра ідентифікуються на часовому проміжку перехідних процесів. Це накладає часові обмеження на використання моделі, тобто модель може бути використана максимум на проміжку ідентифікації ядер.

Дана проблема вирішується шляхом повторного запуску обчислювального процесу зі зміщенням часового проміжку, на якому визначені ядра інтегральної моделі (5). Операція зміщення ядер з математичної точки зору є некоректною, оскільки при рестарті обчислювального процесу не враховуються початкові умови при обчисленні першого дискретного значення розв'язку на зміщеному часовому інтервалі. При цьому на початку рестарту спостерігаються значні похибки в обчисленні розв'язку. Однак, завдяки унікальній властивості інтегральних моделей, а саме властивості регуляризації, похибка з часом швидко зменшується до рівня методичної похибки. Для отримання розв'язку на нескінченному інтервалі часу з прийнятною похибкою, що не пере-

вищує похибку методу, пропонується використання додаткового обчислювального процесу для розв'язування рівняння (5).

Особливістю додаткового обчислювального процесу є те, що ядра, які задано таблично зміщені в часі на половину часового інтервалу, на якому вони визначені. Це дає змогу отримати розв'язки з прийнятною точністю на інтервалах, в яких спостерігаються значні похибки при рестарті основного обчислювального процесу. Результуючий розв'язок є результатом об'єднання розв'язків, які отримані при виконанні двох обчислювальних процесів у двох програмних потоках, причому враховуються фрагменти отриманих результатів, де спостерігається стійка збіжність розв'язку.

Отже, розроблений метод розв'язування поліноміальних інтегральних рівнянь першого роду другого степеня на основі застосування диференціального регуляризаційного оператора та використання механізму повторного запуску обчислювального процесу зі зміщенням часового проміжку, на якому визначені ядра рівняння, дав змогу розв'язати задачу відновлення вхідного сигналу нелінійного вимірювального перетворювача в умовах реального часу при наявності високочастотних шумових завад у вхідному сигналі. Перспективним напрямком подальших досліджень є визначення оптимального часового інтервалу на якому визначаються ядра інтегральної моделі та параметра регуляризації, для якого спостерігається максимальна швидкість збіжності обчислювального процесу при рестарті.

### Список використаних джерел:

1. Ivaniuk V. A., Ponedilok V. V. Method of Restoration of Input Signals of Nonlinear Dynamic Object with Distributed Parameters. *Mathematical and Computer Modelling. Series: Technical Sciences*. 2018. № 18. P. 65-73. DOI: 10.32626/2308-5916.2018-18.65-73.
2. Ivaniuk V. A., Fedorchuk V. A. Adaptive Method of Identification of Models of Nonlinear Dynamic Systems with Using Integral Volterra Series. *Elektronnoe Modelirovanie* 2019. Vol. 41. № 3. P. 33-42. DOI: 10.15407/emodel.41.03.033.
3. Verlan A. F., Sagatov M. V., Sytnik A. A. Methods of mathematical and computer modeling of measuring transducers and systems based on integral equations. Tashkent: Fan Publishing House of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, 2011.

Секція 1.  
ІНТЕГРАЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ  
МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП'ЮТЕРНОГО  
МОДЕЛЮВАННЯ

---

**О. О. Sytnyk**, Dr. Sc., Professor,

**К. М. Klyuchka**, PhD,

**S. Yu. Protasov**, PhD,

**Н. О. Kyselova**

Cherkasy State Technological University, Cherkasy

**APPLICATION OF INTEGRAL DYNAMIC MODELS FOR  
RESEARCH OF ELECTRICAL CIRCUITS**

The modern stage of development of electrical engineering is characterized by an increase in the complexity of the tasks of analysis and design of electrical engineering devices, which is caused by the widespread introduction of electrical circuits that contain heterogeneous elements – both with concentrated and distributed parameters. This circumstance imposes special requirements on their models, up to the need to use non-traditional models, the structure of which should take into account the heterogeneity of these circles [1]. In addition, for the calculation and design of a significant number of electrical circuits, the initial information is experimentally obtained data in the form of continuous dynamic characteristics of these circuits. In this case, it is quite difficult to apply traditional models in the form of differential equations, which belong to the class of parametric models. In principle, the most effective should be non-parametric models that are formed directly on the basis of dynamic characteristics. This feature is possessed by models in the form of integral operators or equations, which have a number of such positive properties as high universality, potentially high stability of computing processes, the property of smoothing experimental data, and the possibility of effective construction of macromodels [1, 2].

In the general case, an arbitrary electric circuit is described by a system of integral equations of Voltaire-Uriason

$$y_i(t) + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t H_{ij} [t, s, y_j(s)] ds = \sum_{q=1}^m \int_{t_0}^t G_{iq} [t, s, f_q(s)] ds, \quad (1)$$

where  $y_i(t)$  ( $i = \bar{1}, \bar{n}$ ) – unknown quantities (currents, voltages, flows);  $f_q(t)$  ( $q = \bar{1}, \bar{m}$ ) – functions that depend on external sources and initial conditions;  $H_{ij}$  i  $G_{iq}$  – the transforming characteristics of the elements.

In the case of a linear circle, instead of (1), the system of linear equations of Voltaire is used

$$y_i(t) + \sum_{j=1}^n \int_{t_0}^t H_{ij}(t,s) y_j(s) ds = \sum_{q=1}^m \int_{t_0}^t G_{iq}(t,s) f_q(s) ds, \quad (2)$$

where, in this case, the kernels of the equations  $H_{ij}(t,s)$  i  $G_{iq}(t,s)$  have the meaning of weight functions (impulse characteristics).

For a number of applied problems of modeling the dynamics of electric circuits, it is possible to present mathematical models in equivalent forms: differential, integral, and integro-differential. It is obvious that the errors of numerical solutions depend in different ways on the level of accuracy of the initial data set and the level and type of obstacles for different forms of mathematical models. Therefore, in order to assess the conditions of applicability and determine the area of preferential use of types of mathematical models of electric circuits, the influence of interference of different frequencies on the accuracy of the calculation of dynamic processes in an electric circuit was investigated.

It was established that the choice of one or another mathematical model largely depends on the frequency of interference. It is obvious that in the field of low-frequency disturbances, the differential model should be preferred. However, as the frequency of the disturbance increases, the accuracy of the differential model solution decreases, and the integral and integro-differential models are more appropriate.

As a general conclusion, it should be noted that the use of integral equations to describe the dynamics of electric circuits leads to obtaining a number of peculiar methods of their qualitative and quantitative analysis.

### References:

1. Verlan A. F., Verlan A. A., Klyuchka K. M., Fedorchuk V. A. Integral dynamic models of electrical circuits: monograph. Kamianets-Podilskyi: Kamianets-Podilskyi Ivan Ohienko National University, 2022. 172 p.
2. Sytnyk A. A., Klyuchka K. N., Kostyan N. L. The method of identification of a dynamic object using an integral model.

К. Г. Геселева, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПОБУДОВА НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ОДНОГО ТИПУ ІНТЕГРО-ФУНКЦІОНАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З МАЛОЮ НЕЛІНІЙНІСТЮ

У просторі  $L_2[a, b]$  розглядаємо інтегро-функціональне рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b K(x, t)y(t)dt + \int_a^b H(x, t)y(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x, t)F(t, y(t))dt, \quad x \in [a, b], \quad (1)$$

з умовою

$$y(x) = \psi(x), \quad x \notin [a, b], \quad (2)$$

де  $\varepsilon$  – малий додатний параметр,  $f(x)$  – відома на  $[a, b]$  та за його межами функція, а  $y(x)$  – шукана функція.

Щодо функцій  $h(x)$ ,  $p(x)$  і ядер  $K(x, t)$ ,  $H(x, t)$ ,  $G(x, t)$  припускаємо, що вони, відповідно на проміжку  $[a, b]$  й у квадраті  $[a, b]^2$  задовольняють умови:

$$|p(x)| \leq \bar{p} < \infty, \quad (3)$$

$h(x)$  – неперервно-диференційовна на  $[a, b]$  і

$$h'(x) \geq l > 0, \quad x - h(x) \geq \Delta > 0, \quad (4)$$

$$\int_a^b \int_a^b K^2(x, t)dxdt = K^2, \quad \int_a^b \int_a^b H^2(x, t)dxdt = H^2, \quad \int_a^b \int_a^b G^2(x, t)dxdt = G^2. \quad (5)$$

Вважаємо, що функція  $F(t, y)$  в області

$$D = \{a \leq t \leq b, -\infty < y < \infty\}$$

вимірна по  $t$  при всіх  $y$  і неперервна по  $y$  при всіх  $t$  (умова Каратеодорі) і задовольняє умову Ліпшиця.

Слід зауважити, що до рівняння (1) з умовою (2) зводиться крайова задача для диференціального рівняння з відхиленням аргументу, причому у випадку, коли  $h(x) = x - \Delta$ ,  $\Delta > 0$ , запізнення аргументу  $\Delta$  – стале.

Рівняння (1) з виконанням умови (2) та умов (3)-(5) можна вести до інтегро-функціонального рівняння з малою нелінійністю вигляду

$$y(x) = f(x) + p(x)y(h(x)) + \int_a^b T(x,t)y(t)dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t)F(t,y(t))dt. \quad (6)$$

Ідея колокаційно-ітеративного методу стосовно рівняння (1) з умовою (2) полягає в тому, що наближені розв'язки знаходимо за формулами:

$$y_k(x) = f(x) + p(x)z_k(h(x)) + \int_a^b K(x,t)z_k(t)dt + \int_a^b H(x,t)z_k(h(t))dt + \varepsilon \int_a^b G(x,t)F(t,y_{k-1}(t))dt, \quad x \in [a,b], \quad (7)$$

$$y_k(x) = \psi(x), \quad x \notin [a,b], \quad k = 1, 2, \dots, \quad (8)$$

$$z_k(x) = y_{k-1}(x) + w_k(x), \quad (9)$$

$$w_k(x) = \sum_{j=1}^n a_j^k \varphi_j(x), \quad j = \overline{1, n}, \quad (10)$$

де  $\{\varphi_j(x)\}_{j=1}^n$  – задана на  $[a,b]$  система лінійно-незалежних функцій.

Невідомі коефіцієнти  $a_j^k$  знаходимо з умови

$$y_k(x_i) - y_{k-1}(x_i) = 0, \quad i = \overline{1, n}, \quad (11)$$

де  $x_i \in [a,b]$  – вузли колокації. Слід зауважити, що умова (11) приводить до системи лінійних алгебраїчних рівнянь вигляду

$$\sum_{j=1}^n \beta_{ij} a_j^k = b_i^k, \quad i, j = \overline{1, n}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (12)$$

Якщо система (12) має єдиний розв'язок, то за допомогою колокаційно-ітеративного методу (7)-(11) наближені розв'язки  $y_k(x)$  будуються однозначно (за початкове наближення  $y_0(x)$  беремо деяку неперервну функцію). За наближення до шуканого розв'язку можна взяти як функцію  $y_k(x)$  так і функцію  $z_k(x)$ .

А. С. Луца, аспірант

В. Д. Павленко, д-р техн. наук, професор

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

## ІНСТРУМЕНТАЛЬНІ ЗАСОБИ ОРГАНІЗАЦІЇ ХМАРНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ЗАДАЧАХ ІДЕНТИФІКАЦІЇ НЕЛІНІЙНИХ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ

**Вступ.** Методи математичного моделювання та експеримент є основними засобами дослідження складних нелінійних динамічних систем (НДС). Для опису НДС, які розглядаються як «чорний ящик», часто використовується апарат інтегро-степеневих рядів Вольтерри [1]. Задача ідентифікації НДС, у вигляді зазначених моделей, полягає у визначенні багатовимірних вагових функцій за даними вимірювань «вхід-вихід» НДС. Впровадження методів та засобів математичного і комп'ютерного моделювання НДС на основі моделей Вольтерри, призначених для використання з метою всебічного дослідження об'єктів різної фізичної природи (технічних, біологічних, медико-біологічних та ін.), створення інформаційних технологій та інтелектуальних обчислювальних систем діагностування є важливими науково-практичними задачами. Для підвищення продуктивності досліджень у різних сферах наукової та освітньої діяльності дуже важливим є забезпечення доступу до сховищ експериментальних даних та методів їх обробки з ціллю ідентифікації. Для цього пропонується використання технології хмарних обчислень.

**Метою роботи** є розробка програмного комплексу, для впровадження технології хмарних обчислень в задачах ідентифікації нелінійних динамічних систем за даними експериментів «вхід-вихід».

**Результати.** Розроблено концепцію/архітектуру та робочу версію програмного комплексу/платформи (IONDS – Identification of Nonlinear Dynamic Systems) у web-середовищі, що представляє з себе інтерфейс та функціонал для здійснення хмарних обчислень. Комплекс дозволяє здійснювати автоматизовані дослідження з ідентифікації нелінійних динамічних систем та додавати нові методи за допомогою вбудованого редактора коду. Також, є можливість редагувати та інтерпретувати скрипт-код методів ідентифікації (якщо код оформлено згідно документації), додавати до коду перелік параметрів експерименту, проводити обчислення за допомогою інтегрованого скрипт-коду на сервері, отримувати результати вже на стороні користувача (у браузері), та зберігати їх.

Важливою особливістю даного програмного комплексу є неможливість до апаратного забезпечення на клієнтській стороні завдяки хмарним обчисленням. Комплекс складається з таких основних модулів та вузлів, що працюють у взаємодії:



- 1) App Admin Panel – користувацький інтерфейс для адміністрування;
- 2) User Interface – користувацький інтерфейс для взаємодії з платформою;
- 3) Firebase lib – бібліотека компонентів для взаємодії з noSQL базою даних Firebase Firestore та, за допомогою модулю Firebase Auth, аутентифікації користувачів;
- 4) Середовище виконання коду методів ідентифікації – ізольована частина яка представляє з себе інтерпретатор коду Python для виконання методів ідентифікації;
- 5) Client logic – частина, яка реалізує клієнтську логіку по обробці та відображенні отриманих з сервера даних.

Схема взаємодії модулів платформи наведена на рис. 1.

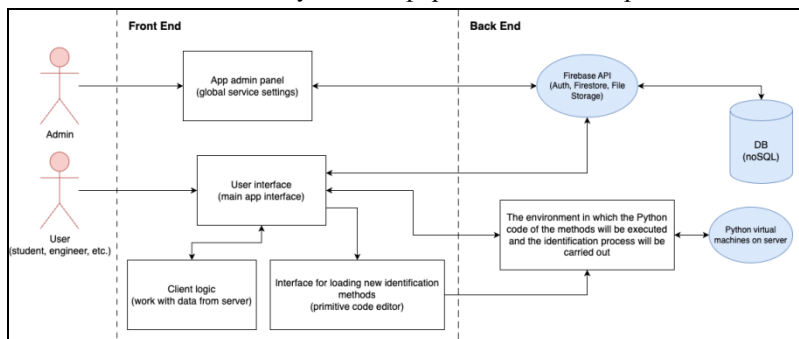


Рис. 1. Схема взаємодії модулів платформи

**Висновки.** Розроблено та протестовано інструментальні програмні засоби хмарних обчислень для вирішення задачі ідентифікації око-рухової системи людини [2]. Розроблений програмний комплекс, може бути застосований у науковій діяльності для: збереження скрипт-коду методів ідентифікації для подальшої роботи з ними; удосконаленню методів ідентифікації; можливості роботи з платформою на будь якому пристрої. Створена платформа також може використовуватися у навчальному процесі.

#### Список використаних джерел:

1. Pavlenko V., Pavlenko S. Deterministic Identification Methods for Nonlinear Dynamical Systems based on the Volterra Model. *Applied Aspects of Information Technology*. 2018. Vol 1. № 1. P. 9-29.
2. Pavlenko V., Shamanina T., Chori V. Eye-tracking Technology and its Application in Neuroscience. *Proc. 12th IEEE Int. conf. on Intelligent Data Acquisition and Advanced Computing Systems: Technology and Applications (IDAACS)*, 7-9 Sept., Dortmund, Germany. 2023. Vol. 1. P. 187-193.

**В. Д. Павленко**, д-р техн. наук, професор,

**Д. К. Лукашук**, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

## **ДОСЛІДЖЕННЯ ТОЧНОСТІ ІДЕНТИФІКАЦІЇ ОКУЛО-МОТОРНОЇ СИСТЕМИ НА ОСНОВІ ІНТЕГРАЛЬНИХ МОДЕЛЕЙ**

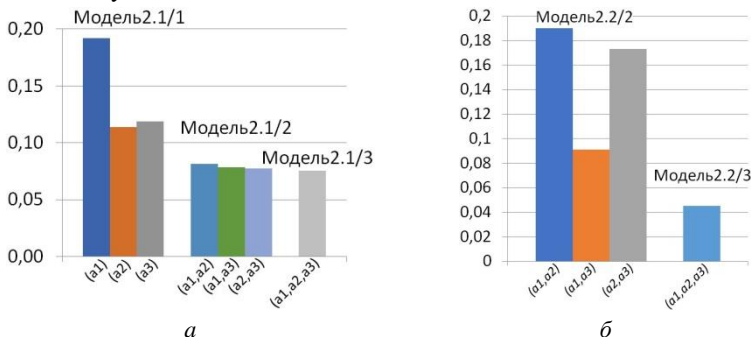
**Вступ.** Для математичного моделювання окуло-моторної системи (ОМС) людини використовують інтегральні нелінійні моделі [1, 2], які одночасно враховують нелінійні та інерційні властивості об'єкта дослідження. Для ідентифікації ОМС визначаються багатовимірні перехідні функції за даними експериментів «вхід-вихід» [2]. Для отримання експериментальних даних застосовується інноваційна технологія айтрекінгу (Eye-tracking), що дозволяє реєструвати відгуки ока на тестові візуальні стимули. При цьому для побудови моделі на основі ряду Вольтерри використовується апроксимаційний метод ідентифікації [3, 4] та для побудови моделі на основі поліному Вольтерри – метод найменших квадратів (МНК) [2, 3]. Методи ідентифікації на основі рядів та поліномів Вольтерри відрізняються методами обчислень і являють собою принципово різні підходи до моделювання нелінійних динамічних систем [3]. Однак, в області збіжності ряду Вольтерри ці моделі співпадають.

**Мета роботи** полягає в дослідженні точності ідентифікації ОМС за даними айтрекінгу шляхом оцінки похибок обчислення багатовимірних перехідних функцій при використанні методів нелінійної динамічної ідентифікації на основі моделей у вигляді рядів та поліномів Вольтерри.

**Предметом дослідження** є алгоритмічні та програмні засоби обчислення динамічних характеристик ОМС за даними айтрекінгу, аналіз точності методів ідентифікації.

**Результати.** При побудові моделей застосовуються відгуки ОМС на тестові ступінчасті сигнали  $x(t) = a_j \theta(t)$  ( $\theta(t)$  – функція Гевісайда) з амплітудами  $a_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ):  $a_1 = 1/3$ ,  $a_2 = 2/3$ ,  $a_3 = 1$ , які в якості тестових сигналів використовуються візуальні стимули, які відображаються на екрані монітора на різних відстанях від стартової позиції в напрямку по горизонталі, що формально відповідає дії ступінчатих сигналів з різними амплітудами на вході ОМС. При використанні апроксимаційного методу ідентифікації визначаються моделі на основі ряду  $\text{Model1.N/x}$  ( $N$  – порядок апроксимації / ступінь полінома,  $x$  – кількість тестових сигналів в експериментальних дослідженнях ОМС), а при застосуванні МНК – моделі на основі поліному Вольтерри  $\text{Model2.N/x}$ . Програмні засоби ідентифікації ОМС реалізовано у середовищі програмування Python.

На рис. 1 наведено діаграму порівняльного аналізу похибок ідентифікації ОМС за критерієм нормованої середньоквадратичної похибки (за середніми значеннями) у вигляді моделей: Модель2.1/1, Модель2.1/2, Модель2.1/3 (рис.1а); та Модель2.2/2, Модель2.2/3 (рис. 1б). Відгуки моделей Модель1.3/3 та Модель2.3/3 практично співпадають з відгуками ОМС для однакових вхідних сигналів.



**Рис. 1.** Порівняльний аналіз середніх значень похибок моделей ОМС: а) Модель2.1/1, Модель2.1/2, Модель2.1/3; б) Модель2.2/2, Модель2.2/3

**Висновок.** Модель у вигляді інтегрального поліному другого ступеня, яку побудовано за допомогою МНК на основі трьох відгуків має точність у два рази вище ніж точність аналогічних моделей, побудованих за даними двох відгуків. У подальших дослідженнях психофізіологічного стану людини на основі нелінійних динамічних моделей ОМС за даними трьох відгуків доцільно використовувати модель у вигляді квадратичного поліному Вольтерри.

#### Список використаних джерел:

1. Bro V., Medvedev A. Continuous and Discrete Volterra-Laguerre Models with Delay for Modeling of Smooth Pursuit Eye Movements. *IEEE Transactions on Biomedical Engineering*. 2023. Vol 70 (1). P. 97-104.
2. Pavlenko V., Milosz M., Dzienkowski M. Identification of the Oculo-Motor System based on the Volterra Model using Eye Tracking Technology. *4th Int. Conf. on Applied Physics, Simulation and Computing (APSAC 2020). 23-25 May, Rome, Italy. Journal of Physics: Conference Series*. 2020. Vol. 1603. P. 1-8.
3. Pavlenko V., Pavlenko S. Deterministic Identification Methods for Nonlinear Dynamical Systems based on the Volterra Model. *Applied Aspects of Information Technology*. 2018. Vol. 1. № 1. P. 9-29.
4. Pavlenko V., Shamanina T., Chori V. Biometric Identification based on the Multidimensional Transient Functions of the Human Oculo-Motor System. *J. Phys.: Conference Series*. 2022. P. 1-9.

*Секція 2.*  
**ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ**

---

**V. K. Zadiraka**, Dr. Sc., Professor, Academician of NAS of Ukraine,

**A. M. Tereshchenko**, PhD,

**I. V. Shvidchenko**, PhD

V. M. Glushkov Institute of Cybernetics  
of the National Academy of Sciences, Kyiv

**S-WORD ARITHMETIC AND HIGH  
PRECISION COMPUTATIONS**

The intricacies of using  $S$ -word arithmetic, and the influence of the  $S$  value on estimating the rounding error are analyzed; what is high-precision computing and where it is used.

Areas of application of  $S$ -word arithmetic, two-key cryptography, computer steganography and problems of trans-computational complexity are considered.

Sequential, parallel, and quantum computational models are used for the development of  $S$ -word arithmetic algorithms, and systems of residual classes are also used.

Information is provided about the ongoing scientific forum «Issues of optimization of calculations», which is closely related to the topic of the articles (1969-2023).

At the current stage, microprocessor technology is developing at an exceptionally fast pace. If at the end of the 20th century, clusters with a large number of processors could only be purchased by large companies for supercomputing, now clusters with more than 4,000 stream processors are used at home on personal computers based on graphic accelerators. Along with the further development of algorithms in the sequential model of calculations [1-7] necessary for energy-efficient low-speed devices, such as smart cards, there was an urgent need for the development of new methods of efficient calculations in the parallel model. For the development and improvement of algorithms in the parallel computational model, it is of great importance to have methods for optimizing arithmetic calculations to assess the complexity of algorithms, to compare them with existing ones, and to find effective ranges of their use.

The work is devoted to the research of existing and the creation of new mathematical methods, efficient in terms of speed and memory of algorithms for the implementation of basic asymmetric cryptographic transformations for various computational models. For parallel and serial computational models, step-by-step algorithms for the implementation of multi-digit arithmetic operations numbers are given, and the complexity of elementary multi-digit operations and the methods on which these operations are based are analyzed.

Multi-digit addition operation:

- the lookahead carry sign addition algorithm;
- the carry sign saving method;
- the method of M-word addition of N-digit numbers with lookahead carry sign method.

Multi-digit multiplication operation:

- column multiplication algorithm;
- the Karatsuba-Ofman method;
- algorithm based on cyclic convolution;
- algorithm using the fast Fourier transform.

Calculation of the multi-digit residual:

- division algorithm with recovery;
- division algorithm without recovery;
- Barrett's method of computation of residual;
- Montgomery's method of computation of residual.
- Multi-digit multiplication operation by multi-digit multiplication.
- Exponentiation by a multi-digit module.

**Conclusions.** Ways to optimize arithmetic operations during the construction of algorithms in the parallel computing model are considered, namely:

1. Reduction of coupled steps by replacing them with simpler and more uniform but uncoupled operations, which usually increases the number of processors involved, but makes it possible to reduce the total number of operations performed by each of the parallel processors.
2. Reducing the volume of processed data, which makes it possible to reduce the number of parallel processors involved, while maintaining the total number of operations performed by each of the parallel processors.
3. Use of calculation optimization reserves (without increasing the number of algorithm steps).

The given list of ways of optimization is not comprehensive.

Parallelization of arithmetic operations can be carried out mainly when it is possible to reduce the number of strongly connected steps, therefore, in this work, special attention is paid to the first optimization method. The optimization method by reducing the total digit rate of input data is used when considering the multi-digit multiplication algorithm based on the fast Fourier transform (FFT).

### References:

1. Cooley J. W., Tukey J. W. An algorithm for the machine calculation of complex Fourier Series. *Math Compt.* 1965. P. 257-301.
2. Schonhage A., Strassen V. Schnelle Multiplikation großenZahlen. *Computing.* 1971. Vol. 7. № 3-4. P. 281-292.

3. Zadiraka V., Oleksiuk O. Kompiuterna aryfmetryka bahatorozriadnykh chysel. Kyiv: Nauk. dumka, 2003. 263 s. [Ukrainian].
4. Zadiraka V. K., Tereshchenko A. M. Kompiuterna aryfmetryka bahatorozriadnykh chysel u poslidovnii ta paralelnii modeliakh obchyslen. Kyiv: Naukova dumka, 2021. 152 s. [Ukrainian].
5. Zadiraka V. K., Shvidchenko I. V. Vykorystannia pokhybky zaokruhlenia v suchasnykh kompiuternykh tekhnolohiiakh. *Kibernetika ta kompiuterni tekhnolohii*. 2021. № 3. S. 43-52. DOI: 10.34229/2707-451X.21.3.4 [Ukrainian].
6. Zadiraka V. K., Tereshchenko A. M., Shvidchenko I. V. Bahatorozriadna aryfmetryka u poslidovnii, paralelnii ta kvantovii modeliakh obchyslen. *Fizyko-matematychni modeliuvannia ta informatsiini tekhnolohii*. 2023. № 36. S. 87-91. DOI: 10.15407/10.15407/fmmit2023.36.087 [Ukrainian].
7. Sergienko I. V., Zadiraka V. K., Lytvyn O. M. Elements of the General Theory of Optimal Algorithms. Springer, 2021. P. 378. DOI: 10.1007/978-3-030-90908-6.

**Ю. І. Білушак**, канд. техн. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

## **МЕТОД ЧИСЕЛЬНОГО ЗНАХОДЖЕННЯ ПОДВІЙНИХ ІНТЕГРАЛІВ ЗІ ЗМІННОЮ ОБЛАСТЮ ІНТЕГРУВАННЯ**

Під час дослідження міграції забруднюючих речовин з розчином у багатошарових фільтрах води було одержано розв'язок крайової задачі у інтегральному вигляді [1]. При цьому для визначення концентрації частинок, сорбованих на скелеті фільтра за певний інтервал часу, отриманий розв'язок необхідно ще раз проінтегрувати. Внаслідок цього, часова змінна, яка знаходиться у верхній межі зовнішнього інтеграла, повинна розглядатися як параметр, оскільки для встановлення оптимальних режимів роботи промислових фільтрів ще потрібно чисельно розв'язати відповідне нелінійне функціональне рівняння.

У науковій літературі описано методи подвійного інтегрування, які базуються на квадратурних або кубатурних формулах і застосовуються для визначення меж [2]. Однак ці підходи мають суттєвий недолік: вони враховують лише ті елементи, які повністю належать області інтегрування, а решта елементів ігноруються. Такий підхід призводить до проблеми із забезпеченням точності обчислень, для вирішення якої пропонується збільшити кількість точок розбиття, тобто згустити сітку. Проте у випадку складних підінтегральних функцій це може спричинити значне накопичення обчислювальної похибки.

У роботі розроблено чисельний метод обчислення подвійних інтегралів зі змінними верхніми межами

$$I(x) = \int_0^x \int_0^{g(x')} f(x, x', x'') dx'' dx' ,$$

де підінтегральна функція  $f(x, x', x'')$  є  $(n+1)$  разів неперервно диференційованою за змінними  $x'$  та  $x''$ , функція верхньої межі внутрішнього інтеграла  $g(x')$  є неперервною за змінною  $x'$ . У підінтегральній функції  $f(x, x', x'')$  залежність від зовнішньої змінної  $x$  розглядається як залежність від параметра.

Запропонований метод можна розділити на кілька етапів, таких як визначення змінної області інтегрування; накладання квадратної або прямокутної сітки на область інтегрування; виділення підобластей інтегрування, що складаються з квадратних і трикутних елементів; застосування кубатур в підобласті з квадратними елементами; триангуляційне розбиття по змінній межі; обчислення об'ємів елементарних елементів з трикутною основою, обчислення вихідного інтеграла та встановлення похибки обчислення.

Змінна область інтегрування призводить до необхідності її змінного розбиття на елементарні об'єми. Значний вплив при цьому має значення змінної верхньої межі зовнішнього інтеграла. Розглянуто три випадки можливого розбиття сітки, а саме коли змінюється лише розмір накладеної сітки та фіксується кількість елементів розбиття; змінюється тільки кількість елементів розбиття і фіксується розмір сітки, а також змінюється як кількість елементів розбиття, так і розмір сітки. В останньому випадку для опису зміни кількості вузлів інтегрування розглядалися різного роду зростаючі та спадні функції. У всіх розглянутих прикладах, при застосуванні запропонованого методу, найменші значення абсолютної та відносної похибок досягаються при збільшенні кількості елементів розбиття та фіксації розміру сітки. Водночас залишається відкритим питання, чи вибір числа вузлів інтегрування, як різко зростаючої функції, призведе до зниження похибки методу. Також зауважимо, що накладання змінної сітки на область інтегрування при необхідності можна застосувати для обчислення визначених подвійних інтегралів.

При знаходженні оцінки похибки методу інтеграл було розкладено у ряд Тейлора за теоремою Барроу. Якщо накласти сталі межі інтегрування, то отримана формула зведеться до класичної формули розкладання підінтегрального виразу в ряд Тейлора.

У роботі було розглянуто випадок, коли подвійний інтеграл зі змінними межами можна звести до інтеграла з простими змінними у верхніх межах інтегрування та нульовими нижніми межами. Однак запропоновані заміни змінних не завжди доречні. А отже, необхідні подальші дослідження методів чисельного знаходження подвійних інтегралів, коли межі інтегрування є певними функціями, включаючи встановлення умов і обмежень на ці функції, підінтегральний вираз і змінну область інтегрування, яка утворюється при цьому.

### Список використаних джерел:

1. Chernukha O., Bilushchak Y. Mathematical modeling of the processes of convective diffusion and sorption in a three-layer porous body. I. Mass transfer of impurity particles with a porous solution. *J. of Math. Sci.* 2024. Vol. 279. № 2. P. 247-259.
2. Задачин В. М., Конюшенко І. Г. Чисельні методи. Харків: ХНЕУ ім. С. Кузнеця, 2014. 180 с.

Л. В. Луц, канд. фіз.-мат. наук

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

### ОПТИМАЛЬНЕ ЗА ТОЧНІСТЮ ІНТЕГРУВАННЯ ШВИДКООЦИЛЮВАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ ДЛЯ ПІДІНТЕГРАЛЬНИХ ФУНКЦІЙ, ЩО МАЮТЬ НЕПЕРЕРВНУ ДРУГУ ПОХІДНУ

Розглядається задача обчислення інтегралів типу

$$I_1(\omega) = \int_a^b f(x)e^{-i\omega x} dx, \quad (1)$$

$$I_2(\omega) = \int_a^b f(x) \sin \omega x dx, \quad I_3(\omega) = \int_a^b f(x) \cos \omega x dx,$$

де  $a$  і  $b$  – скінченні дійсні числа;  $\omega$  – довільне дійсне число,  $|\omega| \geq 2\pi(b-a)$ ; інформація про значення  $f(x)$  задається не більше ніж у  $N$  вузлових точках  $\{x_i\}_0^{N-1}$  з  $[a, b]$ . Функція  $f(x)$  належить таким класам функцій:  $W_{r,L}$ ,  $r > 1$ , – клас функцій, що мають  $(r-1)$ -у неперервну похідну, причому  $\left|f^{(r-1)}(x') - f^{(r-1)}(x'')\right| \leq L|x' - x''|$ ,  $x', x'' \in [a, b]$ , де  $L$  – задане дійсне число;  $W_{3,N,L}$  – клас функцій, що належать  $W_{3,L}$  і вхідна інформація про  $f(x)$  задана фіксованими значеннями функції та її першої і другої похідних у вузлах фіксованої сітки  $\{x_i\}_0^{N-1}$ .

**Теорема 1.** Нехай  $f(x) \in W_{3,L}$  задана таблицею значень  $\{f_i\}_0^{N-1}$ ,  $\{f'_i\}_0^{N-1}$ ,  $\{f''_i\}_0^{N-1}$  у вузлах рівномірної сітки  $x_i = i \cdot h$ ,  $h = (b-a)/(N-1)$ ,  $i = \overline{0, N-1}$ . Тоді квадратурна формула  $R_1(\omega)$  наближеного обчислення  $I_2(\omega)$ , отримана заміною  $f(x)$  де  $S_{5,3}(x)$  – локальним сплайном 5-го ступеня дефекта 3, який інтерполює підінтегральну функцію та її першу і другу похідні у вузлах сітки  $\{x_i\}_0^{N-1}$ ,



є оптимальною за порядком точності у класі  $W_{3,L}$  для  $N \geq |\omega|$ , і при цьому має місце така оцінка похибки чисельного інтегрування:

$$V(W_{3,L}, R_1, \omega) \leq \begin{cases} C_2 \eta (b-a)^{3\frac{1}{2}} L / (N-1)^3, & N \geq |\omega| \\ C_3 \eta (b-a)^{\frac{1}{2}} L / |\omega|^2 (N-1), & N \leq |\omega|, \end{cases}$$

де  $C_2 = 6,1849 \cdot 10^{-3}$ ,  $C_3 = 0,20833$ ,  $\eta = \sqrt{\frac{1}{2} \frac{\sin 2\omega b - \sin 2\omega a}{4\omega(b-a)}}$

**Теорема 2.** Оптимальною за точністю квадратурною формулою обчислення  $I_2(\omega)$  для  $f(x) \in W_{3,N,L}$  є квадратурна формула

$$R_2(\omega) = \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} f_i^*(x) \sin \omega x dx, \quad (2)$$

причому має місце така оцінка похибки чисельного інтегрування

$$\delta\left(W_{3,N,L}, R_2(\omega), \{\Phi_{1,i}\}_0^{N-1}, \omega\right) = \left| \sum_{i=0}^{N-2} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \rho_i^*(x) \sin \omega x dx \right|,$$

$$f_i^*(x) = \begin{cases} f_i + f_i'(x-x_i) + f_i''(x-x_i)^2/2, & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ 1/2 \left[ f_i + f_i'(x-x_i) + f_i''(x-x_i)^2/2 + f_{i+1} + \right. \\ \left. + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) + f_{i+1}''(x-x_{i+1})^2/2 \right] + \frac{L}{12} \text{sign}(\Delta f_i) \cdot \\ \cdot \text{sign}(\sin \omega x_i) \left( (x-x_i)^3 + (x-x_{i+1})^3 \right), & x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ f_{i+1} + f_{i+1}'(x-x_{i+1}) + f_{i+1}''(x-x_{i+1})^2/2, & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

$$\rho_i^*(x) = \begin{cases} L(x-x_i)^3 \text{sign}(\sin \omega x_i) / 6, & x \in [x_i, \bar{x}_i], \\ \left[ 3x^2 - 3(x_i + x_{i+1})x + (x_i + x_{i+1})^2 - x_i x_{i+1} \right] \cdot \text{sign}(\sin \omega x_i) \cdot \\ \cdot L h_i / 12 - \text{sign}(\Delta f_i) / 2 \left[ \Delta f_i'' x^2 / 2 + (\Delta f_i' + f_i'' \cdot x_i - f_{i+1}'' \cdot x_{i+1})x + \right. \\ \left. + \Delta f_i + f_i' \cdot x_i - f_{i+1}' \cdot x_{i+1} - f_i'' x_i^2 / 2 + f_{i+1}'' x_{i+1}^2 / 2 \right], & x \in [\bar{x}_i, \bar{\bar{x}}_i], \\ L(x-x_{i+1})^3 \text{sign}(\sin \omega x_i) / 6, & x \in [\bar{\bar{x}}_i, x_{i+1}], \end{cases}$$

$\bar{x}_i$ ,  $\bar{\bar{x}}_i$  – точки перетину кривих, якими обмежена множина функцій  $W_{3,N,L}$  на кожному елементарному відрізку  $[x_i, x_{i+1}]$ .

**В. С. Щирба**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнко, м. Кам'янець-Подільський

## **ОРГАНІЗАЦІЯ ОБЧИСЛЮВАЛЬНИХ ПРОЦЕДУР ПРИ ПОБУДОВІ ОПТИМІЗАЦІЙНОЇ ТРАЄКТОРІЇ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ**

Траєкторія практично всіх літальних апаратів (літаків, крилатих ракет, планерів, дельтапланів та інші) формується на аеродинамічному принципі. Технічно це забезпечується встановленням крил із можливістю зміни їх положення. Завдяки перерозподілу тиску вздовж поверхні крила (перерозподіл швидкості потоку повітря та тиску у цьому потоці) утворюється підймальна сила, що і є основою аеродинамічного принципу руху літальних апаратів.

В окремих літальних апаратах на формування траєкторії значний вплив має і реактивний принцип. Зокрема для балістичних ракет траєкторію поділяють на активну та пасивну (з працюючим чи вимкненим двигуном), а в літаках регулюють силу тяги двигуна чи напрям потоку газів.

Тому аналіз динаміки літального апарату спонукає розглядати її як складну динамічну систему із масою вхідних параметрів від статичних до ймовірнісних та функціональних зв'язків, які описуються фізичними законами чи встановлюються експериментально. За звичай, математичну модель такої динамічної системи подають, у вигляді системи звичайних/диференціальних рівнянь чи/та нерівностей і намагаються лінеаризувати.

Однією із найбільш важливих задач дослідження складних динамічних систем постає задача пошуку допустимої траєкторії з подальшою її оптимізацією. Навіть при найпростішому варіанті моделі з одержанням задачі лінійного програмування ця задача вражає своїми розмірами та великими даними, що фігурують в ній.

Алгоритмічно доводиться розв'язувати великий об'єм допоміжних задач. Обчислювальний процес стає недопустимим в часовому вимірюванні. Пропонується враховувати як структуру даних так і процедурні технології з метою вибору швидкісних високопродуктивних алгоритмів.

**В. А. Сидорук**, канд. фіз.-мат. наук,  
**А. В. Павлюк**, аспірант

Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України, м. Київ

## **ДЕЯКІ СПОСОБИ ВИКОРИСТАННЯ ПАРАЛЕЛЬНИХ ОБЧИСЛЕНЬ В ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ**

На сьогоднішній день розв'язання реальних прикладних задач моделювання процесів та явищ різної природи вимагає роботи з великими обсягами даних та потребує ресурсу суперкомп'ютерних обчислень. Це обумовлюється як деталізацією моделей так і необхідністю проводити багатокритеріальні обрахунки. Також є задачі які критичні до часу отримання розв'язків, наприклад задачі моніторингу розповсюдження забруднень. Отже актуальним є використання суперкомп'ютерних обчислень і інтеграція їх в процес обчислень. Для прикладу такої інтеграції розглянемо задачу чисельного аналізу напружено-деформованого і граничного станів зварних конструкцій.

Математично об'єднана задача кінетики температурного поля, розвитку напруг і деформацій та формування мікропор базується на скінченно-елементних моделях. Процес визначення критичного навантаження полягає у послідовному розв'язуванні на кожному кроці відстежування та ітерацій за функцією стану матеріалу системи нелінійних рівнянь. Розв'язування цієї системи нелінійних рівнянь проводиться ітераційно шляхом лінеаризації на кожній ітерації з нелінійності. Отже, на кожній ітерації з нелінійності розв'язується система лінійних алгебраїчних рівнянь  $Ax = b$ . Матриці цих СЛАР у загальному випадку несиметричні без діагональної переваги та мають розріджену структуру, переважно – стрічкові.

Компоненти тензора напруг задовольняють рівнянням статики для внутрішніх СЕ і крайовим умовам для граничних СЕ. У свою чергу, компоненти вектора проросту переміщень  $\Delta U_i = (\Delta U, \Delta V, \Delta W)$  задовольняють відповідним умовам на границі. Залежність деформацій від напруг визначається законом Гука і асоційованим законом пластичної течії.

Пластичні деформації визначаються співвідношенням  $\Delta \varepsilon_{ij} = \left( \Psi - \frac{1}{2G} \right) (\sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma_m)$ , де  $\Psi$  – функція стану матеріалу. Значенням функції  $\Psi$  визначається пластична нестійкість в конкретному СЕ на конкретному кроці відстежування. При збільшенні  $\Psi$  приріст пластичних деформацій  $\Delta \varepsilon_{ij}^p$  також збільшується, тоді як напруги  $\sigma_{ij}$  зменшуються. Якщо ітераційний процес по  $\Psi$  в даному СЕ на даному кроці

навантаження дає значення  $\Psi$  вище  $\Psi_{кр}$ , то можна вважати, що даний елемент не в змозі сприймати навантаження на даному кроці. Таким чином, конкретний СЕ незворотно втрачає спроможність сприймати

навантаження в разі пластичної нестійкості:  $\Psi > \frac{1}{2G} + \frac{\varepsilon_f - \kappa^*}{1,5\sigma_s(\kappa, T)}$

та / або руйнування мікросколом  $3\sigma_1/(3 - 2f) > S_k$ .

Процес визначення критичного навантаження полягає в послідовному розв'язуванні на кожному кроці відстежування та ітерацій по  $\Psi$  нелінійної системи рівнянь відносно змінних вектора приростів переміщень у вузлах СЕ.

Для задачі формування матриці запропоновано розпаралелити обхід між потоками процес обходу середньої частини області скінчених елементів та розпаралелити обробку елементів що знаходяться на границях області. Дана оптимізація дозволила пришвидшити обробку елементів та дозволила скоротити час розв'язання задачі в цілому на 10-15%. Для розпаралелення задачі розв'язання СЛАР з несиметричною стрічковою матрицею колективом науковців створено цілий ряд алгоритмів [1-4], зокрема запропоновано авторами новий алгоритм який не потребує переформатування вихідних даних задачі який показує свою ефективність для задач невеликих порядків.

При розв'язуванні низки тестових та практичних задач моделювання життєвого циклу зварних конструкцій, використовуючи `Weldprediction_g`, отримано суттєве скорочення часу комп'ютерного моделювання – до 60 раз. На рис. 1 показано модель елемента трубопровода та діаграма прискорень (у порівнянні з послідовною моделлю обчислень) при розв'язуванні декількох розрахункових задач моделювання життєвого циклу трубопровода з локальним дефектом корозійної втрати металу. Використовувалися паралельна модель обчислень на комп'ютері MIMD-архітектури та гібридна модель на комп'ютері зі співпроцесорами прискорювачами.

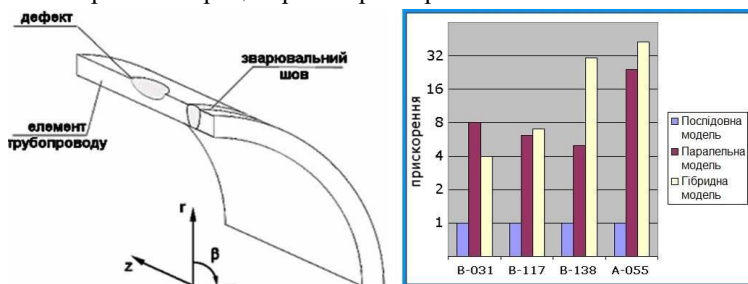


Рис. 1. Моделювання життєвого циклу трубопровода з локальним дефектом корозійної втрати металу

### Список використаних джерел:

1. Velikoivanenko E. A., Milenin A. S., Popov A. V. and other. High-performance methods for analyzing the statistical strength of welded pipelines and pressure vessels using the Monte Carlo method. *Journal of Automation and Information Sciences*. 2020. Vol. 52 (11). P. 12-27.
2. Великоиваненко Е. А., Миленин А. С., Попов А. В. и др. Методы и технологии параллельных вычислений для математического моделирования напряженно-деформированного состояния конструкций с учетом вязкого разрушения. *Проблемы управления и информатики*. 2014. № 6. С. 42-52.
3. Великоиваненко Е. А., Миленин А. С., Попов А. В. и др. Высокопродуктивные методы анализа статистической прочности сварных трубопроводов и сосудов давления по методу Монте-Карло. *Проблемы управления и информатики*. 2020. № 6. С. 48-61
4. Milenin A., Velikoivanenko E., Rozyuka G., Pivtorak N. Probabilistic procedure for numerical assessment of corroded pipeline strength and operability. *International Journal of Pressure Vessels and Piping*. 2019. Vol. 171. Is. 3. P. 60-68. DOI: 10.1016/j.ijpvp.2019.02.003.

**О. О. Жолтовський**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **ПРОГРАМНА АГРЕГАЦІЯ КОНТЕНТУ ДЛЯ ВИВЧЕННЯ ІНОЗЕМНОЇ МОВИ**

В умовах теперішньої глобалізації та інформаційно-технічного прогресу вивчення іноземних мов стає не просто рекомендацією, а необхідністю для успішного кар'єрного зростання та ефективної міжкультурної взаємодії між людьми. Особливо це помітно в освіті, а також у сфері ІТ, де переважна кількість актуальних даних поширюються англійською мовою, що вимагає розвитку у фахівців соціально-комунікативної навички, яка передбачає володіння іноземними мовами.

Значна частина іншомовної інформації, як правило, отримується з Інтернету [2]. Вона включає величезну кількість текстових даних, мультимедіа різноманітного спрямування, користувацько-орієнтований контент тощо. Відповідно для того, щоб полегшити процес опрацювання, агрегації, запам'ятовування та подальшого успішного використання іноземної лексики у межах науково-практичного дослідження розроблено спеціалізований багатofункціональний мультиформний застосунок [1].

Однією з переваг застосунку є реалізація функціональності оверлею, що передбачає відображення програмного інтерфейсу поверх інших застосунків. Таке рішення зумовлене тим, що користувачу доводиться часто перемикатися на перекладач або словник, щоб записати невідомі йому слова або фрази. Наразі оверлей надає функціональні можливості перегляду створюваного словника, додавання фраз та інших лексичних одиниць до нього, дозволяючи користувачу поступово збирати матеріал, не надто відволікаючись від читання. При цьому пріоритет зібраного матеріалу визначається автоматично на основі частоти появи лексики або інших критеріїв, які може задати користувач. Іншими словами, можна збирати необхідну кількість лексики, не відкриваючи основне вікно застосунку.

Інтерфейс оверлею представляє собою кнопку, за допомогою якої можна відкривати різні віджети та панелі. При цьому їх можна переміщувати у будь-яку точку екрану та згортати для економії місця на екрані.

Під час перегляду відео або прослуховування аудіо іноземною мовою у багатьох людей виникає потреба у розпізнаванні лексики при від-

сутності субтитрів або стенограми. Задля цього у функціоналі оверлею передбачено можливість аудіозапису, що дозволяє перетворювати записане аудіо в текст, який згодом може бути збережений у словник.

Очікується, що при такому підході користувачі зможуть збирати значну кількість мовного матеріалу, який буде відповідати їхнім уподобанням. Згодом усю цю лексику можна буде опрацьовувати у вільний час або за потреби, систематично покращуючи розуміння мови та поліпшуючи розмовні навички. У розробленому програмному застосунку передбачено процес закріплення отриманих користувачем знань та навичок у процесі виконання адаптивних тестових завдань, автоматично створених на основі зібраного мовного контенту. І це поступово допомагає формувати компетентності володіння іноземними мовами.

### Список використаних джерел:

1. Жолтовський О. О. Методи і засоби інформаційної підтримки процесу вивчення іноземної мови. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки*. Кам'янець-Подільський: КПНУ, 2023. Вип. 16. С.32-34. URL: <http://elar.kpnu.edu.ua:8081/xmlui/bitstream/handle/123456789/7681/Visnyk-K-PNU-im.-I.-Ohiienka.-Fiz.-mat.-nauky.-Vyp.16-2023.pdf>
2. Contextual Language Learning / ed.: Y.-J. Lan, S. Grant. Singapore. Springer Singapore, 2021. 202 p. DOI: 10.1007/978-981-16-3416-1.

**О. В. Кравчук**, д-р пед. наук

КЗВО «Одеська академія неперервної освіти  
Одеської обласної ради», м. Одеса

### ФОРМИ ВИКОРИСТАННЯ ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ В ОСВІТНЬОМУ ПРОЦЕСІ

Важливі завданнями школи, які реалізують вчителі є реалізація програми, орієнтованої на дитину, на її індивідуальний темп розвитку та можливості навчання. Завдання учителя забезпечити можливості отримання знань необхідних для розуміння світу з різноманітних джерел інформації та можливостей їх використання. Актуальна концепція *навчання протягом життя* реалізується за допомогою використання інформаційно-комунікаційних технологій, тобто електронних медіа, в динамічних умовах зміни комп'ютерного обладнання та матеріалів. Інформаційні технології можуть зробити вагомий внесок у підвищення привабливості навчального процесу.

Подамо кілька пропозицій, як учитель може використовувати інформаційні технології в процесі викладання шкільних предметів.

Однією з форм може бути організація чату та запрошення учнів у визначений час обговорити задану тему, спільне обговорення учнями обраного питання, що дасть можливість засвоїти необхідний матеріал з теми. Важливо заохочувати учнів робити власні записи, коментарі та ділитися своїми спостереженнями.

Наприклад, дати завдання підготувати електронний фотоальбом на задану тему. Учні можуть фотографувати самі або використовувати фотографії розміщені в Інтернеті (звичайно, із зазначенням джерела). Цей спосіб дає переваги для широкого і оригінального трактування питання, яке треба вивчити. Вимога надавати опис під кожною фотографією зробить фотогалерею більш зрозумілою. До прикладу, тема про птахів та їхній спосіб життя. Учні здатні проявити свою творчість, самостійність у виборі форми та техніки фотозйомки, підготовка такого альбому є значно цікавішим, ніж виконання домашнього завдання за підручником про життя та поведінку птахів.

Для учнів старших класів можна пропонувати вести тематичний блог. Створення і ведення блогу на певну тему з предмета вивчення буде завданням, яке учні виконають із більшим задоволенням, ніж завдання традиційне. Вони матимуть можливість проявити себе у командній роботі, у плануванні, зборі інформації, оцінюванні і коментуванні. Працюючи в групі, вони вчитимуться слухати один одного, засвоять манери дискусії, аргументації, компромісу.

Молодь може створювати якісні тематичні блоги. Великою перевагою блогу є можливість створювати його будь-де: вдома, в школі, в транспорті. Все, що для цього потрібно, це доступ до Інтернету, який учні мають переважно на своїх мобільних телефонах. Коли їм є що сказати, вони побачили або почули щось цікаве, вони можуть цим негайно поділитися інформацією з іншими. Тематичні класні блоги можуть стати дієвим доповненням для розширення знань у межах шкільної дисципліни.

Цікавим видом роботи є спільне створення запису для Вікіпедії. Учні обов'язково будуть отримували велике задоволення від того, що не тільки навчалися, але й виконали вагомі дії, корисні для інших, що результати їхньої праці не опиняться на столі вчителя і після перевірки уже будуть непотрібними, а будуть збереженні набагато довше. З цим пов'язано відчуття відповідальності за якість виконаного завдання.

Групова робота над електронним документом, дозволяючи разом працювати над вибраним текстом, одночасно уможливає групі виконати спільне завдання без необхідності робити це особисто. Коли кілька осіб повинні підготувати дослідження для певного завдання, завдяки можливостям, які пропонують інструменти групової роботи, кожен учасник може взяти активну участь у розробці фінальної



версія статті. Виконане завдання ймовірно буде результатом численних компромісів. Учні опанують предметні знання з питання, яке вони розроблятимуть р, а також дізнаються думку інших, перевіряють власні погляди і знайомляться з іншими концепціями підходу до однієї теми, тобто розвиватимуть себе.

**О. М. Кух,**

**А. М. Кух,** д-р пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### **МОДЕЛЮВАННЯ ОБЕРТАННЯ МАЯТНИКА ФУКО ЗАСОБАМИ GNU OCTAVE**

Маятник Фуко – це підвісний математичний маятник з довгою ниткою і важким вантажем, який можна використовувати для демонстрації обертання Землі. Свою назву цей маятник отримав в честь Жана Фуко, який в 1851 році відкрив, що напрям коливання маятника змінюється з часом. Оскільки Земля обертається навколо своєї осі, при використанні земної системи координат виникає сила, названа силою Коріоліса, яка діє на рухомий маятник у напрямку, перпендикулярному напрямку коливання:

$$F = 2 \cdot m \cdot \Omega_0 \cdot v, \quad (1)$$

де  $m$  – маса підвісу маятника,  $\Omega_0$  – вектор кутової швидкості Землі,  $v$  – вектор швидкості коливань маятника.

Це викликає поворот площини коливань з низькою частотою, що залежить від кута широти  $\varphi$  точки, в якій підвішений маятник.

Щоб створити математичну модель потрібно розглянути рівняння руху маятника Фуко, враховуючи силу Коріоліса. Використовуючи силу Коріоліса (1), можна записати рівняння руху для маятника в горизонтальній площині. Математична модель для маятника Фуко включає систему диференціальних рівнянь, яка описує рух маятника під дією сили Коріоліса:

$$\ddot{x} + \frac{g}{L} x + 2\Omega_0 \sin(\varphi) \dot{y} = 0,$$

$$\ddot{y} + \frac{g}{L} y - 2\Omega_0 \sin(\varphi) \dot{x} = 0,$$

де:  $x$  і  $y$  – координати відхилення маятника в горизонтальній площині,  $g$  – прискорення вільного падіння,  $L$  – довжина нитки маятника,  $\Omega_0$  – кутова швидкість обертання Землі,  $\varphi$  – широта місцевості,  $\dot{x}$  і  $\dot{y}$  – швидкості зміни координат,  $\ddot{x}$  і  $\ddot{y}$  – прискорення.

Між тим для визначення широти місцевості за допомогою маятника Фуко використовуються такі вихідні положення.

**Період коливань маятника:** Формула для періоду коливань  $T$  простого маятника довжини  $L$  у полі тяжіння  $g$  виглядає так:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}.$$

**Кутова частота маятника Фуко:** Формула для кутової частоти  $\omega$  маятника Фуко, що обертається з періодом  $T_{\text{Foucault}}$ :

$$\omega = \frac{2\pi}{T_{\text{Foucault}}}.$$

**Широта місцевості:** Формула для широти  $\varphi$ , обчислена через кутову частоту:

$$\sin \varphi = \frac{\omega}{\frac{2\pi}{86400}},$$

де 86400 секунд – це один день.

Розв'язок у GNU Octave може бути таким:

```
pkg load odepkg;
% Завантаження пакета odepkg для роботи з ODE
функціями
% Параметри маятника
L = 3; % Довжина маятника в метрах
g = 9.81; % Прискорення вільного падіння в
м/с^2
% Обчислення періоду коливань маятника
T = 2 * pi * sqrt(L / g);
% Обчислення широти місцевості за формулою
latitude = asin(omega / (2 * pi / 86400)) *
180 / pi;
% Виведення результату
fprintf('Період коливань маятника: %.2f се-
кунд\n', T);
fprintf('Широта місцевості: %.2f градусів\n',
latitude);
phi = latitude; % Широта місцевості
phi = phi * pi / 180; % Конвертація в радіани
% Кутова швидкість обертання Землі
Omega0 = 2 * pi / 86400; % Рад/с
% Початкові умови [x0, y0, dx0, dy0]
initial_conditions = [1, 0, 0, 0];
```

```

% Часова шкала
tspan = [0, 86400]; % 24 години в секундах
% Система диференціальних рівнянь
function dy = foucault_pendulum(t, y, L, g,
Omega0, phi)
    dy = zeros(4,1);
    dy(1) = y(3);
    dy(2) = y(4);
    dy(3) = -g/L * y(1) + 2 * Omega0 * sin(phi) *
y(4);
    dy(4) = -g/L * y(2) - 2 * Omega0 * sin(phi) *
y(3);
end
% Виклик ode45 для розв'язання диференціальних
рівнянь
[t, y] = ode45(@(t, y) foucault_pendulum(t, y,
L, g, Omega0, phi), tspan, initial_conditions);
% Візуалізація результатів
figure;
plot(y(:,1), y(:,2));
title('Відхилення маятника Фуко в горизонталь-
ній площині');
xlabel('Відхилення по осі X (метри)');
ylabel('Відхилення по осі Y (метри)');
grid on;
axis equal;

```

Програмний код включає:

- Визначення параметрів маятника та констант.
- Обчислення періоду коливань
- Обчислення широти
- Початкові умови для маятника (відхилення і швидкості).
- Функцію `foucault_pendulum`, яка задає систему диференціальних рівнянь для маятника Фуко.
- Виклик функції `ode45` для чисельного розв'язання системи диференціальних рівнянь.
- Побудову графіка відхилень маятника в горизонтальній площині.

Графік відхилень маятника Фуко в горизонтальній площині має форму спіралі. Це пояснюється тим, що відхилення маятника змінюються гармонійно (синусоїдально) в двох напрямках ( $x$  і  $y$ ) з різною частотою обертання, що призводить до обертання площини коливань маятника навколо вертикальної осі.

**О. М. Кух,**

**А. М. Кух,** д-р пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ЦИФРОВА КОМПЕТЕНТНІСТЬ І ЦИФРОВЕ ГРОМАДЯНСТВО**

У 2016 р. Європейська комісія запровадила Рамку цифрової компетентності для громадян (скорочена назва – англ. DigComp2.0: Digital Competence Framework for Citizens), а у 2017 р. її було оновлено та представлено під назвою «Рамка цифрової компетентності для громадян: вісім рівнів майстерності з прикладами використання» (англ. DigComp2.1: Digital Competence Framework for Citizens) у Брюсселі (Бельгія). В оновленій Рамці ключових компетентностей для навчання впродовж життя (2018 р.), де цифрова компетентність визначається ключовою та наскрізною. Всесвітній економічний форум запропонував використовувати поняття «цифровий інтелект» (англ. digital intelligence (DQ)), що використовується для вимірювання загального та емоційного інтелекту та компетентності особи як індивідуальної здатності керувати цифровими медіа засобами. Тобто за аналогією з IQ (англ. IQ – intelligence quotient), що є кількісною оцінкою рівня інтелекту розумового розвитку відносно рівня середньостатистичної людини, або EQ, які використовують для вимірювання загального і емоційного інтелекту, здібності до digital media (англ.) – це вміння, яке можна також виміряти. DQ, або цифровий інтелект, розглядають у трьох наступних вимірах/рівнях: цифрове громадянство – можливість використання цифрових технологій і засобів масової інформації безпечним, відповідальним і ефективним способом; цифрова творчість – можливість стати частиною цифрової екосистеми за допомогою спільного створення нового контенту, а також можливість втілювати ідеї в реальність за допомогою цифрових інструментів; використання digital media та цифрових технологій для вирішення глобальних проблем або створення нових можливостей.

Цифрове громадянство нині як поняття широко застосовується європейською та світовою спільнотою для визначення того, як виявляють свою ідентичність громадяни, користуючись навичками та компетентностями з використання ІКТ. Уже досить значний період часу дослідники оперують різними термінами для визначення здатності людини використовувати інформаційно-комунікаційні технології в житті та роботі – інформаційно комунікаційна компетентність, цифрова компетентність, цифрова грамотність та ін. Цифрову компетентність вбачають у свідомому та критичному використанні техноло-

гій цифрового суспільства (англ. Information Society Technology (IST) для роботи, проведення вільного часу та спілкування.

Всесвітній економічний форум велику увагу приділяє саме цифровому інтелекту вчителя та учнів і виділяє 8 основних навичок, які людині необхідно мати в цифрову еру.

1. Цифрова ідентичність громадянина: уміння вибудовувати здорову і цілісну особистість онлайн і оффлайн, а також керування нею.
2. Керування екранним часом: самоконтроль і вміння управляти проведеним перед екраном часом, багатозадачністю і своєю участю в онлайн іграх і соціальних медіа.
3. Управління інтернет-цькуванням: здатність розпізнати його і мудро вийти з таких ситуацій.
4. Управління кібербезпекою: здатність захистити свої дані, створивши надійні паролі, і здатність впоратися з різними кібератаками.
5. Управління конфіденційністю: уміння обачно поводитися з будь-якою особистою інформацією, якою людина ділиться в Інтернеті, щоб захистити свою і чужу приватність.
6. Критичне мислення: уміння відрізнити правдиву інформацію від неправдивої, хороший контент від шкідливого, а також розпізнавати надійні та сумнівні онлайн контакти
7. Цифрова активність/сліди: уміння розуміти природу цифрової активності /слідів та їх наслідки в реальному житті, а також відповідно ними керувати.
8. Цифрова емпатія: здатність проявляти емпатію щодо власних і чужих потреб й почуттів онлайн.

Модель цифрового громадянства містить 10 галузей, до яких належать такі:

1. Доступ та включення. Ця галузь стосується доступу до цифрового середовища та окреслює коло компетентностей, що стосуються не тільки подолання різних форм так званої цифрової ізоляції, а також навички, необхідні майбутнім громадянам для участі в цифровому просторі, які є відкритими для будь-якої меншості чи різноманітності думки.
2. Навчання та творчість. Ця галузь стосується готовності та ставлення до навчання в цифрових середовищах протягом усього життя, готовності розвивати та проявляти творчість, користуючись різними інструментами та в різних контекстах.
3. ЗМІ та інформаційна грамотність. Ця галузь стосується здатності інтерпретувати, розуміти та висловлювати свою творчість через цифрові засоби масової інформації, з критичним мисленням. Бути медійно та інформаційно грамотними, тобто вміти розвиватися через освіту та через постійний обмін інформацією з іншими та оточенням навколо нас.

4. Етика та емпатія. Ця галузь стосується етичної поведінки та взаємодії в інтернеті з іншими на основі таких навичок, як уміння розпізнавати та розуміти почуття та перспективи інших.
5. Здоров'я та добробут. Для перебування цифрових громадян у віртуальному та реальному просторах недостатньо базових навичок цифрової компетентності.
6. Присутність та комунікації. Ця галузь стосується розвитку особистісних та міжособистісних якостей, що підтримують цифрових громадян у побудові та підтримці позитивної та послідовної присутності, ідентичності в інтернеті під час онлайн взаємодії.
7. Активна участь стосується здатності громадян повністю усвідомлювати, яким чином взаємодіяти у цифровому форматі середовища, в якому вони перебувають, приймати відповідальні рішення, брати активну участь у розбудові демократичної культури.
8. Права та обов'язки. Цифрові громадяни можуть користуватися правом на конфіденційність, безпеку, доступ та залучення, свободі поглядів.
9. Конфіденційність та безпека – це, головним чином, особистий захист власної інформації та інформації інших осіб в інтернеті.
10. Поінформованість споживачів. Всесвітня мережа з усіма її вимірами, як-от: соціальні мережі чи інший віртуальний соціальний простір – це середовище, де факт бути цифровим громадянином означає також бути споживачем.

Окрім таких основних галузей учитель має звертати увагу на технологічні аспекти власної цифрової компетентності, серед яких:

- розв'язання технічних проблем;
- здатність виявляти технічні проблеми в процесі роботи пристроїв та використання цифрових середовищ, уміти їх вирішувати (від виявлення несправностей до усунення суттєвіших складнощів);
- визначення потреб та пошук технологічних відповідей; на основі аналізу потреб здатність виявляти, оцінювати, вибирати, використовувати цифрові інструменти та можливі технологічні відповіді для їх вирішення;
- уміння налаштовувати цифрові середовища на особисті потреби (наприклад, за параметром доступності);
- креативне використання цифрових технологій;
- здатність використовувати цифрові інструменти й технології для створення знань, інноваційних процесів і продуктів;
- брати індивідуальну і колективну участь у пізнавальній діяльності, щоб розуміти й розв'язувати концептуальні проблеми та вирішувати проблемні ситуації в цифрових середовищах; визначення прогалів у цифровій компетентності;

- здатність усвідомлювати потребу в покращенні або оновленні власної цифрової компетентності;
- здатність підтримати інших у розвитку їхньої цифрової компетентності;
- пошук можливостей для саморозвитку та обізнаність щодо сучасної цифрової еволюції.

**Р. В. Моцик**, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ВПЛИВ ШТУЧНОГО ІНТЕЛЕКТУ НА ОНЛАЙН-НАВЧАННЯ**

Останніми роками штучний інтелект (ШІ) став невід'ємною частиною багатьох аспектів нашого життя, вносячи значні зміни в різні сфери, зокрема й в освіту. З розвитком технологій онлайн-навчання зазнає кардинальних змін, стаючи більш доступним, інтерактивним та ефективним. Штучний інтелект відіграє ключову роль у цьому процесі, надаючи нові можливості для учнів і викладачів. Ми розглянемо, як саме ШІ впливає на онлайн-навчання і які перспективи відкриває перед нами ця технологія.

Однією з головних переваг ШІ в освіті є можливість персоналізації навчального процесу. Штучний інтелект здатний аналізувати дані про процес навчання студента, його швидкість засвоєння інформації та вподобання в досліджуваному матеріалі. Це дає змогу створювати індивідуальні навчальні плани, адаптовані під конкретного користувача, що робить навчання ефективнішим і цікавішим.

Штучний інтелект також сприяє поліпшенню доступності освіти для широкого кола людей, включно з особами з обмеженими можливостями. За допомогою ШІ розробляються спеціалізовані програми та додатки, які можуть адаптувати навчальний матеріал під індивідуальні потреби кожного учня, забезпечуючи глибше розуміння предмета. Може використовуватися для створення віртуальних репетиторів та чат-ботів, які можуть надавати учням цілодобову підтримку, відповідати на запитання та допомагати з завданнями. ШІ може використовуватися для створення інтерактивних навчальних модулів, які включають ігри, симуляції та віртуальні середовища, що робить навчання більш цікавим та захоплюючим. Автоматичне оцінювання робіт учнів та надавати їм детальні відгуки про їхні сильні та слабкі сторони.

ШІ значно полегшує управління освітнім процесом, автоматизуючи багато адміністративних завдань. Це включає в себе організа-

цію розкладів, управління ресурсами, відстеження успішності та надання звітів. Автоматизація цих процесів дозволяє викладачам зосередитися на безпосередньо навчанні, а не на бюрократичних процедурах. ШІ робить онлайн-навчання доступним для людей у будь-якому місці та в будь-який час, руйнуючи географічні та економічні бар'єри. Учні можуть проходити онлайн-курси у власному темпі, що робить їх більш доступними для людей з обмеженими можливостями або тих, хто має щільний графік. ШІ може перекладати навчальні матеріали в режимі реального часу, роблячи їх доступними для людей, які не володіють мовою навчання.

Одним зі значущих досягнень ШІ у сфері онлайн-навчання є розвиток технологій перетворення аудіо в текст. Ці інструменти дають змогу перетворювати лекції та аудіоматеріали в текстовий формат, роблячи інформацію доступною для аналізу, пошуку та вивчення. Такі технології особливо корисні для студентів із порушеннями слуху або для тих, хто віддає перевагу візуальному сприйняттю інформації.

ШІ відкриває нові можливості для створення інтерактивних і залучальних форм навчання. За допомогою ігрових елементів, віртуальної та доповненої реальності створюються навчальні матеріали, які не тільки підвищують інтерес учнів, а й сприяють глибшому розумінню матеріалу. Може надавати учням цілеспрямовану підтримку та зворотній зв'язок у режимі реального часу, відповідаючи на їхні запитання, пояснюючи складні концепції та пропонуючи поради щодо покращення результатів навчання.

Системи адаптивного навчання, розроблені на основі ШІ, здатні в реальному часі адаптувати навчальний процес залежно від успіхів і складнощів, з якими стикається студент. Це дає змогу надавати персоналізований навчальний досвід, що максимально відповідає потребам і здібностям кожного учня.

Штучний інтелект використовується для створення рекомендаційних систем, які можуть пропонувати студентам курси, книги та інші ресурси на основі їхніх інтересів, попереднього досвіду навчання та успішності. Це підвищує мотивацію учнів і сприяє глибшому зануренню в дисципліни, що вивчаються.

Перспективи використання штучного інтелекту в освіті здаються безмежними. З кожним роком з'являються нові інструменти та підходи, які роблять процес навчання доступнішим, цікавішим та ефективнішим. ШІ має потенціал кардинально змінити підходи до освіти, роблячи її більш персоналізованою, інтерактивною і доступною для кожного, хто бажає навчатися.

У підсумку, штучний інтелект уже сьогодні робить значний внесок у розвиток онлайн-навчання, і його роль тільки зростатиме. Інно-



вації в цій галузі обіцяють зробити освітній процес адаптивнішим, інтерактивнішим і доступнішим, відкриваючи нові горизонти для навчання і саморозвитку, а також має значний потенціал для покращення онлайн-навчання, роблячи його більш персоналізованим, ефективним, доступним та захоплюючим.

**Р. Я. Гончар,**

**В. А. Іванюк,** д-р техн. наук,

**М. О. М'ястковська,** канд. пед. наук,

**В. В. Понеділок,** канд. техн. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **РЕФАКТОРИНГ ІНФОРМАЦІЙНОГО СЕРЕДОВИЩА КАФЕДРИ ЗАКЛАДУ ВИЩОЇ ОСВІТИ НА ОСНОВІ СУЧАСНИХ ІННОВАЦІЙНИХ ПІДХОДІВ**

У сучасному світі інформаційні технології стали невід'ємною частиною освітнього процесу. Інформаційні технології швидко розвиваються і заклади вищої освіти (ЗВО) повинні адаптуватися до цих змін, щоб забезпечити своїм здобувачам вищої освіти актуальні знання та навички. З часом, інформаційні середовища у ЗВО застарівають та не відповідають повною мірою сучасним потребам користувачів. Це може негативно впливати на якість освітнього процесу та імідж навчального закладу. Сучасні стейкхолдери, включаючи студентів, викладачів та роботодавців, очікують зручного, інтерактивного та ефективного інформаційного середовища, яке дозволить їм легко знаходити необхідну інформацію та зручно комунікувати в рамках освітнього процесу.

Для вирішення цих проблем, для початку необхідно проаналізувати наявне інформаційне середовище, дослідити можливості для його покращення та впровадити зміни, базуючись на результатах аналізу та дослідження.

Підходи, які допоможуть отримати висновки для впровадження змін:

- Аналіз наявного інформаційного середовища.
- Збір відгуків користувачів.
- Опитування студентів та викладачів.
- Аналіз поточного функціоналу та розробка нових ідей.
- Аналіз конкурентів.
- Проведення юзер-тестів.
- Документація інформаційної архітектури сайту.
- Створення User Journey Map (UJM).

Аналіз наявних інтерфейсів на базі принципів Гештальту, евристик Якоба Нільсена та стандартів WCAG (Web Content Accessibility Guidelines).

Хоча ці методи є добре відомими в ІТ-сфері, вони інноваційні для кафедри комп'ютерних наук, оскільки раніше не використовувалися. Впровадження цих підходів суттєво покращить взаємодію стейкхолдерів з інформаційним середовищем. Це покращить якість освітнього процесу, дозволяючи здобувачам вищої освіти та викладачам легше знаходити інформацію, ефективніше комунікувати та зручніше проводити освітній процес. Крім того, покращення бренд-айдентики кафедри може залучити більше абітурієнтів, здобувачів вищої освіти, викладачів та потенційних роботодавців, що підвищить конкурентоспроможність нашого закладу.

Також, серед інновацій в підходах варто використовувати технологію штучного інтелекту. В самому інформаційному середовищі штучний інтелект інтегрований не буде, але він може допомогти у виконанні завдань самого рефакторингу, а саме в наступних моментах:

- Генерація ідей для нового функціоналу.
- Аналіз результатів досліджень.
- Допомога у проведенні пост-аналітичних досліджень.

Це дасть змогу зменшити час на генерацію потенційних ідей, аналіз результатів досліджень, проведення необхідних підсумків, що дасть змогу обробити більше інформації та зробити більший об'єм роботи з покращення інформаційного середовища.

Оновлене інформаційне середовище сприятиме покращенню якості освітнього процесу, підвищуючи конкурентоспроможність ЗВО. Зміни, які будуть впроваджені, дозволять учасникам середовища краще комунікувати та обмінюватись інформацією, що покращить освітній процес. Рефакторинг інформаційного середовища є важливим кроком для покращення рівня ІТ-освіти.

### **Список використаних джерел:**

1. Walter A. Designing for Emotion: Second Edition Paperback. Book Apart. 2nd ed. 2020. 118 p.
2. Thomas D. D. Design for Cognitive Bias. A Book Apart. 2020. 107 p.
3. Nielsen J. 10 Usability Heuristics for User Interface Design. 2024. URL: <https://www.nngroup.com/articles/ten-usability-heuristics/>.
4. Moran K., Nielsen J. AI for UX: Getting Started. 2023. URL: <https://www.nngroup.com/articles/ai-ux-getting-started/>
5. Rosala M. The Gestalt Principles for User Interface Design. 2023. URL: <https://www.nngroup.com/videos/the-gestalt-principles-intro/>
6. Tankala S. 15 User Research Methods to Know Beyond Usability Testing. 2024. URL: <https://www.nngroup.com/videos/15-user-research-methods-beyond-usability-testing/>

Секція 4.  
**СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ**

---

**О. Зеленський\***, канд. фіз.-мат. наук,

**М. Фенцур\***,

**А. Динич\*\***,

**П. Стремедловський\*\*\***,

\* Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\* Кам'янець-Подільський фаховий коледж НРЗВО КПДІ,  
м. Кам'янець-Подільський,

\*\*\* Кам'янець-Подільський лицей №14, м. Кам'янець-Подільський

**КОМБІНАТОРНИЙ АНАЛІЗ В МОДЕЛЮВАННІ ЛОТЕРЕЙ:  
ВИЗНАЧЕННЯ МІНІМАЛЬНОЇ КІЛЬКОСТІ БІЛЕТІВ ДЛЯ  
ГАНТАВОВАНОГО ВИГРАШУ**

Комбінаторний аналіз можна використовувати для моделювання гри в лотерею. Розглянемо наступну задачу: у лототроні міститься  $n$  занумерованих кульок. Під час розіграшу лотереї випадає  $k$  кульок. Гравець купує білет і записує в ньому номери шести кульок, які, на його думку, випадуть під час розіграшу. Яку найменшу кількість білетів потрібно купити гравцю, щоб гарантовано, принаймні в одному з них, вгадати щонайменше два номери? Позначимо це число через  $F(n, k)$ . В роботі знайдені  $F(n, 2)$  для  $n$ , яке не перевищує 12, та  $F(36, 6)$ .

**Лема 1.** Якщо  $m \leq n$  то  $F(m, k) \leq F(n, k)$ .

**Лема 2.**  $F(3m, 2) \leq C_m^2$ .

**Твердження 1.**  $F(n, 2) = 1$ , для  $2 \leq n \leq 6$ .

**Твердження 2.**  $F(n, 2) = 3$ ,  $7 \leq n \leq 9$ .

**Твердження 3.**  $F(10, 2) = 4$ .

**Твердження 4.**  $F(11, 2) = F(12, 2) = 6$ .

**Теорема.**  $F(36, 6) = 9$ .

**Список використаних джерел:**

1. Henz N. The distribution of spaces on Lottery tickets. *Fibonacci Quarterly*. № 33. P. 426-431.
2. Brouwer A. I., Vorhoeven M. Turan Theory and the Lotto Problem. *Math Centrum Tracts*. № 106. P. 99-105.

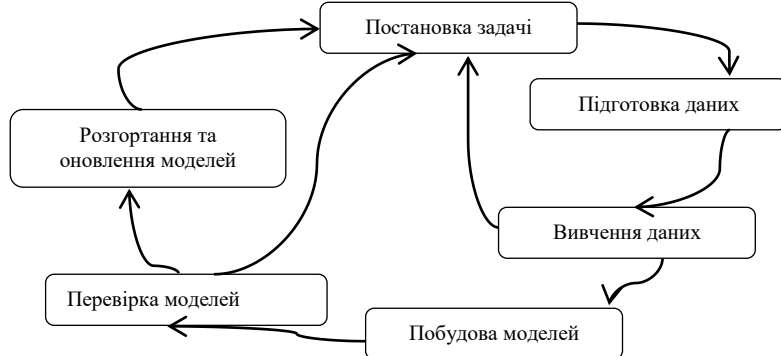
**В. А. Іванюк**, д-р техн. наук,  
**О. К. Кушнір**, канд. екон. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПОБУДОВА МОДЕЛЕЙ ІНТЕЛЕКТУАЛЬНОГО АНАЛІЗУ ДАНИХ

Інтелектуальний аналіз даних (ІАД) є ключовою частиною аналітики, яка використовує передові аналітичні методи для пошуку корисної інформації в наборах даних. Інтелектуальний аналіз даних – науковий і технологічний напрямок, пов'язаний з обробкою інформації та виявленням в ній закономірностей і тенденцій, які можуть застосовуватися при підтримці прийняття рішень. Можливість практичної реалізації інтелектуального аналізу даних виникла завдяки розвитку і поширенню інформаційних технологій, виникненню і розвитку методів штучного інтелекту.

Побудова моделі інтелектуального аналізу даних є складовою масштабнішого процесу, який включає всі етапи, починаючи з визначення базової проблеми, яку модель вирішуватиме, до розгортання моделі в робочому середовищі [1, с. 7]. Цей процес може задаватись за допомогою таких шести базових етапів (рис. 1):



**Рис. 1.** Етапи інтелектуального аналізу даних [2, с. 115]

Інтелектуальний аналіз має циклічний характер, кожен крок не обов'язково веде безпосередньо до наступного, тому створення моделі інтелектуального аналізу даних є динамічним ітеративним процесом. Виконавши огляд даних, користувач може виявити, що наявних даних недостатньо для створення необхідних моделей інтелектуального аналізу даних, що, відповідно, веде до необхідності пошуку додаткових даних. Можна розробити декілька моделей і зрозуміти, що вони не розв'язують сформульованої задачі. Отже, потрібна зміна її характери-

стик. Може виникнути потреба в оновленні вже розгорнутих моделей за рахунок нових даних, що надійшли. Таким чином, важливо розуміти, що створення моделі інтелектуального аналізу даних є процесом і що кожен крок такого процесу може повторюватись стільки разів, скільки необхідно для створення ефективної моделі.

Метою інтелектуальних технологій є пошук нового знання, яке користувач може надалі застосувати для поліпшення результатів своєї діяльності. Результатом моделювання є виявлення відношень у даних. На практиці широкого застосування набули такі види (алгоритми) інтелектуальних обчислень: нейронні мережі; дерева рішень; алгоритми визначення асоціацій і послідовностей; нечітка логіка; генетичні алгоритми; еволюційне програмування; візуалізація даних; комбіновані методи [3, с. 64-67].

Підготовка даних є найважливішим етапом, від якості виконання якого залежить можливість одержання якісних результатів усього процесу аналітики. Крім того, слід пам'ятати, що на етап підготовки даних, за деякими оцінками, може бути витрачено до 80% усього часу. Після того, як побудова моделі завершена, її можна коригувати, використовуючи інші параметри або навіть змінити алгоритм її побудови, оскільки ніколи не можна сказати, який алгоритм та технологія пошуку знань дасть кращі результати. Не можна бути впевненим, що якась технологія працюватиме найкраще. Часто доводиться будувати велику кількість моделей і оцінювати кожен з метою визначення кращої. Окрім цього, для різних моделей необхідна різна підготовка даних і неминуче повторення кроків. Все це збільшує час пошуку кращої моделі, тому необхідно застосовувати технології паралельних обчислень.

### **Список використаних джерел:**

1. Ланде Д. В., Субач І. Ю., Бояринова Ю. Є. Основи теорії і практики інтелектуального аналізу даних у сфері кібербезпеки: навч. посібник. Київ: ІСЗІ КПІ ім. Ігоря Сікорського», 2018. 297 с.
2. Основи цифрової економіки: навч. посібник / за ред. Н. А. Мазур. Чернівці: Чернівець. нац. ун-т ім. Ю. Федьковича, 2024. 304 с.
3. Bentley D. Business Intelligence and Analytics. NY: Library Press, 2017. 308 p.

**О. П. Панчелюга**, аспірант,  
**В. В. Жуковський**, канд. техн. наук

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **ДЕЯКІ АСПЕКТИ ВИЯВЛЕННЯ НЕРОЗІРВАНИХ БОЄПРИПАСІВ ТА МІН ЗА ДОПОМОГОЮ ГЛИБОКОГО НАВЧАННЯ НА ОСНОВІ ТЕРМАЛЬНИХ ЗОБРАЖЕНЬ**

Війна в Україні призвела до значного забруднення територій нерозірваними боєприпасами (УХО) та мінами, що становить серйозну загрозу для життя та безпеки людей. За даними уряду України, в країні заміновано 174 000 кв. км, чверть із яких – 45 000 кв. км – є деокупованими територіями. За оцінкою Світового Банку, повне розмінування території України може коштувати \$37 млрд. [1]. Це підкреслює нагальну потребу у нових технологіях для ефективного виявлення та знешкодження таких об'єктів.

Традиційні методи розмінування є трудомісткими, небезпечними та неефективними. Зазвичай вони включають ручний пошук з використанням металодетекторів та саперних собак, що піддає ризику життя саперів та не завжди гарантує повне очищення території від мін [2]. Вони також потребують значних ресурсів та часу, що ускладнює розмінування великих територій.

На фоні значного прогресу у розробці безпілотних літальних апаратів (БПЛА) з'являються нові можливості для вирішення цієї проблеми. БПЛА, оснащені різними електромагнітними сенсорами, знайшли широке застосування, включаючи виявлення УХО та мін [3]. Вони забезпечують кращу безпеку та швидкість вимірювань у порівнянні з іншими платформами для виявлення мін.

БПЛА, оснащені термальними камерами, мультиспектральними датчиками та магнітометрами, можуть збирати дані про місцевість з високою роздільною здатністю. Ці дані потім використовуються для навчання нейронних мереж виявляти УХО та міни на зображеннях.

Існує багато наукових оглядів, присвячених проблемі УХО, які розглядають як методи їх виявлення, так і алгоритми обробки даних [4].

Ряд науковців пропонують нові методи виявлення УХО, які ґрунтуються на використанні безпілотних літальних апаратів (БПЛА) та глибокого навчання. Ці методи дозволяють автоматизувати процес пошуку УХО та мін, підвищуючи його точність, ефективність та безпеку.

Глибоке навчання – це галузь штучного інтелекту, яка дозволяє нейронним мережам навчатися на великих обсягах даних [5]. У контексті виявлення УХО та мін нейронні мережі навчаються розпізнавати ці об'єкти на зображеннях з БПЛА, генеруючи карти ймовірності їх розташування.

У роботі [6] пропонується алгоритм виявлення UXO та мін на основі датасету UXOTi\_NPA, який містить термальні зображення з БПЛА та анотації щодо розташування UXO та мін. Алгоритм використовує YOLOv8 [7], сучасну архітектуру нейронної мережі, яка добре зарекомендувала себе в задачах об'єктного розпізнавання.

Для розпізнавання UXO та мін за допомогою моделі YOLO необхідно виконати наступні кроки: завантаження та підготовка датасету, налаштування та тренування моделі, оцінка та валідація моделі.

Готову модель можна використовувати для виявлення UXO та мін на нових зображеннях, отриманих з БПЛА у реальному часі.

Отримані результати підтверджують ефективність використання сучасних методів глибокого навчання, зокрема моделі YOLOv8, у поєднанні з термальними зображеннями для виявлення UXO та мін. Подальше дослідження спрямоване на оптимізацію моделей та розширення датасету для покращення якості виявлення.

#### Список використаних джерел:

1. Гуманітарне розмінування територій – це нульовий етап економічного відновлення країни, – Юлія Свириденко на відкритті Demine Ukraine Forum, Міністерство економіки України, опубліковано 27 вересня 2023 року.
2. Habib, Maki K., Mechanical Mine Clearance Technologies and Humanitarian Demining: Applicability and Effectiveness. *5th International Symposium on Technology and Mine Problem*. California, USA, 2002.
3. Miccinesi L., Beni A., Pieraccini M. UAS-Borne Radar for Remote Sensing. *A Review. Electronics*. 2022. № 11, 3324.
4. Makki I., Younes R., Francis C. and other. A survey of landmine detection using hyperspectral imaging. *ISPRS Journal of Photogrammetry and Remote Sensing*. 2017. Vol. 124. P. 40-53.
5. Reed S., Sun W.-L., Ferguson B. Deep learning for computer vision: A survey. arXiv preprint arXiv:1606.06645. 2016.
6. Milan Bajić Jr., Božidar Potočnik. UAV Thermal Imaging for Unexploded Ordnance Detection by Using Deep Learning. *Remote Sens*. 2023. Vol 15 (4). P. 967.
7. Моделі YOLOv8. URL: <https://github.com/ultralytics/ultralytics>.

Т. М. Пилипюк, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ В УМОВАХ НЕВИЗНАЧЕНОСТІ

Розглядаються задачі пошуку оптимального рішення в умовах невизначеності.

Процес прийняття рішень в умовах невизначеності може бути описаний за таким алгоритмом [1].

Формування множини можливих рішень  $\Phi = \{\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m\}$  і множини станів середовища:  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$ .

Визначення та задання основних показників оцінного функціоналу:  $F = \{f_{j,k}\}$ , який характеризує «виграш» або «прогреш» при виборі рішення з множини  $\Phi$ , якщо середовище перебуває в одному з станів з множини  $\Theta$ .

Визначення інформаційної ситуації, яка описує стратегію поведінки середовища  $S$ , яке, в свою чергу описується множиною взаємовиключних станів  $\Theta = \{\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n\}$  і може перебувати в одному з них.

Вибір критерію прийняття рішень із множини критеріїв, які характеризують визначену органом управління інформаційну ситуацію. Інформаційна ситуація характеризується заданим розподілом априорних ймовірностей  $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$  на елементах множини  $\Theta$

$$(p_j = p(\theta_j), \sum_{j=1}^n p_j = 1).$$

Прийняття оптимального, за вибраним критерієм, рішення або його корекція.

**Постановка задачі.** Викладач пропонує до каталогу дисциплін вільного вибору свою навчальну дисципліну (освітній продукт-послугу) для вивчення здобувачами вищої освіти у наступному навчальному році. Потрібно прийняти рішення про оптимальний спосіб просування освітнього продукту з урахуванням ризиків.

Ситуації:  $\varphi_1$  – самостійне просування через інформування здобувачів вищої освіти;  $\varphi_2$  – оприлюднення силабусу навчальної дисципліни на сайті кафедри;  $\varphi_3$  – оприлюднення інформації у соціальних мережах;  $\varphi_4$  – самопросування.

Ризики:  $\theta_1$  – конкуренція між пропозиціями;  $\theta_2$  – зацікавленість інших в просуванні своїх пропозицій;  $\theta_3$  – не зацікавленість здобувачів освіти продуктом, що пропонується;  $\theta_4$  – технічні проблеми оприлюднення.



Вважаємо, що всі стани настають з приблизно однаковою ймовірністю.

Матрицю ризиків представимо, наприклад, у вигляді:

$P$		$\varphi_1$	$\varphi_2$	$\varphi_3$	$\varphi_4$
0,3	$\theta_1$	1	4	3	0
0,3	$\theta_2$	2	2	3	4
0,2	$\theta_3$	2	0	3	4
0,2	$\theta_4$	2	4	3	1

Застосовуючи критерій Байеса, критерій мінімуму дисперсії оцінного функціонала з його модифікаціями, критерій максимізації ймовірності розподілу оцінного функціоналу, модальний критерій, критерій мінімуму ентропії та комбіновані критерії знайдемо оптимальне рішення. Усього 10 критеріїв. Результати обчислень для прийняття рішень за різними критеріями в умовах невизначеності отримаємо засобами електронних таблиць.

Здійснивши відповідні розрахунки, отримаємо оптимальне рішення –  $\varphi_3$  (оприлюднення інформації у соціальних мережах). Такий результат отримано у 7 критеріях із 10.

Оскільки використання різних критеріїв дає різні оптимальні альтернативи, тому для прийняття остаточного рішення потрібно обов'язково враховувати умови задачі та вимоги до рішення, яке приймає керуючий орган, а за умовами нашої задачі – особа, яка приймає рішення.

### Список використаних джерел:

1. Ус С. А. Прийняття рішень в умовах ризику. Методичні рекомендації до виконання лабораторних робіт з дисципліни «Теорія прийняття рішень» студентами напряму підготовки 6.040303 Системний аналіз. Дніпропетровськ: НГУ, 2014. 35 с.

**А. А. Порохнавець**, аспірант

Харківський національний економічний університет  
імені Семена Кузнеця, м. Харків

## МОДЕЛЮВАННЯ ІНВЕСТИЦІЙНОЇ ДІЯЛЬНОСТІ З КРИПТОАКТИВАМИ

Криптовалюти стають все більш важливою складовою сучасних фінансових ринків, пропонуючи нові можливості для інвесторів. Однак висока волатильність і нестабільність ринку криптовалют створюють значні ризики, які вимагають особливого підходу до управління. У цьому контексті моделювання інвестиційної діяльності з

криптоактивами є актуальним завданням, що дозволяє зменшити ризики та підвищити ефективність управління інвестиціями за допомогою передових методів аналізу та прогнозування.

**Метою цього дослідження** є розробка та впровадження моделей для оптимізації інвестиційного портфеля з криптоактивами, що дозволить інвесторам максимізувати дохідність при мінімізації ризиків. Це дослідження фокусується на інтеграції сучасних методів економетричного аналізу, машинного навчання, оптимізаційних алгоритмів та аналізу настроїв ринку для створення комплексного підходу до інвестиційної діяльності з криптоактивами.

Використання економетричних моделей для аналізу та прогнозування цін криптоактивів є одним з ключових методів. Дослідження [1-4] показують, що економетричні методи дозволяють ідентифікувати ключові фактори, що впливають на ціни криптовалют, такі як обсяг торгів, новини ринку, макроекономічні показники та інші. Застосування регресійного аналізу допомагає виявити залежності між цими факторами та цінними коливаннями криптовалют. Очікується, що це підвищить точність прогнозування на основі аналізу історичних даних, що дозволить інвесторам приймати більш обґрунтовані рішення.

Застосування алгоритмів машинного навчання, таких як нейронні мережі та градієнтний бустинг, для побудови прогнозних моделей також є важливим аспектом дослідження. Ці моделі навчаються на великих масивах історичних даних і враховують складні нелінійні залежності та приховані закономірності в даних. Машинне навчання дозволяє створювати адаптивні моделі, які можуть прогнозувати майбутні ціни криптоактивів з високою точністю. Очікується, що це підвищить точність прогнозів на 20% порівняно з традиційними методами [1].

Використання оптимізаційних алгоритмів, таких як генетичні алгоритми та алгоритми рою частинок, для формування портфельів криптоактивів також має важливе значення. Дослідження [3] показує, що оптимізація портфельів з урахуванням обмежень на ризик та дохідність дозволяє знизити загальні ризики інвестиційного портфеля. Оптимізаційні підходи враховують різні сценарії ринку та адаптують портфель до мінливих умов, що сприяє стабільності інвестицій. Очікується, що це знизить ризики портфеля на 15%.

Використання методів аналізу настроїв для оцінки настроїв ринку на основі даних соціальних мереж, новинних ресурсів та інших джерел також є важливим аспектом дослідження. Аналіз настроїв дозволяє виявити вплив позитивних та негативних новин на ціни криптоактивів, що є важливим для короткострокового прогнозування. Це допоможе інвесторам краще розуміти ринкові тенденції та приймати рішення на основі поточних настроїв ринку [4].

Очікується, що застосування моделей машинного навчання дозволить поліпшити точність прогнозування цін криптоактивів на 20% порівняно з традиційними методами. Використання оптимізаційних алгоритмів повинно забезпечити зниження ризиків портфеля на 15%. Впровадження цих моделей у практику інвесторів сприятиме підвищенню ефективності їхньої інвестиційної діяльності.

Моделювання інвестиційної діяльності з криптоактивами є перспективним напрямом, що дозволяє інвесторам покращити управління своїми активами. Подальші дослідження мають бути спрямовані на удосконалення моделей та їх адаптацію до мінливих умов ринку криптовалют. Це включає розширення баз даних, підвищення точності моделей та їх інтеграцію з іншими інструментами аналізу для створення більш комплексних рішень.

#### **Список використаних джерел:**

1. Bouri E., Molnár P., Azzi G. and other/ On the hedge and safe haven properties of Bitcoin: Is it really more than a diversifier? *Finance Research Letters*. 2017. № 20. P. 192-198.
2. McNally S., Roche J., Caton S. Predicting the price of Bitcoin using Machine Learning. *26th Euromicro International Conference on Parallel, Distributed and Network-based Processing (PDP)*. 2018. P. 339-343.
3. Sensoy A., Sobaci C., Erturk M. Dynamic Portfolio Optimization with Copula-GARCH-EVT Model. *Application on Cryptocurrencies. Economics Bulletin*. 2017. Vol. 37 (1). P. 316-332.
4. Ranjan S., Bhatnagar V. Sentiment Analysis on Cryptocurrency Twitter Data. *Procedia Computer Science*. 2020. Vol. 167. P. 1508-1517.

**П. Ю. Решетняк**, аспірант

Національний університет біоресурсів

та природокористування України, ПрАТ «Київстар», м. Рівне

### **СИСТЕМА ОНТОЛОГІЙ ДЛЯ МОНІТОРИНГУ СТАНУ ЗАХИЩЕНОСТІ ТЕЛЕКОМУНІКАЦІЙНИХ ПОСЛУГ**

Побудова інтелектуальної системи моніторингу стану захищеності телекомунікаційних послуг є складною задачею, яка вимагає комплексного підходу до збору, аналізу та інтеграції різномірних знань. Ці знання охоплюють широкий спектр областей, таких як інфраструктура телекомунікаційних послуг, потенційні загрози, вразливості системи, контрзаходи та різні аспекти та критерії захищеності.

Ефективне управління та використання цих різномірних та складних знань є ключовим фактором успішного функціонування такої

системи. Традиційні підходи до управління знаннями, такі як реляційні бази даних або неструктуровані документи, не забезпечують необхідного рівня семантичної інтероперабельності та машинної інтерпретації [1].

Для вирішення цієї проблеми запропоновано використовувати наступну систему повних  $(X \neq \emptyset, R \neq \emptyset)$  [2] онтологій як основу для представлення та інтеграції знань в рамках інтелектуальної системи моніторингу:

- Онтологія телекомунікаційних послуг ( $O_1$ ).
- Онтологія інфраструктури ( $O_2$ ).
- Онтологія загроз та вразливостей ( $O_3$ ).
- Онтологія станів захищеності ( $O_4$ ).
- Онтологія контрзаходів ( $O_5$ ).
- Онтологія моніторингу та оцінки ( $O_6$ ).
- Онтологія самонавчання та адаптації ( $O_7$ ).

Кожна з повних онтологій формально представлена у вигляді кортежу [2]:

$$O = \langle X, R, F, A(D, Rs) \rangle \quad (1)$$

де для кожної онтології  $O_i$  ( $i = 1..7$ ):

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n\}$ ,  $i = \overline{1..n}$ ,  $n = \text{Card}X$  – множина концептів;

$R = \{R_1, R_2, \dots, R_k, \dots, R_m\}$ ,  $R \subseteq X_1 \times X_2 \times \dots \times X_k$ ,  $k = \overline{1..m}$ ,  $m = \text{Card}R$  – множина концептуальних відношень між концептами;

$F : X \times R$  – скінченна множина функцій інтерпретації, заданих на концептах і/або відношеннях;

$A$  – скінченна множина аксіом, яка складається з множини визначень  $D$  і множини обмежень  $Rs$  для поняття  $X_i$ .

Запропоновані відношення між онтологіями:

*надається*  $\subseteq O_1 \times O_2$

*має вразливості та загрози*  $\subseteq O_2 \times O_3$

*впливає на*  $\subseteq O_3 \times O_4$

*мінімізує*  $\subseteq O_5 \times O_3$

*використовує дані*  $\subseteq O_6 \times (O_1 \cup O_2 \cup O_3 \cup O_4 \cup O_5)$

*використовує*  $\subseteq O_6 \times O_7$

*адаптується за*  $\subseteq O_6 \times O_7$

Таке представлення системи онтологій з використанням повних онтологій має на меті забезпечення більш повного формального опи-

су знань в кожній предметній області. Множини визначень та обмежень дозволяють додати додаткову семантику та правила до концептів та відношень, що сприяє більш ефективній інтерпретації та обробці знань в рамках інтелектуальної системи моніторингу стану захищеності телекомунікаційних послуг.

#### **Список використаних джерел:**

1. Gruber T. R. Toward principles for the design of ontologies used for knowledge sharing. *International Journal of Human-Computer Studies*. 1995. № 43 (5-6). P. 907-928.
2. Програмно-інформаційні засоби формування систем знань навчального призначення: посібник / за ред. О. Є. Стрижака. Київ: Інститут обдарованої дитини, 2014. С. 38-39.

Секція 5.  
МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ  
МОДЕЛЮВАННЯ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ

---

**В. Blagitko\***, PhD,  
**D. Myronyuk\***,  
**I. Zajachuk\*\***, PhD,  
**Y. Bodakovskiy\*\*\***

\*Ivan Franko National University of Lviv, Lviv,

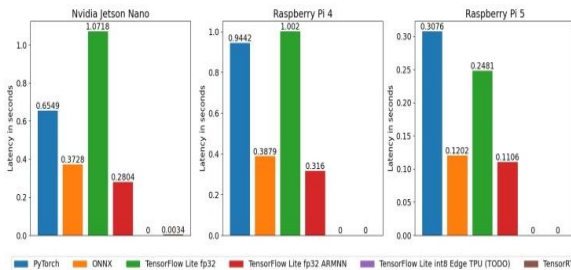
\*\*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics National Academy of Sciences of Ukraine, Lviv,

\*\*\*Ukrainian Catholic University Faculty of Applied Sciences

### LATENCY IMAGE RECOGNITION BENCHMARK IN REAL-TIME

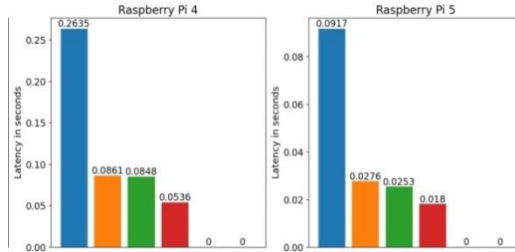
**Introduction** The benchmark runs on three supported devices: Raspberry Pi 4 Model B [1], Raspberry Pi 5 [2], and Nvidia Jetson Nano [3]. Also, the benchmark can run inference using the following frameworks: PyTorch, ONNX, TensorRT, and Tensor-Flow Lite. Two models cover the whole supported range. Classification and regression for this image recognition experiment are used. We chose ResNet50 [4] – an object classification model trained on the ImageNet dataset. It takes a 224x225 RGB image as input and classifies it as one of the 1000 available classes; MobileNetV2 [5] – is also an object classification model trained on the ImageNet dataset. It has the same input and output as ResNet50. However, it is small in cost of minor accuracy loss, so it is suitable for edge devices with limited resources.

**Experiments and Results.** Latency (or inference time) is the time it takes for a model to make predictions based on input data. The latency and accuracy are in the best interest of developers while building and testing their models. A time module in Python measures it. Fig.1 demonstrates the measured latency for three devices and frameworks using the ResNet50 model.



*Fig. 1. The measured latency for three devices and frameworks using the ResNet50 model*

Fig.2 demonstrates the measured latency for two devices and frameworks using the MobileNetV2 model.



**Fig. 2.** The measured latency for two devices and frameworks using MobileNetV2 model

The best performance for CPU-only inference has TensorFlow Lite with ARMNN usage. It is twice as good as running the same model without a delegate. ONNX performance is good and close to ARMNN without any optimizations. PyTorch has the worst expected latency. It is not optimized to run on edge devices. Raspberry Pi 5 results are much better than Raspberry Pi 4. It is because of better CPU and RAM speed.

Accuracy calculated ACC [6]. It ranges from 0 to 1 and then is multiplied by 100 to get a percentage. Accuracy of the Classification models ResNet50 and MobileNetV2 were measured. There is no loss in accuracy when converting between PyTorch, ONNX, TensorRT, and TensorFlow Lite without any optimizations.

**Conclusion.** The test results of the trained models are satisfactory.

### References:

1. Raspberry Pi Foundation. Raspberry Pi 4 Model B – Specifications. Accessed: 2024-04-22. URL: <https://www.raspberrypi.com/products/raspberry-pi-4-model-b/specifications>.
2. Raspberry Pi Foundation. Raspberry Pi 5. Accessed: 2024-04-22. URL: <https://www.raspberrypi.com/products/raspberry-pi-5>.
3. NVIDIA. Jetson Nano Developer Kit. Accessed: 2024-03-24. URL: <https://developer.nvidia.com/embedded/jetson-nano-developer-kit>.
4. Kaiming He et al. Deep Residual Learning for Image Recognition. 2015. arXiv:1512.03385.
5. Mark Sandler et al. MobileNetV2: Inverted Residuals and Linear Bottlenecks. 2019. arXiv: 1801.04381.
6. Željko D. Vujovic. Classification Model Evaluation Metrics. *International Journal of Advanced Computer Science and Applications*. 2021. Vol. 12.6. P. 599-606. DOI: 10.14569/IJACSA.2021.0120670.

**A. V. Nikitin\***, Dr.Sc., Professor,

**B. V. Krasiuk\*\***, PhD

\*National University of Ostroh Academy, Ostroh,

\*\*Taras Shevchenko National University of Kyiv, Kyiv

## **PECULIARITIES OF BUILDING AND ANALYSING A MULTIDIMENSIONAL MODEL OF INFORMATION WARFARE WITH CONSIDERATION OF RANDOM FACTORS**

Information threats harm individuals, organizations, or states. Robust security measures are needed to counter them. A new dynamic model of information warfare was developed, along with a software decision support system for real-time analysis and management of various information scenarios.

The Lotka-Volterra equations were proposed to model information warfare [1] in a social community exposed to various types of information threats. The model describes a constant population size and the number of supporters who have perceived new information over time.

There are two channels of information dissemination: an external media campaign and internal interpersonal communication. The rate of change in the number of supporters of an idea depends on both external and internal recruitment rates. The equations describe the number of supporters who receive new information over time while assuming constant population size [2].

This study presents several innovative contributions, introducing a multi-dimensional model of information warfare that considers the impact of random factors, thus enhancing the understanding of information conflict dynamics.

Additionally, a software decision support system was created using the analyzed stochastic system. This system allows for the real-time development, analysis, and management of various information scenarios, providing decision-makers with valuable insights to formulate effective response strategies.

We extend the approach to building an information warfare model proposed in [1] to the multidimensional case:

$$dN^\varepsilon(t) = C(N^\varepsilon(t), x(t / \varepsilon^2))dt + d\eta^\varepsilon(t)$$

where:

$$C\left(N^\varepsilon(t), x(t / \varepsilon^2)\right) = \begin{pmatrix} -\alpha_1(x) + \beta_1(x)N_0 - \beta_1(x)N_1^\varepsilon(t) & -\alpha_1(x) - \beta_1(x)N_1^\varepsilon(t) \\ -\alpha_2(x) - \beta_2(x)N_2^\varepsilon(t) & -\alpha_2(x) + \beta_2(x)N_0 - \beta_2(x)N_2^\varepsilon(t) \\ \dots & \dots \\ -\alpha_n(x) - \beta_n(x)N_n^\varepsilon(t) & -\alpha_n(x) - \beta_n(x)N_n^\varepsilon(t) \end{pmatrix}$$



$$\begin{pmatrix} -\alpha_1(x) - \beta_1(x)N_1^\varepsilon(t) & -\alpha_1(x) - \beta_1(x)N_1^\varepsilon(t) \\ -\alpha_2(x) - \beta_2(x)N_2^\varepsilon(t) & -\alpha_2(x) - \beta_2(x)N_2^\varepsilon(t) \\ \dots & \dots \\ -\alpha_n(x) - \beta_n(x)N_n^\varepsilon(t) - \alpha_n(x) + \beta_n(x)N_0 - \beta_n(x)N_n^\varepsilon(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1^\varepsilon(t) \\ N_2^\varepsilon(t) \\ \dots \\ N_n^\varepsilon(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_1 N_0 \\ a_2 N_0 \\ \dots \\ a_n N_0 \end{pmatrix}$$

where:  $N^\varepsilon(t)$  is an n-dimensional vector consisting of various solutions exists. Its components are represented by the numbers of supporters of different ideas.  $x(t/\varepsilon^2)$  a Markov process that is uniformly ergodic is utilized to represent the effect of the environment on the intensity of information dissemination. This indicates that during the period between the Markov process's resumption moments,  $\alpha_1(x), \alpha_2(x), \dots, \alpha_n(x), \beta_1(x), \beta_2(x), \dots, \beta_n(x)$  values remain constant, like the classical model, but at the resumption moments, the values change instantly. This models spontaneous events that occur independently of society and significantly influence people's perspectives.

The study proposes a multidimensional model surpassing the classical approach in generality and accuracy. It also explicitly constructs the limit generators of the impulse process and the dynamical system, facilitating a deeper understanding of the model's behavior [4]. Additionally, a developed software solution streamlines calculations, enhancing the model's practical applicability.

### References:

1. Mikhailov A. P., Marevtseva N. A. Models of information warfare. *Math. Models Comput. Simul.* 2012. Vol. 4. P. 251-259.
2. Tufto J. Effects of releasing maladapted individuals: a demographic evolutionary model. *Am. Nat.* 2001. Vol. 158. P. 331-340.
3. Lotka A. J. Relation between birth rates and death rates. *Science.* 1907. Vol. 26. P. 21-22.
4. Nikitin A. et al. Multidimensional Model of Information Struggle with Impulse Perturbation in Terms of Levy Approximation. *Mathematics.* 2024. Vol. 12. № 8. P. 1263. DOI: 10.3390/math12081263.

**V. Palahin**, Dr.Sc., Professor,

**O. Palahina**, PhD,

**O. Ivchenko**, PhD,

**D. Smirnov**,

**O. Zorin**

Cherkasy State Technological University, Cherkasy

## **POLYNOMIAL METHODS AND ALGORITHMS FOR SIGNALS DETECTION AND DISTINCTION IN NON-GAUSSIAN NOISE**

Advanced control, monitoring, and diagnostic systems are characterized by demanding requirements for data quality processing, heightened complexity, and increased functionality. Considering these factors, the development of effective signal detection and distinction systems becomes essential. In general, these systems process random disturbances that occur in various communication channels during signal transmission. Traditionally, the synthesis of systems for signal detection and distinction has relied on classical methods from the theory of statistical hypothesis testing. This theory generally does not impose limitations on the type of density distribution of random variables [1]. However, in practice, the widespread use of the standard normal distribution for random variables often fails to accurately represent real processes.

Classical methods in statistical hypothesis testing are significantly limited in their processing of non-Gaussian signals and are associated with complex algorithmic implementation and increased computational resources [1].

Another method for characterizing the statistical properties of non-Gaussian processes involves the use of higher-order statistics (HOS). This method provides a partial description of random processes through moment and cumulant (semivariant) functions. These functions allow for the reasonably accurate description of the statistical properties of non-Gaussian processes [2].

The main objective of this paper is to synthesize and analyze the new methods and algorithms for signal detection and distinction in non-Gaussian noise. This is achieved by using moment and cumulant descriptions of random variables, and polynomial decision rules that are optimized based on the moment quality criterion for statistical hypothesis testing.

Consider the random signals  $\xi_i(t)$  for  $i$  ranging from 1 to  $N$ , observed within the time interval  $[0, T]$ . We want to develop algorithms for signal detection and distinction in non-Gaussian noise. If the sampled sig-

nal is  $\xi(t)$ , it takes on discrete independent values  $\mathbf{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  at time  $t_v$  under hypothesis  $H_i$ :

$$H_i: \xi_{iv} = s_{iv}(\alpha_{ik}) + \eta_i(\gamma_{ik}),$$

$$H_0: \xi_{0v} = \eta_i(\gamma_{ik}), \quad v = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, \mu}, \quad i = \overline{1, N-1},$$

where  $s_{iv}(\alpha_{ik})$  –  $i$ -signals with known parameters  $\alpha_{ik}$ ,  $\eta_i(\gamma_{ik})$  – non-Gaussian random variable with known parameters in form of cumulants  $\gamma_k$ .

Let us examine the problem of signal distinction using a new approach, assuming a simple loss matrix and equally probable hypotheses. The likelihood ratio for statistical hypothesis testing between  $H_g$  and  $H_r$  for independent random samples  $x_v$  will be represented as a power stochastic polynomial, where unknown optimal coefficients are determined by minimizing the new «Moment Quality Criterion of Probability Upper Bound Errors» for hypothesis testing [3].

Based on the proposed approach, linear and nonlinear decision rules were obtained for various polynomial powers. Note that linear decision rules do not taking into account the non-Gaussian distribution of random variables that are processed by the proposed algorithm. This is explained by the fact that to describe random variables, only the first two initial moments are used, which characterize the mathematical expectation and dispersion of random variables. However, such linear decision rules completely coincide with the rules that are obtained from the likelihood ratio for a Gaussian model of random variables.

Nonlinear processing of sample values and taking into account of higher-order statistics of the non-Gaussian processes lead to enhanced performance in signal detection and distinction systems compared to conventional approaches for Gaussian processes. In this case, four initial moments are used to describe random variables, which additionally characterize the properties of asymmetry and kurtosis of random processes. With such a description of random variables, the process can be non-Gaussian.

As studies have shown, a new approach to the description of random variables and the synthesis of decision rules makes it possible to increase the accuracy of signal processing compared to the well-known results for widely used Gaussian models of random processes.

## References

1. Kassam S. Signal Detection in Non-Gaussian Noise. New York: Springer Verlag, 2011.
2. Kunchenko Y. Polynomial Parameter Estimations of Close to Gaussian Random Variables. Aachen: Shaker Verlag, 2002.

3. Smirnov D., Palahina E., Palahin V. Mathematical Modeling of Signal Detection in Non-Gaussian Correlated Noise. *International Conference on Smart Technologies in Urban Engineering – Proceedings of STUE-2022, Lecture Notes in Networks and Systems – LNNS*. 2022. Vol. 536. P. 65-74.

**С. М. Бак**, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
**Г. М. Ковтонюк**, канд. пед. наук

Вінницький державний педагогічний університет  
імені Михайла Коцюбинського, м. Вінниця

### **ПРО ІСНУВАННЯ БІЖУЧИХ ХВИЛЬ В СИСТЕМАХ ТИПУ ФЕРМІ-ПАСТИ-УЛАМА З НЕЛОКАЛЬНОЮ ВЗАЄМОДІЄЮ НА ДВОВИМІРНІЙ ҐРАТЦІ**

Розглядається система типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією на двовимірній ґратці. Нехай  $q_{n,m}(t)$  – координата  $(n, m)$ -ї частинки в момент часу  $t$ . Передбачається, що кожна частинка нелінійно взаємодіє з  $l$  своїми найближчими сусідами по горизонталі і по вертикалі з обох боків. Тоді рівняння руху системи, що розглядається, мають вигляд

$$\ddot{q}_{n,m} = \sum_{j=1}^l \left[ W'_{1j}(q_{n+j,m} - q_{n,m}) - W'_{1j}(q_{n,m} - q_{n-j,m}) + \right. \\ \left. + W'_{2j}(q_{n,m+j} - q_{n,m}) - W'_{2j}(q_{n,m} - q_{n,m-j}) \right], (n, m) \in \mathbb{Z}^2. \quad (1)$$

В статтях [2-7; 10; 6; 10] вивчались біжучі хвилі в системах осциляторів, а в [1; 8; 9; 11-16] – в системах типу Фермі-Пасти-Улама.

Значимо, що біжуча хвиля у цьому випадку має вигляд  $q_{n,m}(t) = u(n \cos \varphi + m \sin \varphi - ct)$ . За допомогою варіаційного підходу одержано умови існування періодичних і відокремлених біжучих хвиль для системи (1).

#### **Список використаних джерел:**

1. Бак С. М. Існування періодичних біжучих хвиль в системі Фермі-Пасти-Улама на двовимірній ґратці. *Математичні студії*. 2012. Т. 37. № 1. С. 76-88.
2. Бак С. М. Існування дозвуків періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. 2014. Вип. 10. С. 17-23.
3. Бак С. М. Існування надзвуків періодичних біжучих хвиль в системі нелінійно зв'язаних нелінійних осциляторів на двовимірній ґратці. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. 2015. Вип. 12. С. 5-12.

4. Бак С. М. Існування надзвукових періодичних біжучих хвилі в дискретних рівняннях типу Клейна-Гордона з нелокальною взаємодією. *Математика, інформатика, фізика: наука та освіта*. 2024. Т. 1. С. 3-14.
5. Bak S. M. Existence of heteroclinic traveling waves in a system of oscillators on a two-dimensional lattice. *Journal of Mathematical Sciences*. 2016. Vol. 217. № 2. P. 187-197.
6. Bak S. M. Existence of solitary traveling waves in a system of nonlinearly coupled oscillators on the 2D lattice. *Ukrainian mathematical Journal*. 2017. Vol. 4 (69). P. 509-520.
7. Bak S. Periodic traveling waves in a system of nonlinearly coupled nonlinear oscillators on a two-dimensional lattice. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*. 2022. Vol. 91. № 3. P. 225-234.
8. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of solitary traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam system on 2D lattice. *Matematychni Studii*. 2018. Vol. 50. № 1. P. 75-87.
9. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Existence of traveling solitary waves in Fermi-Pasta-Ulam type systems on 2D-lattice with saturable nonlinearities. *Journal of Mathematical Sciences*. 2023. Vol. 270. № 3. P. 397-406.
10. Bak S. Periodic traveling waves in the system of linearly coupled nonlinear oscillators on 2D lattice. *Archivum Mathematicum*. 2022. Vol. 58. № 1. P. 1-13.
11. Bak S. M., Kovtonyuk G.M. Periodic traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Matematychni Studii*. 2023. Vol. 60. № 2. P. 180-190.
12. Bak S. M., Kovtonyuk G. M. Solitary traveling waves in Ferm-Pasta-Ulam type systems with nonlocal interaction on 2D-lattice. *Український математичний вісник*. 2024. Т. 21. № 1. С. 1-15.
13. Friesecke G., Matthies K. Geometric solitary waves in a 2D math-spring lattice. *Discrete and continuous dynamical systems*. 2003. Vol. 3. № 1. P. 105-114.
14. Pankov A. *Traveling Waves and Periodic Oscillations in Fermi-Pasta-Ulam Lattices*. London; Singapore: Imperial College Press, 2005. 196 p.
15. Pankov A. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam chains with nonlocal interaction. *Discrete Contin. Dyn. Syst.* 2019. Vol. 12. № 7. P. 2097-2113.
16. Pankov A., Rothos V. Traveling waves in Fermi-Pasta-Ulam lattices with saturable nonlinearities. *Discr. Cont. Dyn. Syst.* 2011. Vol. 30. № 3. P. 835-840.

**С. В. Барановський**, канд. техн. наук,  
**А. Я. Бомба**, д-р техн. наук, професор

\*Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **МОДИФІКАЦІЯ МОДЕЛІ ВІРУСНОЇ ІНФЕКЦІЇ ДЛЯ УРАХУВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ЗБУРЕНЬ, КОНКУРЕНТНОЇ АДСОРБЦІЇ В УМОВАХ ТЕМПЕРАТУРНОЇ РЕАКЦІЇ ОРГАНІЗМУ**

Одним із важливих аспектів розробки раціональних програм лікування є створення інструментарію математичного моделювання для прогнозування динаміки інфекційних захворювань з урахуванням просторових ефектів, зосереджених впливів, різних механізмів захисту організму в умовах застосування різного роду терапевтичних методів лікування. Важливим компонентом комплексних методів лікування широкого спектру інфекційних захворювань є застосування адсорбційних препаратів, які поряд з детоксикацією організму здатні забезпечити додатковий механізм нейтралізації вірусних елементів [1]. У [2] представлено узагальнення моделі противірусної імунної відповіді щодо комплексного урахування зосереджених впливів та умов дифузійних збурень, температурної реакції організму і логістичної динаміки антигенів. У [3] представлена модифікація базової моделі інфекційного захворювання, яка забезпечує прогнозування динаміки захворювання з урахуванням адсорбції антигенів в умовах дифузійних збурень та зосереджених впливів імунологічних засобів. Зазначимо, що значна частина адсорбентів не є специфічними до конкретних типів патогенних елементів та зв'язують і виводять різні типи елементів, які проникають у їх пори. Тобто в таких випадках матиме місце конкурентна адсорбція [4], особливості якої важливо враховувати при прогнозуванні впливу відповідної терапії. Для прогнозування динаміки вірусної інфекції з урахуванням конкурентної адсорбції в умовах дифузійних збурень та температурної реакції опишемо в області  $G = \{(x, r, t) : -\infty < x < +\infty, 0 < r < R, t > 0\}$  такою сингулярно-збуреною системою диференціальних рівнянь:

$$\begin{aligned}
 V_t' &= \omega^V + \beta(\theta)V - \gamma FV + \varepsilon D^V V_{xx}'' - u^* \cdot \varepsilon^2 D_*^W (W_r') \Big|_{r=R}, \\
 W_t' &= u^* \cdot \varepsilon^2 D^W (W_{rr}'' + 2/r \cdot W_r'), \\
 C_t' &= \xi(m) \cdot \alpha(\theta) \cdot F(t - \tau) \cdot V(t - \tau) - \mu_C (C - C^*) + \varepsilon^2 D^C C_{xx}'', \\
 F_t' &= \omega^F + \rho C - (\mu_f + \eta \gamma V) \cdot F + \varepsilon D^F F_{xx}'' - u^* \cdot \varepsilon^2 D_*^P (P_r') \Big|_{r=R}, \\
 P_t' &= u^* \cdot \varepsilon^2 D^P (P_{rr}'' + 2/r \cdot P_r'), \quad m_t' = \sigma \cdot V - \mu_m m + \varepsilon^2 D^m m_{xx}'', \\
 \theta_t' &= \alpha_\theta V F - \mu_\theta (\theta - \theta^*) + \varepsilon D^\theta \theta_{xx}''.
 \end{aligned} \tag{1}$$

за умов

$$\begin{aligned} C(x, 0) &= C^0(x), \quad m(x, 0) = m^0(x), \quad \theta(x, 0) = \theta^0(x), \quad V(x, \tilde{t}) = V^0(x, \tilde{t}), \\ F(x, \tilde{t}) &= F^0(x, \tilde{t}), \quad -\tau \leq \tilde{t} \leq 0, \quad W(x, r, 0) = 0, \quad P(x, r, 0) = 0, \\ W'_r(x, 0, t) &= 0, \quad W(x, R, t) = \kappa_V \cdot V(x, t) / (1 + \kappa_V \cdot V(x, t) + \kappa_F \cdot F(x, t)), \\ P'_r(x, 0, t) &= 0, \quad P(x, R, t) = \kappa_F \cdot F(x, t) / (1 + \kappa_V \cdot V(x, t) + \kappa_F \cdot F(x, t)), \end{aligned} \quad (2)$$

де  $V(x, t)$ ,  $F(x, t)$ ,  $C(x, t)$ ,  $m(x, t)$ ,  $\theta(x, t)$  – відповідно концентрації антигенів, специфічних їм антитіл, імунологічних клітин, значення відносної характеристики ураження органу-мішені та температура в міжклітинному середовищі,  $W(x, r, t)$ ,  $P(x, r, t)$  – концентрації антигенів та специфічних їм імунних агентів у мезопорах частинок адсорбенту (представимо їх кульками малого радіуса  $R$ );  $\beta(\theta)$ ,  $\alpha(\theta)$ ,  $\gamma$ ,  $\mu_C$ ,  $C^*$ ,  $\rho$ ,  $\mu_f$ ,  $\eta$ ,  $\sigma$ ,  $\mu_m$ ,  $\theta^*(x)$ ,  $\mu_\theta$ ,  $\xi(m)$ ,  $\varepsilon D^V$ ,  $\varepsilon D^F$ ,  $\varepsilon^2 D^C$ ,  $\varepsilon^2 D^m$ ,  $\varepsilon D^\theta$  – визначені аналогічно до [4] параметри моделі;  $\varepsilon^2 D_*^W$ ,  $\varepsilon^2 D_*^P$  – коефіцієнти, що характеризують вплив дифузійного перерозподілу антигенів та антитіл у мезопорах частинок адсорбенту на їх дифузійне розсіювання у міжклітинному середовищі організму;  $\kappa_V$ ,  $\kappa_F$  – константи адсорбційної рівноваги відповідно антигенів та імунних агентів [3];  $\omega^V(x, t)$ ,  $\omega^F(x, t)$  – функції, що описують зосереджені зміни відповідних чинників [2, 3], а функція  $u^*(t)$  забезпечує «запуск» процесу адсорбції у визначені моменти часу.

Потрібно зазначити, що урахування здатності неспецифічних адсорбентів до поглинання та виведення з організму як антигенів, так і імунних агентів призводить до певного прогнозного зниження ефективності застосування відповідної терапії.

### Список використаних джерел:

1. Сорбенты и их клиническое применение / под ред. К. Джиордано. Киев: Вища шк., 1989. 400 с.
2. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya., Lyashko S.I. Generalization of the antiviral immune response model for complex consideration of diffusion perturbations, body temperature response, and logistic antigen population dynamics. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2022. Vol. 58. № 4. P. 576-592.
3. Baranovsky S. V., Bomba A. Ya. Generalizing the infectious disease model to account for sorption therapy in conditions of diffusion disorders. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59. № 4. P. 601-611.
4. Petryk M., Ivanchov M., Leclerc S., Canet D., Fraissard J. Competitive adsorption and diffusion of gases in a microporous solid. *Zeolites*. London: IntecOpen, 2019. P. 1-23.

Я. Й. Бігун\*, д-р фіз.-мат. наук,

Я. А. Квасецький\*\*

\* Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці,

\*\* Компанія «Юкон-софтваре», м. Чернівці

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЇ З ЛІКУВАННЯМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ

Математичному моделюванню поширення епідемії присвячена велика кількість праць [1] та ін. У праці [2] досліджено динаміку поширення епідемії, в якій із природнім рівнем одужання з коефіцієнтом  $\gamma$  враховано також зменшення кількості інфікованих внаслідок лікування з постійною інтенсивністю лікування. У праці [3] розглянуто випадок лінійної залежності. Таку математичну модель доцільно розглядати, коли кількість інфікованих осіб є відносно невеликою. Нехай  $S(t)$  – кількість осіб, схильних до захворювання,  $I(t)$  – інфікованих,  $R(t)$  – тих, хто одужав. У даній роботі розглядається математична модель із врахуванням процесу лікування інфікованих хворих у вигляді лінійної залежності із запізнення  $\tau > 0$  початку лікування вигляду

$$\begin{aligned}\frac{dS}{dt} &= A - \beta SI - \delta S, \\ \frac{dI}{dt} &= \beta SI - (\gamma + \delta)I - h(I_\tau), \\ \frac{dR}{dt} &= \gamma I + h(I) - \delta R,\end{aligned}$$

де  $A$  – коефіцієнт зростання населення,  $\gamma$  – природний рівень одужання інфікованих осіб, а  $\delta$  – смертності,  $h(I_\tau) = \kappa I(t - \tau)$ ,  $\kappa > 0$ ,  $\tau > 0$ . Нехай

$$R_0 = \beta A / (\delta + \gamma + \kappa),$$

це базове репродуктивне число системи (1) при  $\kappa = 0$ . У системі досягається стани рівноваги  $(A / \delta, 0)$  і при  $R_0 > 1$

$$\bar{S} = A / \delta R_0, \bar{I} = \delta(R_0 - 1) / \beta.$$

Перший із станів рівноваги локально асимптотично стійкий, тобто епідемії не відбудеться, якщо  $\text{Re } \mu < 0$  для всіх коренів рівняння

$$\mu + \kappa e^{-\mu\tau} = \frac{A\beta}{\delta} - \gamma - \delta.$$



Проаналізовано біфуркації іншого стану рівноваги, пов'язаного із розвитком епідемії. Із дослідженням моделі випливає що недоцільне використання великої кількості засобів для лікування щоб для повної ліквідації епідемії зникла ендемічна рівновага.

### Список використаних джерел:

1. Martcheva M. An Introduction to Mathematical Epidemiology. *Springer Science*. 2015. 453 p.
2. Wang W., Ma Z. Global dynamics of an epidemic model with time delay. *Non-linear Analysis: Real World Applications*. 2002. № 3. P. 365-373.
3. Wang W., Ruan Sh. Bifurcations in an epidemic model with constant removal rate of the infectives. *J. Math. Anal. Appl.* 2004. № 291. P. 775-793.

**П. С. Малачівський**, д-р техн. наук, професор,  
**Л. С. Мельничок**, канд. техн. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
 ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

### МІНІМАКСНЕ НАБЛИЖЕННЯ ЛОГАРИФМОМ ВІД РАЦІОНАЛЬНОГО ВИРАЗУ

Нехай неперервну на відріжку  $[\alpha, \beta]$  функцію  $f(x)$  необхідно наблизити з абсолютною похибкою виразом

$$L_{k,l}(a, b; x) = \ln(R_{k,l}(a, b; x)), \quad (1)$$

де  $R_{k,l}(a, b; x)$  раціональний вираз

$$R_{k,l}(a, b; x) = \left( \sum_{i=0}^k a_i x^i \right) / \left( 1 + \sum_{i=1}^l b_i x^i \right), \quad (2)$$

а  $a_i, i = \overline{0, k}$ , та  $b_i, i = \overline{1, l}$  – невідомі параметри,  $\{a_i\}_{i=0}^k \in A$ ,  $A \subseteq R^{k+1}$ ,  $\{b_i\}_{i=1}^l \in B$ ,  $R^n$  –  $n$ -вимірний векторний простір.

Вираз  $L_{k,l}(a, b; x)$  називатимемо мінімаксним наближенням функції  $f(x)$  з абсолютною похибкою на відріжку  $[\alpha, \beta]$ , якщо він задовольняє умову

$$\max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| f(x) - L_{k,l}(a^*, b^*; x) \right| = \min_{a \in A, b \in B} \max_{x \in [\alpha, \beta]} \left| f(x) - L_{k,l}(a, b; x) \right|.$$

В загальному випадку побудова мінімаксного наближення нелінійними виразами від поліному й раціонального поліному – це складна задача нелінійної оптимізації [1, 2]. Ми пропонуємо метод побу-

дови мінімаксного наближення логарифмом від раціонального виразу (1), який полягає в використанні проміжного мінімаксного наближення раціональним виразом. Мінімаксне наближення раціональним виразом  $R_{k,l}(a,b;x)$  обчислюємо як граничне середньостепеневе наближення за методом, описаним у праці [3].

Для спрощення викладу раціональний вираз (2) подамо у вигляді

$$R_{k,l}(a,b;x) = a_0 \frac{1 + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i x^i}{1 + \sum_{i=1}^l b_i x^i} = a_0 \bar{R}_{k,l}(\bar{a}, b; x), \quad (3)$$

де

$$\bar{R}_{k,l}(\bar{a}, b; x) = \left( 1 + \sum_{i=1}^k \bar{a}_i x^i \right) / \left( 1 + \sum_{i=1}^l b_i x^i \right). \quad (4)$$

Логарифмічний вираз (1) з використанням подання раціонального виразу у вигляді (3) буде

$$L_{k,l}(a,b;x) = \bar{a}_0 + \ln(\bar{R}_{k,l}(\bar{a}, b; x)), \quad \bar{a}_0 = \ln(a_0). \quad (5)$$

Можливість лінеаризації задачі побудови мінімаксного наближення з абсолютною похибкою логарифмом від раціонального виразу (1) ґрунтується на теоремі.

Теорема. Нехай функція  $f(x)$  неперервна на відрізку  $[\alpha, \beta]$ . Мінімаксне наближення з абсолютною похибкою логарифмом від раціонального виразу (5) функції  $f(x)$  на відрізку  $[\alpha, \beta]$  визначається через мінімаксне наближення з відносною похибкою раціональним виразом (4) функції  $f_e(x) = \exp(f(x))$  на  $[\alpha, \beta]$ . Значення параметрів  $\bar{a}_i, i = \overline{1, k}$  і  $b_i, i = \overline{1, l}$  наближення логарифмічним виразом у вигляді (5) збігаються зі значеннями однойменних параметрів наближення раціональним виразом  $\bar{R}_{k,l}(\bar{a}, b; x)$  (4), а значення параметра  $\bar{a}_0$  обчислюється за формулою

$$\bar{a}_0 = (\mu_{\max} + \mu_{\min}) / 2,$$

де

$$\mu_{\max} = \max_{x \in [\alpha, \beta]} (f(x) - \bar{L}_{k,l}(\bar{a}, b; x)),$$

$$\mu_{\min} = \min_{x \in [\alpha, \beta]} (f(x) - \bar{L}_{k,l}(\bar{a}, b; x)),$$

$$\bar{L}_{k,l}(\bar{a}, b; x) = \ln(\bar{R}_{k,l}(\bar{a}, b; x)).$$

### Список використаних джерел:

1. DeVore R. A., Kunoth A. (eds.). Nonlinear Approximation and Its Applications. In Multiscale. *Nonlinear and Adaptive Approximation*. Berlin; Heidelberg: Springer-Verlag, 2009. P. 169-201. DOI: 10.1007/978-3-642-03413-86.
2. Malachivskyy P. S., Melnychok L. S., Pizyur Y. V. Chebyshev Approximation of Multivariable Functions by the Exponential Expression. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57, N 3. P. 429-435. DOI: 10.1007/s10559-021-00367-5.
3. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Malachivskiy R. P. Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. № 5. P. 811-819. DOI: 10.1007/s10559-020-00302-0.

**В. А. Максимюк\***, д-р фіз.-мат. наук,

**В. С. Ушакова\***, канд. фіз.-мат. наук,

**О. В. Ушаков\*\***

\*Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

\*\*Інститут спеціальної техніки та судових експертиз Служби безпеки України, Київ

### ПРО ВЕРХНЮ ОЦІНКУ НАПРУЖЕНЬ І ДЕФОРМАЦІЙ У ВОДЯНОМУ КУЛЕУЛОВЛЮВАЧІ

Одними з кращих вважаються водяні кулеуловлювачі [1], які власне є металевими трубами, заповненими водою. Вони дозволяють сповільнити кулю зі збереженням слідів відстрілу без пошкодження й деформування. Теоретично вибрати надійні з погляду міцності геометричні (довжина, діаметр, товщина стінки) параметри труби вкрай складно. Проте експериментальний шлях в поєднанні з теоретичною верхньою оцінкою напружень вбачається перспективним.

Для визначення товщі води, яка сповільнює кулю до прийнятної швидкості, було використано наявний в Інституті механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України вертикальний бак висотою 3 м і діаметром 3,2 м з прозорим вікном на середині висоти для спостереження. Відстрілювались кулі калібром 9 мм та 7,62 мм. Фільмуванням, візуальними спостереженнями за швидкістю кулі через вікно та оглядом витягнутої кулі було встановлено, що на глибині 2 м куля сповільнюється до прийнятної швидкості що узгоджується з результатами [1].

Визначити необхідну товщину стінки та діаметр циліндричного гідрокулеуловлювача можна додатковими експериментами шляхом вимірювання максимальних динамічних деформацій за допомогою наклеєних на макет тензодатчиків. Такі експерименти досліди передбачається виконати в Інституті механіки з використанням 8-канального реєстратора вібраційних, акустичних і тензосигналів LMS SCADAS Mobile (Бельгія).

Для виготовлення надійного макета кулеуловлювача необхідно дати верхню оцінку максимальних напружень і деформацій залежно від геометричних і механічних параметрів та кінетичної енергії кулі.

Вважатимемо, що після пострілу кінетична енергія сповільнюваної кулі переходить переважно в потенціальну енергію деформації труби, а тиск на її стінки не змінюється з висотою. Трубу будемо розглядати як пружну тонку циліндричну оболонку.

Тоді прирівнявши кінетичну енергію кулі до потенціальної енергії деформації циліндричної оболонки (рис. 1), матимемо:

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{Spw}{2}, \quad (1)$$

де  $m$  і  $v$  – маса і швидкість кулі;  $S = 2\pi Rl$  – площа бічної поверхні циліндра;  $l$ ,  $R$  і  $h$  – його висота, радіус і товщина стінок;  $p$  – тиск на стінки кулеуловлювача,  $w$  – прогин.

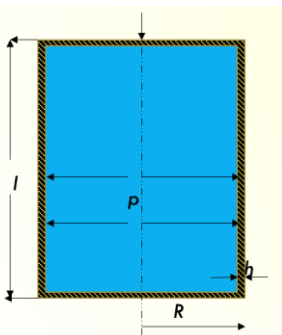


Рис. 1. Схема водяного кулеуловлювача

Під дією тиску  $p$  в оболонці з модулем пружності  $E$  виникнуть колові напруження  $\sigma = pR/h$  і деформації  $\varepsilon = \sigma/E$ . Підставивши

прогин  $w = \varepsilon R = \frac{\sigma R}{E} = \frac{pR^2}{Eh}$  і площу  $S$  в (1), отримаємо:

$$mv^2 = \frac{2\pi p^2 R^3}{Eh}. \quad (2)$$

З рівняння (2) послідовно отримуємо формули для тиску, напружень і деформацій:

$$p = \frac{v}{R} \sqrt{\frac{mEh}{2\pi lR}}, \quad \sigma = v \sqrt{\frac{mE}{2\pi lRh}}, \quad \varepsilon = v \sqrt{\frac{m}{2\pi ElRh}}. \quad (3)$$

З формул (3) випливає, що напруження і деформації пропорційні швидкості кулі і обернено пропорційні кореню з геометричних розмірів кулеуловлювача.

### Список використаних джерел:

1. Ганзюк А. Л., Кравчук О. В., Гордєєв А. І. Особливості будови, розрахунку та експлуатації гідрокулеулловлявачів. *Криміналістичний вісник*. 2023. Вип. 40 (2). С. 7-15.

**Ю. П. Глухов**, канд. фіз.-мат. наук

Інститут механіки ім. С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

### **ЗАХИЩЕНИЙ ПРУЖНИМ ШАРОМ СТИСЛИВИЙ ПОПЕРЕДНЬО НАПРУЖЕНИЙ ПІВПРОСТІР ПРИ РУХОМОМУ НАВАНТАЖЕННІ**

В роботі розглянута плоска динамічна задача про вплив рухомого поверхневого навантаження на стисливий попередньо напружений півпростір з неоднорідністю у вигляді тонкого поверхневого шару. Шар товщиною  $h$  моделюється зосередженими масами з густиною  $\rho_1$ . Розв'язок задачі отриманий із застосуванням методу інтегральних перетворень Фур'є в рамках лінеаризованої теорії пружності для тіл з початковими напруженнями. Досліджено вплив рухомого навантаження, початкових напружень, умов контакту, механічних параметрів елементів шаруватої основи на основні характеристики її напружено-деформованого стану.

Як приклад розглянемо півпростір з пружним потенціалом гармонічного типу [1]. Припустимо, що початковий деформований стан плоский і поверхневе навантаження відсутнє.

Проаналізуємо, як початкові напруження в основі впливають на характеристики напружено-деформованого стану при різних швидкостях навантаження і умовах контакту захисного шару і півпростору.

Для півпростору із стисливого матеріалу з гармонічним потенціалом обчислення проводилися при дозвуккових  $v < c_{12}$ , трансзвукових  $c_{12} < v < c_{11}$  і надзвукових  $v > c_{11}$  швидкостях руху навантаження. Тут через  $c_{11}$  і  $c_{12}$  позначені швидкості поширення в напрямку осі  $Oy_1$  відповідно повздовжніх і поперечних поляризованих хвиль в необмеженому тілі з початковими напруженнями [2].

На рис. 1 – 3 показаний розподіл узагальненого напруження  $\tilde{Q}_{22}$  при  $y_2 = -2h/\lambda_2$  для різних умов контакту захисного шару та півпростору (а – нежорсткий контакт, б – жорсткий контакт) і різних швидкостей руху поверхневого навантаження.

На приведених графіках аналізуються точки півпростору, які збігаються в природному стані. Криві 1, 2, і 3 на рис. 1-3 відповідають значенням початкового видовження  $\lambda_1 = 0,9$ ,  $\lambda_1 = 1$  і  $\lambda_1 = 1,1$ .

У випадку, коли  $v < c_{12}$ , були досліджені тільки докритичні швидкості навантаження [2] (рис. 1). Епюри на рис. 1 відповідають значенням  $\rho/\rho_1 = 0,5$ ;  $v^2 = 0,2c_s^2$ . Тут  $c_0^2 = \mu/\rho$ ,  $\rho$  – густина матеріалу півпростору в природному стані.

Для таких дозвукових швидкостей навантаження графіки величин, що характеризують напружено-деформований стан, симетричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

Аналіз отриманих числових результатів для дозвукових швидкостей руху навантаження дозволяє зробити наступні висновки.

Значення параметрів, що характеризують напружено-деформований стан основи і їх залежність від початкових напружень, визначаються координатами даної точки.

Найбільше початкові напруження впливають на напружено-деформований стан основи в зоні прикладення поверхневого навантаження.

Існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

При заданих  $\lambda_1$  значення величин, що характеризують напружено-деформований стан основи, при стискуванні більше, ніж при розтягуванні.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження напруження і швидкості переміщення зменшуються (рис. 1).

Напруження і швидкості переміщення також зменшуються у випадку більш жорсткого поверхневого шару.

Зі збільшенням швидкості руху навантаження в дозвуковій області характер впливу початкових напружень майже не змінюється.

Значення величин, що характеризують напружено-деформований стан півпростору при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому контакті.

При жорсткому контакті вплив швидкості і початкових напружень менший, ніж при нежорсткому контакті.

На рис. 2 показана зміна узагальненого напруження  $\tilde{Q}_{22}$  у випадку, коли  $c_{12} < v < c_{11}$ . Швидкість навантаження становила  $v^2 = 2c_0^2$ . Для трансзвукової швидкості навантаження епюри величин, що досліджуються, асиметричні по відношенню до точки прикладання навантаження.

Аналіз отриманих результатів показує, що наявність початкових напружень впливає на розподіл напружень і швидкостей переміщень в півпросторі. Цей вплив різний в залежності від положення даної точки півпростору щодо точки прикладання навантаження.

Значення напружень та швидкостей переміщень, як і у випадку  $v < c_{12}$ , при нежорсткому контакті більше, ніж при жорсткому конта-

кті, але при жорсткому контакті існує значна залежність цих параметрів від початкових напружень.

Так само, як і в випадку, коли  $v < c_{12}$ , існують області півпростору, в яких значення напружень і швидкостей переміщень мало залежать від початкових деформацій.

На рис. 3 показані результати для складової напруження  $\tilde{Q}_{22}$  при швидкості навантаження  $v^2 = 6c_s^2$  (надзвукова швидкість  $v > c_{11}$ ). Видно, що зі збільшенням швидкості симетрія все більше порушується, а пряма хвиля загасає набагато швидше. При цьому вона не зникає повністю. Пов'язано це, мабуть, з шаруватістю середовища. Слід зазначити, що якісно подібна картина спостерігалася і в роботі [2].

Залежність параметрів напружено-деформованого стану від початкових напружень і умов контакту має такий же якісний характер, як і у випадку, коли  $c_{12} < v < c_{11}$ .

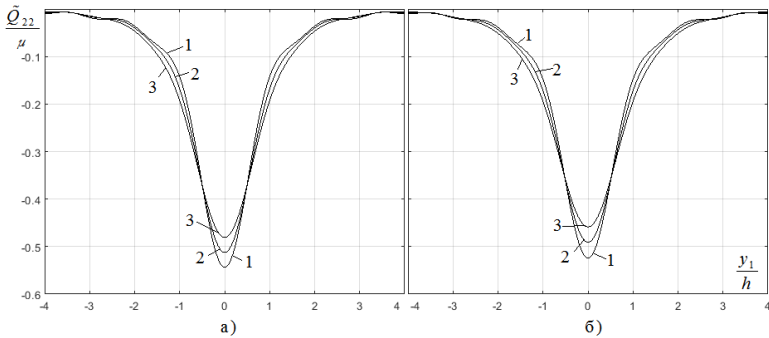


Рис. 1. Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$  при  $v^2 = 0, 2c_s^2$

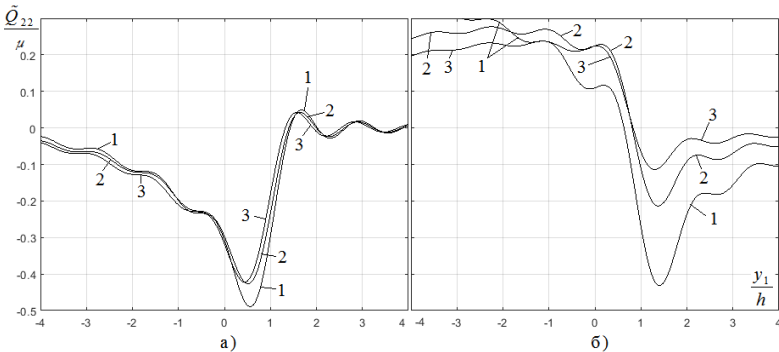


Рис. 2. Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$  при  $v^2 = 2c_0^2$

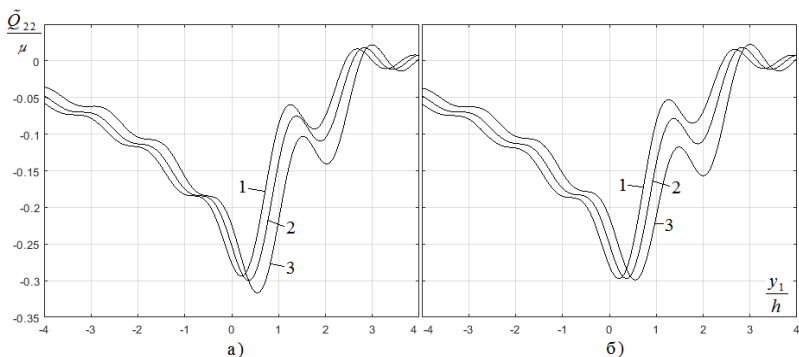


Рис. 3. Узагальнене напруження  $\tilde{Q}_{22}$  при  $v^2 = 6c_s^2$

### Список використаних джерел:

1. Гузь А. Н. Упругие волны в телах с начальными (остаточными) напряжениями. Киев: А.С.К., 2004. 672 с.
2. Гузь А. Н., Бабич С. Ю., Глухов Ю. П. Смешанные задачи для упругого основания с начальными напряжениями. Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2015. 468 с.

**А. П. Громик\***, канд. техн. наук,

**І. М. Конет\*\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**Т. М. Пилипюк\*\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Заклад вищої освіти «Подільський державний університет»,

м. Кам'янець-Подільський

\*\*Волинський національний університет

імені Лесі Українки, м. Луцьк

\*\*\*Кам'янець-Подільський національний університет

імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### ПАРАБОЛІЧНІ КРАЙОВІ ЗАДАЧІ МАТЕМАТИЧНОЇ ФІЗИКИ В НАПІВОБМЕЖЕНОМУ КУСКОВО-ОДНОРІДНОМУ КЛИНОВИДНОМУ ПОРОЖНИСТОМУ ЦИЛІНДРІ

Розглядається задача побудови обмеженого на множині

$$D = \{(t, r, \varphi, z) : t > 0; r \in I_n^+ = \bigcup_{j=1}^{n+1} (R_{j-1}; R_j), R_0 > 0, R_{n+1} \equiv R < +\infty;$$

$$\varphi \in (0; \varphi_0), 0 < \varphi_0 < 2\pi; z \in (0; +\infty)\}$$

класичного розв'язку лінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними параболічного типу 2-го порядку [1]



$$\frac{\partial u_j}{\partial t} - \left[ a_{rj}^2 \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{a_{\varphi j}^2}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + a_{zj}^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right] u_j + \chi_j^2 u_j = f_j(t, r, \varphi, z); \quad r \in I_j = (R_{j-1}; R_j) \quad j = \overline{1, n+1}$$

з початково-крайовими умовами

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{t=0} = g_j(r, \varphi, z); \quad r \in I_j; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\left( -\frac{\partial}{\partial z} + h \right) u_j \Big|_{z=0} = \omega_j(t, r, \varphi); \quad \frac{\partial^s u_j}{\partial z^s} \Big|_{z=+\infty} = 0; \quad s = 0, 1; \quad j = \overline{1, n+1},$$

$$\left( \alpha_{11}^0 \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{11}^0 \right) u_1 \Big|_{r=R_0} = g_0(t, \varphi, z); \quad \left( \alpha_{22}^{n+1} \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{22}^{n+1} \right) u_{n+1} \Big|_{r=R} = g(t, \varphi, z),$$

$$u_j(t, r, \varphi, z)|_{\varphi=0} = g_{1j}(t, r, z); \quad u_j(t, r, \varphi, z)|_{\varphi=\varphi_0} = \omega_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1},$$

та умовами спряження

$$\left[ \left( \alpha_{j1}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j1}^k \right) u_k - \left( \alpha_{j2}^k \frac{\partial}{\partial r} + \beta_{j2}^k \right) u_{k+1} \right] \Big|_{r=R_k} = 0; \quad j = 1, 2; \quad k = \overline{1, n},$$

де  $a_{rj}, a_{\varphi j}, a_{zj}, \chi_j, h, \alpha_{11}^0, \beta_{11}^0, \alpha_{22}^{n+1}, \beta_{22}^{n+1}$  – деякі сталі;

$$h \geq 0; \alpha_{11}^0 \leq 0, \beta_{11}^0 \geq 0; |\alpha_{11}^0| + \beta_{11}^0 \neq 0; \alpha_{22}^{n+1} \geq 0, \beta_{22}^{n+1} \geq 0;$$

$$\alpha_{22}^{n+1} + \beta_{22}^{n+1} \neq 0; \quad c_{jk} = \alpha_{2j}^k \beta_{1j}^k - \alpha_{1j}^k \beta_{2j}^k \neq 0; \quad c_{1k} \cdot c_{2k} > 0;$$

$$f(t, r, \varphi, z) = (f_1(t, r, \varphi, z), f_2(t, r, \varphi, z), \dots, f_{n+1}(t, r, \varphi, z));$$

$$g(r, \varphi, z) = (g_1(r, \varphi, z), g_2(r, \varphi, z), \dots, g_{n+1}(r, \varphi, z));$$

$$\omega(t, r, \varphi) = (\omega_1(t, r, \varphi), \omega_2(t, r, \varphi), \dots, \omega_{n+1}(t, r, \varphi));$$

$$g_0(t, \varphi, z), g(t, \varphi, z), g_{1j}(t, r, z), \omega_{1j}(t, r, z); \quad j = \overline{1, n+1}$$

– задані дійсні обмежені неперервні функції;

$$u(t, r, \varphi, z) = (u_1(t, r, \varphi, z), u_2(t, r, \varphi, z), \dots, u_{n+1}(t, r, \varphi, z))$$

– шукана дійсна неперервно-диференційована за змінною  $t$  і двічі неперервно диференційована за геометричними змінними  $(r, \varphi, z)$  функція.

Зауважимо, що при відповідних обмеженнях на коефіцієнти розглянутої задачі можна інтерпретувати як математичну модель процесу теплопереносу в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі [2].

Єдиний точний обмежений аналітичний розв'язок задачі одержано методом класичних інтегральних перетворень Фур'є за кутовою та аплікатною змінними та гібридного інтегрального перетворення

типу Ганкеля 2-го роду на кусково-однорідному сегменті  $I_n^+$  за радіальною змінною у поєднанні з методом головних розв'язків (матриць впливу та матриць Гріна).

### Список використаних джерел:

1. Громик А. П., Конет І. М., Пилишок Т. М. Параболічні крайові задачі математичної фізики в кусково-однорідному клиновидному циліндрично-круговому півпросторі. *Нелінійні коливання*. 2024. Т. 27. № 2. С. 168-179.
2. Конет І. М., Ленюк М. П. Стационарні та нестационарні температурні поля в циліндрично-кругових областях. Чернівці: Прут, 2001. 312 с.

**У. В. Гудима**, канд. фіз.-мат. наук,

**В. О. Гнатюк**, канд. фіз.-мат. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

### УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ УЗАГАЛЬНЕНОГО ЧЕБИШОВСЬКОГО ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК ДЕЯКОГО ПОЛІНОРМОВАНОГО ПРОСТОРУ ВІДНОСНО МНОЖИНИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ

Нехай  $X$  – лінійний над полем дійсних чисел простір,  $\|\cdot\|_i$ ,  $i = \overline{1, m}$ , – норми, задані на  $X$ , тобто  $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$  є поліномованим простором (див., наприклад, [1]),  $(a_1, \dots, a_m) \in X^m$ ,  $X^m = X \times \dots \times X$  –  $m$ -арний декартів (прямий) добуток множини  $X$ ,  $V \subset X$ .

Поставимо задачу відшукування величини:

$$\beta_V^*(a_1, \dots, a_m) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x\|_i. \quad (1)$$

Якщо існує елемент  $x^* \in V$ , для якого

$$\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x^*\|_i = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x\|_i = \beta_V^*(a_1, \dots, a_m),$$

то його будемо називати узагальненим чебишовським центром точок  $a_1, \dots, a_m$  поліномованого простору  $(X, \|\cdot\|_i, i = \overline{1, m})$  відносно множини  $V$  цього простору або просто екстремальним елементом для величини (1).

Задачу відшукування величини (1) будемо називати задачею відшукування узагальненого чебишовського центра, про який йшлося вище.

Для  $i \in \{1, \dots, m\}$  позначимо через  $X_i$  лінійний нормований простір  $(X, \|\cdot\|_i)$ , а через  $X_i^*$  – простір, спряжений з  $X_i$ .

**Теорема 1.** Якщо в задачі відшукування величини (1)  $V$  є опуклою множиною, то для цієї задачі має місце таке співвідношення двоїстості

$$\beta_V^*(a_1, \dots, a_m) = \inf_{x \in V} \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x\|_i = \\ = \max \left\{ \sum_{i=1}^m f_i(a_i) - \sup_{x \in V} \left( \sum_{i=1}^m f_i \right)(x) : f_i \in X_i^*, i = \overline{1, m}, \|f_i\|_{X_i^*} \leq 1 \right\},$$

де для  $f_i \in X_i^*$   $\|f_i\|_{X_i^*} = \sup \{ f_i(x) : x \in X, \|x\|_i \leq 1 \}$ ,  $i = \overline{1, m}$ .

Зрозуміло, що коли для  $x^* \in V$   $\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x^*\|_i = 0$ , то  $x^*$  є екстремальним елементом для величини (1) за будь-яких умов.

**Теорема 2.** Нехай в задачі відшукування величини (1)  $V$  є опуклою множиною,  $x^* \in V$ ,  $\max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x^*\|_i > 0$  та

$$I(x^*) = \left\{ i \in \{1, \dots, m\} : \max_{1 \leq i \leq m} \|a_i - x^*\|_i = \|a_i - x^*\|_i \right\}.$$

Для того щоб елемент  $x^*$  був екстремальним для величини (1) в цьому випадку, необхідно і достатньо, щоб існували функціонали  $f_i^* \in X_i^*$ ,  $i \in I(x^*)$ , такі, що:

$$\sum_{i \in I(x^*)} \|f_i^*\|_{X_i^*} = 1; \\ f_i^*(a_i - x^*) = \|f_i^*\|_{X_i^*} \|a_i - x^*\|_i, \quad i \in I(x^*); \\ \max_{x \in V} \left( \sum_{i \in I(x^*)} f_i^* \right)(x) = \left( \sum_{i \in I(x^*)} f_i^* \right)(x^*).$$

**Теорема 3.** Нехай для задачі відшукування величини (1) виконуються умови теореми 2. Для того, щоб елемент  $x^* \in V$  був екстремальним для величини (1), необхідно і достатньо, щоб для кожного  $x \in V$  існували функціонали  $f_i^x \in X_i^*$ ,  $i \in I(x^*)$ , для яких виконуються умови:

- 1)  $\sum_{i \in I(x^*)} \|f_i^x\|_{X_i^*} = 1;$
- 2)  $f_i^x(a_i - x^*) = \|f_i^x\|_{X_i^*} \|a_i - x^*\|_i, \quad i \in I(x^*);$
- 3)  $\left( \sum_{i \in I(x^*)} f_i^x \right)(x - x^*) \leq 0.$

### Список використаних джерел:

1. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в деякому поліномованому просторі. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки*: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип. 23. С. 29-43.

**А. Б. Дорош**, канд. фіз.-мат. наук,

**І. В. Дорош**, аспірант,

**А. С. Перцов**, канд. фіз.-мат. наук.

Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

### МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ НАКОПИЧЕННЯ БІОМАСИ ТА КАРОТИНОЇДІВ У МІКРОВОДОРΟΣЛЯХ

Математичне моделювання динаміки біологічних популяцій активно використовується і має давню історію. Особливості моделювання еколого-біологічних систем обумовлюються їхньою складністю та унікальністю [1].

Для опису динаміки накопичення цільових продуктів та біомаси мікрободоростей існує ряд математичних моделей [2-3]. Кожна з цих моделей є спрощеним відображенням реальної системи і потребує перевірки та калібрування за допомогою експериментальних досліджень, а параметри моделей можуть потребувати коригування для різних видів мікрободоростей та різних умов навколишнього середовища.

На основі експериментальних даних було встановлено доцільність застосування моделі Порта [4] для стимулюючого субстрату, оскільки субстрат стимулює активне накопичення продукту лише до певних значень, а процес інгібування росту біомаси підвищеними концентраціями субстрату можна описати рівнянням Бергтера [5].

Математична модель процесу накопичення каротиноїдів та біомаси при внесенні у середовище попередників їх біосинтезу (активуючий субстрат) у такому випадку складається із системи рівнянь:

$$\begin{aligned} \frac{dC}{dt} &= \frac{\mu_m K_{CS}}{K_S + K_{CS}} CS - \bar{\mu}C, \\ \frac{dP}{dt} &= \frac{q_1 S}{K_S + S} C - kPC, \\ -\frac{dS}{dt} &= \left( \frac{\mu_m}{Y_{CS}} + \frac{q_P}{Y_{PS}} \right) C, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $S$  – концентрація лімітуючого субстрату,  $P$  – концентрація цільового продукту,  $C$  – концентрація біомаси.

Розв'язання системи (1) дасть можливість одержати динаміку всіх основних параметрів даного процесу та визначити початкові значення, за яких досягаються оптимальні значення кінцевого продукту.

Для моделювання динаміки процесів біосинтезу каротиноїдів розроблено прикладну програму мовою Python зі зручним інтерфейсом, що дозволяє простежити зміни динаміки поведінки математичної моделі при зміні будь-якого з параметрів, наприклад, початкової кількості біомаси, субстрату тощо. Слайдери для кожного параметра дають можливість швидко та зручно змінювати їхні значення і спостерігати за впливом на результати.

Результати, отримані при моделюванні процесу накопичення каротиноїдів та біомаси в культурі *D.armatus*, корелюють з експериментальними даними.

Розроблений програмний продукт із графічним інтерфейсом для налаштування параметрів процесу та спостереження за динамікою в реальному часі призначений для користувачів без математичної освіти і має зручні інструменти для аналізу й візуалізації результатів. Він може застосовуватись для лабораторних досліджень з оптимізації умов вирощування мікроорганізмів, а також використовуватись із навчальними цілями для студентів закладів вищої освіти.

### Список використаних джерел:

1. Małkinia J., Zaborowska E. *Mathematical Modelling and Computer Simulation of Activated Sludge Systems*. IWA Publishing Alliance House, 2020. 670 p.
2. Marchenko M. M., Dorosh I. V., Cheban L.M. Induction of carotenogenesis in *Desmodesmus armatus* (Chod.) *Hegew cultivated on the closed waterside from recirculating aquaculture system*. *Biotechnologia Acta*. 2019. Vol. 12 (2). P. 46-55.
3. Sergio S. Jesus, Rubens M. Filh. Modeling Growth of Microalgae *Dunaliella Salina* under Different Nutritional Conditions. *Biochem & Biotech*. 2010. Vol. 4 (6). P. 279-283.
4. Pirt S. J. *Principles of microbe and cell cultivation*. New York: Halsted Press, 1976. 274 p.
5. Forrest-Owen O. *Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study*. University of Chester, United Kingdom, 2016. 124 p.

К. В. Ємець

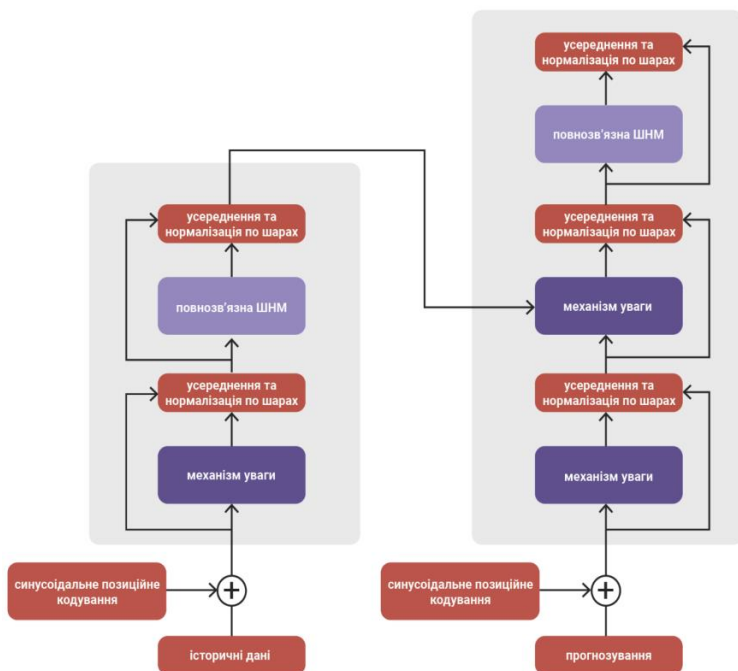
Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## АДАПТАЦІЯ АРХІТЕКТУРИ ТРАНСФОРМЕРІВ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ ЧАСОВИХ РЯДІВ

Поява штучних нейронних мереж (ШНМ) глибокого навчання на основі архітектури трансформерів, відкриває чимало переваг під час розв'язання різноманітних прикладних задач. Базова архітектура ШНМ цього типу призначена для опрацювання природної мови [1]. Проте є чимало інших задач, де ця архітектура може продемонструвати суттєві переваги при її використанні.

**Метою цієї роботи** є адаптація цієї ШНМ для розв'язання задачі прогнозування часових рядів.

Структуру та основні компоненти (кодувальник та декодувальник) адаптованої архітектури трансформерів для розв'язання задачі прогнозування часових рядів подано на рис. 1. Слід зазначити, що нові чи замінені компоненти виділено червоним кольором.



*Рис. 1. Адаптована архітектура трансформера для прогнозування часових рядів*

Серед основних елементів адаптації, які внесено у базову архітектуру трансформерів з [1] слід виділити такі:

- видалення токенизатора який використовується для перетворення вхідних даних у токени;
- видалення шару вкладання для перетворення вищезгаданих токенів у вектори фіксованої розмірності;
- заміна позиційного кодування на синусоїдальне позиційне кодування;
- заміна пакетної нормалізації на нормалізацію по шарам.

Видалення перших двох компонентів, які використовуються для аналізу природної мови, забезпечує спрощення моделі та зменшення її обчислювальної складності.

Використання синусоїдального позиційного кодування у адаптованій архітектурі для прогнозування часових рядів відрізняється тим, що не має навчальних параметрів і спеціально розроблене для того, щоб краще відображати характеристики часових послідовностей. Воно природно надає більшу важливість останнім елементам, і дозволяє моделі зберігати порядок даних у часовій послідовності, що є критично важливим під час аналізу часових рядів.

Пакетна нормалізація, яка нормалізує виходи попередніх шарів за допомогою статистики всього пакету, може не бути найкращим вибором для моделей, які працюють з часовими рядами. Через природу нормалізації по пакету, вибір невідповідної сезонності для розміру пакету може значно погіршити результати навчання. Якщо розмір пакету не відповідає сезонним властивостям даних, це може призвести до нестабільності в навчанні і зниження якості моделі.

Використання нормалізація по шарам у адаптованій архітектурі передбачає використання нормалізації виходів виключно на основі моментів розподілу одного шару, що забезпечує більшу стабільність. Вона не залежить від розміру пакету і тому нівелює проблеми, пов'язані з врахуванням можливих сезонної або циклічної компонентів часового ряду.

Усі вищеперераховані зміни дозволяють адаптованій таким чином архітектурі трансформерів бути більш адаптивною під час аналізу різноманітних динамічних властивостей даних, покращуючи загальну точність та ефективність обчислень.

### **Список використаних джерел:**

1. Vaswani A., Shazeer N., Parmar N. and other. Attention is all you need. *NIPS*. 2017. DOI: 10.48550/arXiv.1706.03762.

**В. В. Задорожний,**

**О. А. Смалько,** канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **МОДЕЛЬ КРИПТОБЛОКЧЕЙНУ З ПОСИЛЕНИМ ЗАХИСТОМ КОНФІДЕНЦІЙНОСТІ**

З появою значної кількості цифрових платіжних засобів цілком природно актуальними стають завдання підвищення фінансової безпеки тих, хто є дотичними до них. Одним з важливих фокусів політики безпеки у блокчейн-мережах є способи покращення конфіденційності або приватності. Особливо коли це стосується криптовалют, де персональні (комерційні) дані є цінним активом, а конфіденційність має першорядне значення для захисту як пересічних користувачів блокчейн-гаманців, так і бізнес-організацій, інвесторів, майнерів тощо.

Важливою для захисту є, зокрема, ідентифікаційна інформація користувачів індивідуальних криптовалютних гаманців, яку можуть відстежувати потенційні шахраї; комерційні дані і транзакції бізнес-організацій, що є частинами у промисловому шпигунстві; інформація про інвестиційні стратегії криптоінвесторів, яка може спричинити маніпуляції на ринку; відомості про технічні аспекти обладнання мереж, локаційні та майнінгові дані, викрадення яких зловмисниками може призвести до фінансових втрат, фізичних загроз та різних юридичних проблем.

Вибір методів захисту криптовалютних гаманців залежить від їх типу (гарячі, холодні, кастодіальні, мультипідписні тощо), а також від особливостей використання (індивідуальні користувацькі гаманці, криптогаманці для бізнесу, мультивалютні, онлайн-гаманці, десктопні, мобільні, апаратні). Переважно для всіх типів гаманців важливими є протоколи з нульовим розголошенням (англ. zero-knowledge proofs, ZKP), щоб забезпечувати конфіденційність транзакцій та приватність користувачів. Подібні криптопротоколи допомагають користувачам обмінюватися перевіреною інформацією без розкриття її змісту. Залежно від типу криптогаманця, для реалізації ZKP обираються найбільш оптимальні конструкції доведення достовірності (з використанням евристики Фіата-Шаміра, хеш-дерев, поліноміальних комітментів тощо). Для анонізації транзакцій використовують різні методології мікшування, що ускладнюють відстеження джерела та призначення транзакцій шляхом, наприклад, централізованого об'єднання кількох транзакцій від різних користувачів в одну транзакцію, змішуючи їхні входи та виходи (наприклад, функція CoinJoin), або децентралізованого перемішування адрес, що приймають транзакції від різних користувачів (наприклад, різні варіації протоколу CoinShuffle), а також додаткові серві-



си: обміну монет на анонімні (як у валютах Zcash, NavCoin, PIVX, Firo), приховування сум транзакцій (як у валютах Monero, Dash, Beam, Zcash), об'єднання декількох транзакцій в одну і так зване наскрізне з'єднання, що зменшує обсяг даних блоку за рахунок видалення надлишкової інформації про транзакції (як у валюті Grin).

Щоб гарантувати конфіденційність і не допустити відстеження у транзакціях ланцюжка «адреса гаманця → реальна особа», деякі криптовалютні підтримують механізм стелс-адрес [2]. Він працює так: відправник генерує одноразову адресу для отримувача, використовуючи публічний ключ отримувача та випадкове число. Ця адреса є одноразовою і не може бути пов'язана з публічним ключем отримувача третьою стороною. Відправник та отримувач використовують модифікований протокол Діффі-Хеллмана на еліптичних кривих для генерування спільного секрету, який потім використовується для створення стелс-адреси. Відправник використовує свій приватний ключ і публічний ключ отримувача для обчислення спільного секрету. Отримувач використовує свій приватний ключ та публічний ключ відправника для обчислення того ж спільного секрету, що дозволить йому розпізнати та витратити отримані кошти. Подібні стелс-адреси наразі використовуються у таких криптовалютах, як Monero, Particl, Navcoin тощо.

Анонімність транзакцій у деяких криптовалютах (зокрема, в Monero, Bytecoin, Aeon), також заснована на еліптичних кривих, забезпечує механізм кільцевих підписів, реалізований у протоколі CryptoNote [1], що допомагає користувачу підписати повідомлення від імені групи, не розкриваючи, хто саме з групи є підписантом. При цьому зберігається анонімність підписанта, аутентифікація підпису та незмінність підписаного повідомлення.

З використанням усіх описаних вище технологій розроблено блокчейн-модель, що забезпечує надійний захист конфіденційності користувача індивідуального криптовалютного гаманця.

### Список використаних джерел:

1. CryptoNote Philosophy. CryptoNote Technology. URL: <https://web.archive.org/web/20171124201433/https://cryptonote.org/inside#untraceable-payments> (дата звернення: 7.06.2024)
2. Stoykov P. Stealth Addresses: decrypting blockchain transaction privacy. URL: <https://chainstack.com/stealth-addresses-blockchain-transaction-privacy> (дата звернення: 7.06.2024)

**А. В. Зубілевич**

Національний університет водного господарства  
та природокористування, м. Рівне

## **МАСШТАБУВАННЯ ІНФОРМАЦІЙНО-АНАЛІТИЧНИХ ДОКУМЕНТОБОРОТНИХ СИСТЕМ**

Інформаційно-аналітичні документоборотні системи (ІАДС) стали невід'ємною частиною сучасного бізнесу та управління завдяки їх здатності забезпечувати ефективне управління інформацією, документами та даними. З кожним роком обсяги даних, які створюються і використовуються в організаціях, стрімко збільшуються. Впровадження ІАДС дозволяє не тільки ефективно зберігати ці дані, але й забезпечувати їх швидкий пошук, обробку та аналіз. Це особливо важливо для прийняття обґрунтованих управлінських рішень, які базуються на актуальних та достовірних даних [2, с. 155].

Інформаційно-аналітичні документоборотні системи (ІАДС), за словами О. Б. Гора, відіграють ключову роль в управлінні інформацією в сучасних організаціях [1, с. 25]. Вони забезпечують ефективне зберігання, обробку та аналіз даних, сприяючи прийняттю обґрунтованих рішень [4, с. 46].

Обсяги даних, що обробляються організаціями, постійно зростають завдяки збільшенню кількості цифрових документів, зростанню бізнес-активності та розвитку технологій Інтернету речей (ІоТ). Масштабування ІАДС дозволяє системам впоратися з цими зростаючими обсягами, забезпечуючи швидкий доступ до даних та їх обробку [3, с. 12].

Масштабування дозволяє організаціям використовувати ресурси більш ефективно, знижуючи витрати на обладнання та обслуговування. Хмарні технології, які підтримують динамічне масштабування, дозволяють організаціям платити лише за фактично використані ресурси [5, с. 23].

Дослідження масштабування інформаційно-аналітичних документоборотних систем є важливим завданням для забезпечення їхньої продуктивності, надійності та економічної ефективності. Масштабування дозволяє організаціям впоратися зі зростаючими обсягами даних, підвищити продуктивність, забезпечити відмовостійкість та підтримати інновації. Використання різних підходів до масштабування, таких як горизонтальне та вертикальне масштабування, розподілена архітектура, кешування, оптимізація баз даних та хмарні технології, допомагає організаціям ефективно вирішувати ці завдання та забезпечувати безперебійну роботу своїх ІАДС у сучасному динамічному бізнес-середовищі [7].

Масштабування інформаційно-аналітичних документоборотних систем (ІАДС) є важливим аспектом для забезпечення їхньої продуктивно-

сті, надійності та безперебійної роботи в умовах зростання обсягів даних та кількості користувачів [6, с. 20]. Масштабування передбачає збільшення ресурсів та оптимізацію архітектури системи для обробки збільшених навантажень. Виокремлюють наступні методи масштабування інформаційно-аналітичних документооборотних систем [8]:

Горизонтальне масштабування (scaling out) передбачає додавання нових серверів або вузлів до існуючої системи для розподілу навантаження. Це дозволяє системі обробляти більше запитів одночасно і підвищує її відмовостійкість.

Вертикальне масштабування (scaling up) передбачає збільшення потужності існуючих серверів, таких як додавання більше оперативної пам'яті, процесорів або дискового простору.

Розподілена архітектура передбачає поділ функціональних компонентів системи на окремі модулі або сервіси, які можуть працювати незалежно один від одного на різних серверах.

Кешування передбачає зберігання часто запитуваних даних у високошвидкісній пам'яті для прискорення доступу до них.

Оптимізація баз даних включає в себе різні техніки для підвищення продуктивності та ефективності зберігання даних.

Використання хмарних технологій для масштабування ІАДС дозволяє динамічно збільшувати або зменшувати ресурси відповідно до потреб [6, с. 20].

Балансування навантаження передбачає розподіл запитів між декількома серверами для забезпечення рівномірного навантаження та підвищення продуктивності системи.

Таким чином, масштабування інформаційно-аналітичних документооборотних систем є критичним для забезпечення їхньої продуктивності, надійності та економічної ефективності. Використання різних підходів, таких як горизонтальне та вертикальне масштабування, розподілена архітектура, кешування, оптимізація баз даних, хмарні технології та балансування навантаження, дозволяє організаціям ефективно вирішувати проблеми інформаційно-аналітичних документооборотних систем.

### Список використаних джерел

1. Беляков К. І., Онопрієнко С. Г., Шопіна І. М. Інформаційна культура в Україні: правовий вимір: монографія. Київ, 2018. 168 с.
2. Бойко Н. В. Інформаційно-аналітичні документи в системі службової документації органів місцевого самоврядування України. *Інформація, комунікація та управління знаннями в глобалізованому світі*: матеріали III Міжнародної наукової конференції. м. Київ, 14-16 травня 2020 р. Київ: КНУКіМ, 2020. С. 153-155.
3. Добровольська В. В. Керування документацією в органах управління культурою України: соціально-комунікаційний аспект: автореф. дис. ... канд. наук із соц. комунікацій: 27.00.02. Київ, 2012. 16 с.

4. Гора О. Б. Інформаційно-аналітичні системи контролю за виконанням державних рішень. *Ресстрація, зберігання і обробка даних*. 2009. Т. 11. № 4. С. 43-50.
5. Пінчук Н. С., Галузинський Г. П. Інформаційні системи і технології в маркетингу: навч. посібник. Київ: КНЕУ, 2016. 328 с.
6. Плєскач В. Л., Рогушина Ю. В., Кустова Н. П. Інформаційні технології та системи: підруч. для студ. екон. спец. Київ: Книга, 2004. 520 с.
7. Comparing Server-Based and Serverless Architectures. URL: <https://www.formkiq.com/blog/whitepapers/scalability-in-document-management-systems/> (дата звернення: 20.05.2024)
8. Scale Management Cloud Solution. URL: <https://www.digisystem.com/-solutions/SOL00068/> (дата звернення: 20.05.2024)

**М. Д. Кириленко,  
В. С. Щирба, канд. фіз.-мат. наук**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнко, м. Кам'янець-Подільський

## **ОПТИМІЗАЦІЯ ТРАЄКТОРІЇ ЛІТАЛЬНОГО АПАРАТУ НА ПРИКЛАДІ БАЛІСТИЧНОЇ РАКЕТИ**

Аналіз поведінки будь-якого складного літального апарату завжди проводять дослідженням його на моделях. За допомогою фізичних моделей формуються таблиці аеродинамічних коефіцієнтів. За допомогою математичної моделі прогнозується специфіка поведінки системи та характеристичні особливості.

Математично-комп'ютерні методи моделювання і оптимізації є ефективним інструментарієм для підвищення надійності та ефективності складних керованих систем, зокрема, керованих літальних апаратів.

Математична модель керованого літального апарату визначає залежність його траєкторії від кутів атаки і ковзання, від швидкісних напорів, від сили тяги, що визначається, зокрема, в дискретному плані по секундною витратою маси та термодинамічними параметрами атмосфери, які впливають на величину швидкісного напору, на величину тяги та аеродинамічних коефіцієнтів, що задаються табличними функціями. Ця маса параметрів значно ускладнює визначення оптимізаційних параметрів.

Збурення атмосфери та геометричні деформації літального апарату призводять до локальних ймовірнісних відхилень кутів атаки, відхилень вектора тяги реактивного двигуна та похибок датчиків навігаційної системи.

Основні труднощі у побудові оптимального керування пов'язані із нелінійністю керованих систем, їх великою розмірністю, фазовими

обмеженнями, неповнотою даних про параметри моделей та наявністю реальних збурень. Це змушує спрощувати постановку оптимізаційної задачі за допомогою апроксимації шуканих керувань.

Вибираючи модель, необхідно перш за все урахувати основні характеристики і параметри об'єкта, при цьому математична модель повинна бути відносно простою і зрозумілою для тих, хто її використовує, і достатньо складною, щоб з необхідним ступенем точності відображати об'єкт, який вивчається.

Траєкторія польоту ракети має дві характерні ділянки: активну і пасивну. Активна ділянка поділяється на декілька частин: стартова, вихід на ціль та перехід на пасивну частину, коригуюча та етап атаки. Пасивна ділянка може мати викривлення, пов'язане, наприклад, із зміною вибраної цілі на іншу. На кожній з частин траєкторії будуються окремі оптимізаційні задачі.

**І. І. Клевчук**, д-р фіз.-мат. наук,

**О. І. Щур**

Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

### **КВАЗІОПТИМАЛЬНА СТАБІЛІЗАЦІЯ ЛІНІЙНИХ КЕРОВАНИХ СИНГУЛЯРНО ЗБУРЕНИХ СИСТЕМ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ**

Розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Au(t), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t), \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\varepsilon$  – малий додатний параметр,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $y \in \mathbb{R}^m$ ,  $u \in \mathbb{R}^r$ , всі корені характеристичного рівняння  $\det(B + C \exp(-\lambda\Delta) - \lambda E) = 0$  лежать у півплощині  $\operatorname{Re} \lambda < 0$ . Керування  $u(t)$  повинно бути вибрано так, щоб забезпечити асимптотичну стійкість розв'язків системи (1) і мінімізувати функціонал

$$J(u) = \int_0^{\infty} (x'(t)Qx(t) + u'(t)Fu(t)) dt, \quad (2)$$

де  $Q$  та  $F$  – додатно визначені симетричні матриці,  $x(t)$  – розв'язок системи (1), в якій  $y_t = p(\varepsilon)x(t)$ . Тут  $y_t$  – елемент простору  $\mathbb{C}[-\varepsilon\Delta, 0]$ , заданий функцією  $y_t(\theta) = y(t + \theta)$ ,  $-\varepsilon\Delta \leq \theta \leq 0$ .

Нехай система

$$\frac{dx}{dt} = Lx - (M + N)(B + C)^{-1} Dx + Au$$

цілком керована. Тоді існує розв'язок задачі (1), (2), причому  $u(t) = g(\varepsilon)x(t)$ , причому функції  $g(\varepsilon)$  та  $p(\varepsilon)$  можна шукати у вигляді ряду за степенями  $\varepsilon$ . Поряд із системою (1) розглянемо систему

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= Lx(t) + My(t) + Ny(t - \varepsilon\Delta) + Ag(\varepsilon)x(t), \\ \varepsilon \frac{dy}{dt} &= By(t) + Cy(t - \varepsilon\Delta) + Dx(t). \end{aligned} \quad (3)$$

Аналогічно [1] можна довести існування інтегральних многовидів системи (3), які можна подати у вигляді  $y_t = p(\varepsilon)x(t)$ ,  $x(t) = h(\varepsilon)y_t$ , і здійснити розщеплення системи (3) на дві незалежні підсистеми. Правильні зображення  $g(\varepsilon) = g_0 + O(\varepsilon)$ , де  $g_0 = -F^{-1}A'K$ , симетрична додатно визначена матриця  $K$  є розв'язком матричного алгебраїчного рівняння Ріккати

$$\begin{aligned} KL_1 + L_1K - KAF^{-1}A'K + Q &= 0, \quad L_1 = L + (M + N)p_0, \\ p_0 &= -(B + C)^{-1}D, \quad p(\varepsilon) = p_0 + [\varepsilon(B + C)^{-1}(E + \Delta C) + \theta]p_0[L + \\ &+ (M + N)p_0 + Ag_0] + O(\varepsilon^2), \quad h(\varepsilon)y_t = \varepsilon(M + N)(B + C)^{-1}y(t) + \\ &+ \left[ M(B + C)^{-1}C - N(B + C)^{-1}B \right] \int_{-\varepsilon\Delta}^0 y(t + \theta) d\theta + O(\varepsilon^2). \end{aligned}$$

### Список використаних джерел:

1. Fodchuk V. I., Klevchuk I. I. Decomposition of linear functional-differential equations. *Dop. Akad. Nauk Ukr. RSR. Ser. A.* 1986. № 8. P. 23-25.

**І. Коваль**, аспірант

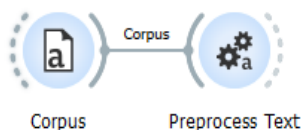
Луцький національний технічний університет, м. Луцьк

### СТВОРЕННЯ ТА ТЕСТУВАННЯ УНІВЕРСАЛЬНОЇ МОДЕЛІ ПОПЕРЕДНЬОЇ ОБРОБКИ ТЕКСТУ У СЕРЕДОВИЩІ ORANGE DATA MINING

Orange Data Mining (ODM) – це програмна система, яка широко використовується в аналітиці даних [2]. Ця робота присвячена дослідженню ефективності вбудованих інструментів для попередньої об-

робки тексту у середовищі ODM. Основною метою є створення універсальної моделі, яка зменшує шум та покращує якість текстових даних перед їх кластеризацією.

Експеримент проводився з використанням тестового набору текстових даних, які представлені збіркою трьох тисяч новинних статей. На рисунку 1 зображено підключення Preprocess Text, який дозволяє застосувати такі технології як токенізація, нормалізація, фільтрація,  $n$ -грамний діапазон та POS-тегування [1]. Ці технології спрямовані на зменшення шуму та фільтрацію текстових даних.



*Рис. 1. Підключення Preprocess Text*

На рисунку 2, за допомогою Word Cloud, зображено хмару слів з вхідної бази даних до застосування інструменту Preprocess Text.



*Рис. 2. Хмара слів з вхідної БД*

Рисунок 3 демонструє результати застосування інструменту Preprocess Text, що показує значне зменшення шуму та покращення якості даних.



*Рис. 3. Результати застосування інструменту Preprocess Text*

На рисунку 4 зображена кінцева модель, побудована в ході експерименту, додано також інструменти Bag of Words, Document Embedding, які перетворюють текстові дані у вектори та дозволяють безпосередньо переходити до кластеризації.



**Рис. 4. Кінцева модель**

Результати експерименту підтвердили ефективність ODM для попередньої обробки текстових даних. Порівняння результатів (рисунок 2 та рисунок 3), а також робота кінцевої моделі чітко демонструє зменшення зашумленості та засміченості вхідних текстових даних завдяки використанню інструменту Preprocess Text.

### Список використаних джерел:

1. Jurafsky D., Martin, J. H. Speech and Language Processing. URL: <https://web.stanford.edu/~jurafsky/slp3/> (дата звернення: 27.05.2024 р.).
2. Witten I. H., Frank E. Data Mining: Practical Machine Learning Tools and Techniques. URL: <https://academia.dk/BiologiskAntropologi/Epidemiologi/-DataMining/Witten and Frank DataMining Weka 2nd Ed 2005.pdf> (дата звернення 30.05.2024 р.).

**І. Б. Ковальська\***, канд. фіз.-мат. наук,

**О. І. Радзієвська\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\*Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський,

\*\*Національний університет харчових технологій, м. Київ

## СПІВВІДНОШЕННЯ МІЖ КОНСТАНТАМИ СЕГЕ ЗА РІЗНИМИ ЕКВІВАЛЕНТНИМИ СИСТЕМАМИ ЕЛЕМЕНТІВ БАНАХОВОГО ПРОСТОРУ

При дослідженні властивостей функції  $f \in \mathcal{X}$  і її узагальнених похідних на основі вивчення поведінки послідовності її найкращих наближень  $E_n(f)$  приходимо до обернених теорем теорії наближень. Дослідження прямих та обернених теорем починається в 1910-1912 роках С. Н. Бернштейном Ш. Валле Пуссенном, Д. Джексоном пізніше продовжується в роботах Н. І. Ахієзера, М. Г. Крейна, Ж. Фавара, Б. В. Стечкіна, С. М. Нікольського, А. Ф. Тімана, А. Зігмунда, В. К. Дзядика, О. І. Степанця [1, 2] та інших.

**Постановка задачі.** Нехай  $\mathcal{X}$  – банаховий простір,  $\mathcal{X}^*$  – спряжений йому простір,  $\{\varphi_m\}_{m=1}^{\infty}$  – повна мінімальна система функцій в



просторі  $\mathcal{X}$ ,  $\{\varphi_m^*\}_{m=1}^\infty$  – спряжена система яка належить простору  $\mathcal{X}^*$ ,  $\{\lambda_m\}_{m=1}^\infty$  – деяка послідовність комплексних чисел. Нехай для елемента  $f \in \mathcal{X}$  ряд  $\sum_{m=1}^\infty \lambda_m (f, \varphi_m^*) \varphi_m$  збігається до деякого елемента  $g \in \mathcal{X}$ . Тоді вектор  $g$  називаємо узагальненою  $\partial_\varphi^\lambda$  – похідною вектора  $f$ , тобто

$$\partial_\varphi^\lambda f = \sum_{m=1}^\infty \lambda_m (f, \varphi_m^*) \varphi_m.$$

Множину всіх векторів, для яких існує  $\partial_\varphi^\lambda$  – похідна, будемо позначати через  $V(\partial_\varphi^\lambda)$ .

Вектор

$$T_n(\varphi) = \sum_{m=1}^n c_m \varphi_m,$$

де  $c_m$  – довільні комплексні числа, будемо називати поліномом степеня  $n$  за системою  $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$ , а сталі

$$\mu_n(\partial_\varphi^\lambda) = \sup_{T_n(\varphi)=1} \partial_\varphi^\lambda T_n(\varphi)_\mathcal{X}, \quad n = 1, 2, \dots$$

будемо називати константами Сеге  $\partial_\varphi^\lambda$  – похідної (див. [3]).

Розглянемо співвідношення між константами Сеге за різними системами елементів банахового простору. В банаховому просторі  $\mathcal{X}$  дві системи елементів  $\{\varphi_m\}_{m=1}^\infty$  і  $\{\psi_m\}_{m=1}^\infty$  називають еквівалентними, якщо знайдеться такий обмежений і обмежено оборотний оператор  $A$ , який діє в  $\mathcal{X}$ , що

$$A \varphi_m = \psi_m, \quad m \in N. \quad (1)$$

Має місце наступне твердження.

**Теорема.** Нехай система  $\{\varphi_m\}$  скінченно лінійно-незалежна, а системи елементів  $\{\varphi_m\}$  та  $\{\psi_m\}$  еквівалентні. Тоді константи Сеге операторів узагальненого диференціювання  $\partial_\varphi^\lambda$  і  $\partial_\psi^\lambda$  за системами  $\{\varphi_m\}$  і  $\{\psi_m\}$  з оператором  $A$  з (1) зв'язані співвідношеннями:

$$\left(\|A\| \cdot \|A\|^{-1}\right)^{-1} \mu_n(\partial_\psi^\lambda) \leq \mu_n(\partial_\varphi^\lambda) \leq \|A\| \cdot \|A\|^{-1} \mu_n(\partial_\varphi^\lambda).$$

### Список використаних джерел:

1. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. I. 427 с.
2. Степанец А. И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч. II. 468 с.
3. Szego G. Uber einen satz des Herrn Serge Bernstein. *Schrift. Konigsberg. Gelehrten Gesellschaft*. 1928. Vol. 5. № 4. P. 59-70.

**І. Т. Косович**, аспірант,

**І. М. Черевко**, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**О. С. Краснокутський**

Чернівецький національний університет

імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

### АГЕНТНО-ОРІЄНТОВАНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОШИРЕННЯ ЕПІДЕМІЙ

Традиційні підходи до моделювання інфекційних захворювань часто виявляються недостатньо гнучкими для застосування сценаріїв моделювання із обмеженнями: масковий режим, вакцинація, самоізоляція тощо. Щоб подолати ці недоліки розглядають моделювання інфекції за допомогою методу клітинних автоматів. Важливим аспектом цього підходу є використання локалізації, що дозволяє врахувати ймовірність і близькість контакту між інфікованими і моделювати процеси із врахуванням різних обмежень. У роботі [1] розглянуто сценарії моделювання з карантинними обмеженнями.

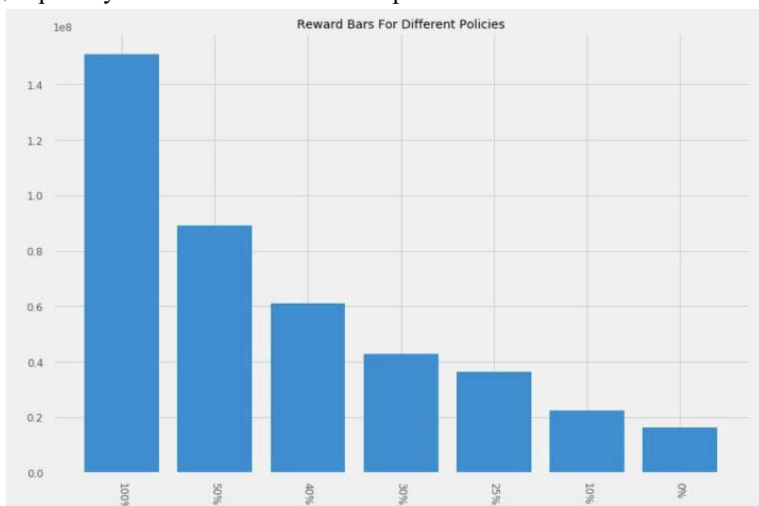
Застосування методів навчання з підкріпленням (RL) дозволяє покращити вирішення широкого спектру задач та прийняття рішень в умовах невизначеності. У даній роботі використовується багатоагентне середовище RL для моделювання процесів із різними рівнями соціального дистанціювання (наприклад, 0%, 25%, 50%, 100%) та використовується епідемічна модель SIRD (Susceptible-Infected-Recovered-Deceased) для симуляції динаміки пандемії.

Основні кроки моделювання включають:

- визначення середовища: створення мережі або карти, де агенти взаємодіють;
- визначення агентів: агенти з різними характеристиками;
- цілі агентів: мінімізація ризику зараження або максимізація вигоди від взаємодії;
- визначення нагороди: нагороди відображають, наскільки агенти наближаються до своїх цілей;

- дії агентів: заходи контролю захворювань такі як карантин, масковий режим, тестування.

Оцінка політик: різні рівні соціального дистанціювання (0%, 10%, 25%, 50%, 100%) оцінювалися за допомогою функції нагороди, що враховує кількість схильних і заражених осіб.



**Рис. 1.** Результати винагороди для кожної з політик дистанціювання

Аналізуючи дані на рис. 1 можна зробити наступні висновки:

100% соціальне дистанціювання ефективно контролює інфекцію, але є нереалістичним через відсутність взаємодії між агентами.

50% соціальне дистанціювання забезпечує баланс між контролем інфекції та економічними наслідками.

Нижчі рівні дистанціювання (10%, 25%) помірно контролюють поширення, дозволяючи більше соціальної взаємодії між агентами, де контроль майже не відчувається.

Відсутність дистанціювання (0%) призводить до найвищого піку інфекції.

Таким чином ефективні політики соціального дистанціювання можуть значно знизити рівень інфекцій та навантаження на системи охорони здоров'я. Важливо збалансувати охорону здоров'я з економічними та соціальними факторами для прийняття рішень.

### Список використаних джерел:

1. Чумаченко Д. І., Чумаченко Т. О. Математичні моделі та методи прогнозування епідемічних процесів: монографія. Харків: ТОВ «Планета-Прінт», 2020. 180 с.

2. Mahmut Lutfullah Ozbilen, Emre Egriboz, Ruşen Halepmollası, Ismail Bilgen, Mehmet Haklıdır. A Deep Reinforcement Learning Approach to Explore Optimal Policies for Covid-19 Pandemic Mitigation: Preliminary Analysis. 2021.
3. David D. Luxton. Artificial Intelligence in Behavioral and Mental Health Care. 2015.

**В. А. Максимюк**, д-р фіз.-мат. наук,

**Є. А. Сторожук**, д-р фіз.-мат. наук

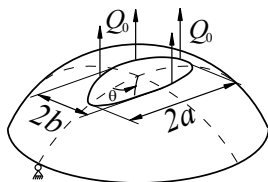
Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

## ПРО ПЕРЕТВОРЕННЯ КООРДИНАТ В ЗАДАЧАХ КОНЦЕНТРАЦІЇ НАПРУЖЕНЬ БІЛЯ ЕЛІПТИЧНОГО ОТВОРУ В СФЕРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ

В епоху аналітичних методів перетворення координат застосовувалося як до незалежних змінних, так і до функцій та операторів одночасно. В теорії оболонок використовувалося конформне відображення [1]. Перетворення тільки незалежних змінних та операторів без заміни функцій дозволяє уникнути складних понять диференціальної геометрії (символи Крістофеля) та спростити постановку і алгоритм розв'язання задач теорії оболонок в криволінійних, можливо, косокутних системах координат.

Такий підхід вже давно використовується в методі скінченних елементів при переході від глобальної криволінійної системи координат до локальної в межах елемента.

Розглянемо задачу про концентрацію напружень біля центрального еліптичного отвору в тонкій сферичній оболонці (рис. 1) під дією внутрішнього тиску  $p$  та перерізуючої сили  $Q_0$  на контурі отвору. Контур еліптичного отвору, строго кажучи неплоский, утворено перетином сферичного сегмента радіусом  $R$  з еліптичним циліндром з півосьми  $a$  і  $b$ .



*Рис. 1. Сферична оболонка з еліпсоподібним отвором*

За спряжену візьмемо півгеодезичну  $(\rho, \theta)$  систему координат з початком у центрі отвору. Неспряжену косокутну систему координат  $(\xi_1, \xi_2)$ , уведемо перетвореннями

$$\rho = s_1 + \xi_1 (s_2 - s_1); \theta = \xi_2, \quad (1)$$

де  $s_1 = R \arcsin(r_1/R)$ ;  $r_1 = ab/\sqrt{a^2 \sin^2 \xi_2 + b^2 \cos^2 \xi_2}$ ,  $s_2 = const$ .

Перетворення (1) відображає криволінійну область ( $s_1(\theta) \leq \rho \leq s_2(\theta)$ ;  $0 \leq \theta \leq 90^\circ$ ) на прямокутну ( $0 \leq \xi_1 \leq 1$ ;  $0 \leq \xi_2 \leq 90^\circ$ ). Координатна лінія  $\xi_1 = 0$  збігається з внутрішнім (еліпсом) контуром серединної поверхні оболонки, а  $\xi_1 = 1$  – з зовнішнім (колом). Лінії  $\xi_2 = const$  є меридіанами сфери.

У випадку значної концентрації напружень доцільно застосувати нерівномірну в координатах  $(\rho, \theta)$  сітку, яка б згущувалась в радіальному напрямку біля отвору:

$$\rho = s_1 + \frac{n\xi_1^m + \xi_1}{n+1} (s_2 - s_1); \theta = \xi_2, \quad (2)$$

де  $n, m$  – параметри для вибору згущення сітки.

У випадку щілопоподібного криволінійного гладкого отвору (наприклад, еліптичний отвір з великим ексцентриситетом) доцільно згустити сітку поблизу вузької частини отвору вздовж обох координат  $(\rho, \theta)$ :

$$\rho = s_1 + \frac{n\xi_1^m + \xi_1}{n+1} (s_2 - s_1); \theta = \frac{n\xi_2^m + \xi_2}{n(\pi/2)^{m-1} + 1}. \quad (3)$$

На основі правил диференціювання складної функції вигляду  $f(\rho(\xi_1, \xi_2), \theta(\xi_1, \xi_2))$  можна отримати відповідно до (1), (2) і (3) формули перетворення для частинних похідних першого порядку, диференціального елемента поверхні у поверхневих інтегралах та диференціального елемента дуги вздовж координатної лінії  $\xi_i$  ( $i=1,2$ ) у криволінійних інтегралах, які використовуються в рівняннях теорії оболонок.

Запропоновані перетворення координат ефективно використовувались для розв'язання тестових [1] і нових [2] задач про концентрацію напружень біля криволінійних отворів в пластинках і оболонках.

### Список використаних джерел:

1. Савин Г. Н. Распределение напряжений около отверстий. Киев: Наук. думка, 1968. 888 с.
2. Maksimyyuk V. A., Storozhuk E. A., Chernyshenko I. S. Variational finite-difference methods in linear and nonlinear problems of the deformation of metallic and composite shells (review). *Int. Appl. Mech.* 2012. Vol. 48. № 6. P. 613-687.

## **ЗАСТОСУВАННЯ ДЛЯ ОПИСУ ТЕРМОМЕТРИЧНОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ ТЕРМІСТОРІВ NTC**

Термістор – це напівпровідниковий температурний сенсор, опір якого змінюється залежно від температури. Термістори характеризуються високою чутливістю, яка забезпечує високу роздільну здатність при вимірюванні температури. Окрім того, термістори з негативним температурним коефіцієнтом (NTC) мають дуже високу чутливість і низьку теплоємність, що дозволяє вимірювати миттєві значення температури. Ці властивості температурного сенсора визначають різноманітне його практичне застосування в техніці і біомедичних приладах [1, 2].

Незважаючи на високу чутливість, вагомою перешкодою для практичного застосування термістора є суттєва нелінійність його термометричної характеристики [1, 2]. Точність вимірювання температури залежить від вибору адекватної моделі термометричної характеристики сенсора, яка забезпечує необхідну точність відтворення результатів калібрування в заданому інтервалі.

Для опису термометричної характеристики термісторів використовують різні залежності [1]. Популярним вдосконаленням моделі термометричної характеристики термісторів є використання п'ятипараметричного узагальнення моделі Стейнхарта-Харта [1, 2]

$$\frac{1}{T} = \sum_{i=0}^4 c_i (\ln(R))^i, \quad (1)$$

де  $T$  – абсолютна температура в Кельвінах,  $R$  – опір при температурі  $T$  в омах, а  $c_i$ ,  $i = \overline{1, 4}$  – невідомі параметри. Для обчислення параметрів моделі (1) використовують нелінійний метод найменших квадратів.

В праці [3] для обчислення параметрів моделі термометричної характеристики термісторів обґрунтовано ефективність використання чебишовського наближення. Зокрема, в [3] на прикладі реальних даних калібрування проілюстровано досягнення вищої точності відтворення температурної залежності узагальненою чотирипараметричною моделлю

$$\frac{1}{T} = \sum_{i=0}^3 c_i (\ln(R))^i, \quad (2)$$

в порівнянні з точністю п'ятипараметричної моделі (1). В цій праці для опису результатів калібрування термісторів запропоновано використання раціонального виразу

$$T(R) = \frac{a_0 + a_1 \ln(R) + a_2 \ln(R)^2}{b_0 + \ln(R)}, \quad (3)$$

в якому невідомі параметри  $a_0$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  і  $b_0$  обчислюють з використанням чебишовського наближення раціональним виразом. Метод обчислення параметрів чебишовського наближення раціональним виразом описано в [4].

Точність відтворення термометричної характеристики термістора з використанням раціонального виразу досліджували на результатах калібрування термістора MEAS типу 46013 в діапазоні температур від 4.9939 °C до 60.0836 °C [2, 3].

Модель термометричної характеристики для даних калібрування за травень 2014 р.

$$T_{14}(x) = \frac{4268.786635 - 28.33192273x - 0.7000487623x^2}{14.31912375 + x}, \quad (4)$$

де  $x = \ln(R_T/R_s)$  [2, 3], забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.000622°K. Для підтвердження ефективності застосування чебишовського наближення побудовано модель вигляду (3), параметри якої обчислено за методом найменших квадратів

$$T_{lsq14}(x) = \frac{4260.2745447 - 27.68140037x - 0.7542877542x^2}{14.290550574 + x}. \quad (5)$$

Модель (5) забезпечує відтворення температури з абсолютною похибкою 0.000978°K.

### Список використаних джерел:

1. Chiachung Ch. Evaluation of resistance-temperature calibration equations for NTC thermistors. *Measurement*. 2009. Vol. 42 (7). P. 1103-1111.
2. Steffen R., Christoph von R. Calibration and self-validation of thermistors for high-precision temperature measurements. *Measurement: Journal of the International Measurement Confederation*. 2015. Vol. 76. P. 1-6.
3. Малачівський П. П., Бунь Р. А., Шевчук О. В. Апроксимація термометричної характеристики термісторів. *Комп'ютерні технології друкарства*. 2023. № 2 (50). С. 91-100.
4. Malachivskyy P. S., Pizyur Y. V., Malachivskyi R. P. Chebyshev approximation by a rational expression for functions of many variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. № 5. P. 811-819.

С. А. Положаснко, д-р техн. наук, професор,

А. Ю. Прокоф'єв, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка» м. Одеса

## ОЦІНЮВАННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ЗАДАЧ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІЧНИХ СИСТЕМ НА ОСНОВІ МЕТОДУ РАНЖУВАННЯ ЗА ПОХИБКОЮ

Наразі гострою слід вважати проблему аналізу похибок обчислень, пов'язаних із дослідженням динамічних систем. Особливо актуальною ця проблема стає при управлінні динамічними системами, коли питання точності та швидкості моделювання динаміки визначають якість розв'язування задачі управління, причому оцінка точності розв'язку повинна здійснюватися в «реальному» масштабі часу перетворень процесів у динамічній системі [1].

Нехай що засобами обчислювальної техніки (ОТ) розв'язуються задачі, які описуються в рамках узагальненої математичної моделі (ММ) виду:

$$A_k x = u, \quad (1)$$

де  $A_k$  – оператор, який є елементом певного набору можливих операторів для конкретної задачі (або типу засобу ОТ);  $u, x$  – шуканий розв'язок та відома права частина.

Первинні похибки у початкових даних призводять до необхідності розв'язувати наближену задачу

$$\hat{A}_k \hat{x} = \hat{u} \quad (2)$$

де  $\hat{A}_k = A_k + \Delta A_k$ ;  $\hat{u} = u + \Delta u$ , а похибка розв'язку визначається як:

$$\hat{y} = y + \Delta y \quad (3)$$

і може бути віднайдена лише при відомому точному розв'язку  $y$ , що обмежує прикладне застосування (3) в якості розрахункового виразу лише випадками розв'язування тестових (аналітичних) задач.

Дієвим шляхом аналізу точності результату є попереднє обчислення залежностей похибки  $\Delta y$  (суть – її характеристик) від характеристик первинних похибок за процедурою (методом) послідовного перебору множини цих первинних похибок [2], тобто розбиття на класи за точністю (або ранжирування).

Враховуючи багаточисельність первинних похибок, значний обсяг обчислень, а також складність вихідних залежностей (3), можна дотримуватися наступного алгоритму (алгоритму методу ранжирування):

1. Обрати показник точності розв'язку  $T[\Delta y]$ , який ефективно може бути визначений шляхом числового експерименту.



2. Застосувати серію комп'ютерних розрахунків (експериментів) щодо побудови залежностей  $T[\Delta y]$  від первинних похибок  $\Delta A_k$  та  $\Delta u$  на множині можливих задач. Цілком припустимо в даному разі використання сітки еталонних задач, що «дискретно» представляють та охоплюють всю множину задач, які розв'язуються.
3. Виділити в процесі цих розрахунків групи, близьких залежностей, що поєднують окремі задачі у класи точності.
4. Виділити показники точності задачі

$$Q_\zeta = Q_\zeta(A_k, u); \zeta = 1, 2, \dots, \zeta \leq n, \quad (4)$$

які дозволяють за допомогою деякого, нескладного правила  $C$  визначати приналежність  $m$ -ї задачі  $L$ -му класу по параметрах точності

$$Q_L \approx C[Q_m], L = 1, 2, \dots, L < \zeta < n. \quad (5)$$

Система даних параметрів забезпечує швидку орієнтацію в об'ємній множині робочих залежностей між  $T_{m,\zeta}[\Delta y]$  та  $Q_\zeta = Q_\zeta(A_k, u); \zeta = 1, 2, \dots, \zeta \leq n$ , що і є розв'язком поставленої задачі ранжирування.

Таким чином, в основі методу, який розглядається, покладено принцип ранжирування за похибками задач та засобів ОТ, який полягає в оцінці похибок розв'язків за допомогою асоціативних залежностей між показниками точності, які цікавлять, та первинними похибками, отриманими в результаті попереднього процесу розв'язування задачі моделювання та класифікацією за точністю задач, які розв'язуються, за допомогою системи еталонних прикладів.

### Список використаних джерел

1. Прокофьев А. Ю. Метод точнісного тарювання при реалізації математичних моделей динамічних систем в задачах моделювання та управління. *Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Технічні науки*: зб. наук. праць. 2022. Вип. 23. С. 116-129.
2. Прокофьев А. Ю. Аналіз похибок математичного моделювання динамічних об'єктів, які описуються інтегральними рівняннями. *Інформатика та математичні методи в моделюванні*. 2022. Т. 12. № 3. С. 209-219.

А. А. Савльєв, д-р філософії,  
Л. Л. Прокофьєва

Національний університет «Одеська політехніка», м. Одеса

## МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ РЕАЛІЗАЦІЇ ЕНЕРГОЗАЩАДЛИВОГО ДИНАМІЧНОГО РЕЖИМУ У ФРАКТАЛЬНО-НЕОДНОРІДНИХ СТРУКТУРАХ

Питання реалізації енергоощадливого розвитку динамічних режимів гостро постає, наприклад, в задачах синтезу управління процесами добутку корисних копалин, зокрема у випадках, коли поклади являють собою фрактально-неоднорідні структури.

Досліджено умову «гладкості» фронту розділу при взаємній фільтрації складових гетерогенних (багатокомпонентних) систем на підставі аналізу «стрибка» насиченості компонент у функції Баклея-Левєретта [1, с. 355]. Показано, що «стрибок» насиченості відсутній, а фронт розділу просувається стійко та зберігає «гладкість», якщо рухливість компоненти, що витискає, не перевищує рухливість компоненти, що витісняється. Також показано, що порушення «гладкості» фронту розділу призводить до фрактально-неоднорідної структури процесу реології і, як наслідок, збільшення енерговитрат на управління.

Фрактальна структура являє собою систему з дробовою розмірністю (іменовану, наприклад [2], фрактальною розмірністю), що геометрично об'єднує фрактальні кластери (або агрегати). При цьому фрактальний кластер розглядається як сукупність досить великої кількості елементів, що зберігають свою індивідуальність всередині цієї сукупності [3]. З погляду реології гетерогенних систем, до фрактального кластера було віднесено сукупність «пальців» компоненти, яка витискає, на фронті розділу компонентів гетерогенної системи, що фільтруються.

Якщо виконати апроксимацію фронту розділу в межах одного «пальця» ламаною лінією, то її довжину можна представити як

$$L = a(R/a)^D, \quad (1)$$

де  $L$  – лінійний розмір «пальця» компоненти, яка витискає (по прямій);  $a$  – розмір ланки ломаної лінії (усереднений розмір «зерна» порового простору);  $R$  – розмір фрактального кластера (радіус сфери, яка охоплює «палець»);  $D$  – фрактальна розмірність, що забезпечує для кластера певну область масштабів, в якій виконується апроксимація виду (1).

Розв'язуючи (1) відносно фрактальної розмірності, а саме:

$$D = [\ln(L) - \ln(a)] / [\ln(R) - \ln(a)] \quad (2)$$

можна отримати числові значення фрактальної розмірності фронту розділу для реологічного процесу, що розвивається в реальних геологічних умовах.

Запропоновано математичну модель (ММ) фрактально-неоднорідної гетерогенної (багатокомпонентної) системи в класі варіаційних нерівностей, яку представлено таким виразом динаміки

$$\forall \tilde{P}, v \in K : \left[ \frac{\partial \tilde{P}}{\partial t}, (v - \tilde{P}) \right] - A \left[ \tilde{P}, (v - \tilde{P}) \right] - \mathbf{j}(v) + \mathbf{j}(\tilde{P}) \geq \left[ Q, (v - \tilde{P}) \right] \quad (3)$$

з початковими та граничними умовами виду

$$\tilde{P}(0, x) \Big|_{z \in \Omega} = \tilde{P}_0(x), \quad \left( \frac{\partial \tilde{P}}{\partial \eta} \right) \Big|_{L \in \Gamma}, \quad (4)$$

де  $\tilde{P}$  – розподілена функція пластового тиску на збудженій частині фронту розділу компонент;  $v$  – пробна функція, оптимальне значення якої відповідає умові  $v^* = \tilde{P}$ ;  $A[\cdot]$  – білінійна форма, що відповідає параболічному оператору відносно функцій  $\tilde{P}$  та  $v$ ;  $\mathbf{j}(\tilde{P})$  та  $\mathbf{j}(v)$  – функціонали, що визначають якісний перебіг реологічного процесу (суть — обмеження на функції  $\tilde{P}$  и  $v$ );  $\Omega$  – просторова область розвитку реологічного процесу з границею  $\Gamma$ ;  $\eta$  – нормаль к границі  $\Gamma$ ;  $t$  та  $x$  – незалежні часова та просторова змінні.

Адекватність ММ виду (3), (4) підтверджено порівнянням числових розв'язків (полів тисків  $\tilde{P}$ ), отриманих за її допомогою, та «забійних» тисків, виміряних у системі експлуатаційних свердловин реальних нафтових пластів, що розробляються у водонапірному режимі.

### Список використаних джерел:

1. Верлань А. Ф., Положаєнко С. А., Сербов Н. Г. Математичне моделювання аномальних дифузійних процесів. Київ: Наука, 2011. 416 с.
2. Гійон Е., Мінтеску К. Д., Юлен Ж. П., Ру С. Фрактали та перколяція в пористому середовищі. *Успіхи фізичних наук*. 1991. Т. 161. № 10. С. 121-128.
3. Katz A. J., Thompson A. H. Fractal Sandstone Pores: Implications between for Conductivity and Pore Formation. *Physical Review Letters*. 1985. Vol. 54. P. 1325-1332.

**О. А. Смалько**, канд. пед. наук

Кам'янець-Подільський національний  
університет імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **МАТЕМАТИЧНІ ОСНОВИ КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ ДЕЯКИХ КОМПОНЕНТІВ ЦИФРОВОГО ЛАНДШАФТУ**

У цифровому вимірі прогресивних візуальних та імерсивних технологій, що стрімко розвиваються і вельми помітно наближають віртуальний досвід користувача до достовірних вражень, дуже просто залишатись затребуваним розробником ігрової та іншої розважальної продукції для електроніки. Але, спираючись на значний науковий арсенал математики, фізики та геонаук, що накопичило людство впродовж багатьох століть, та маючи хист до прикладних досліджень, можна впоратися з усіма викликами сучасної ІТ-сфери.

Починаючи з перших комп'ютерних ігор, їхні розробники намагалися максимально збільшувати залученість потенційних гравців. Звісно, цьому передусім сприяє добре продуманий і захоплюючий сюжет, якісно реалізований ефект присутності у кожному кадрі, але ніколи не можна недооцінювати ступінь впливу на сенсорно-перцептивну сферу людини естетики, видовищності, натуральності та прикрашеного реалізму.

У відеоіграх і середовищах розширеної реальності генеруються різноманітні компоненти динамічного віртуального світу – фрагменти поверхонь, якими пересувається і які спостерігає гравець або XR-ентузіаст (включно з деталізацією рельєфу); текстури і моделі, що наповнюють цифрові ландшафти, повторюють обриси природних водних середовищ, імітують погодні умови, нагадують біоми; антропогенні компоненти (всілякі об'єкти, схожі на створені людьми) тощо.

Для покращення зовнішнього вигляду синтезованих цифрових об'єктів у наш час використовують різні методи. Вони розробляються, спираючись на узагальнення результатів різноманітних емпіричних досліджень та численних експериментів, що проводяться у багатьох сферах. При генерації різних компонентів рельєфу місцевості, зокрема, використовують складну математику: наукоємні методи перетворюють у рівняння, за ними будуються дискретні моделі, що візуалізуються за допомогою програмних кодів. Після програмної реалізації оцінюється реалістичність синтезованих об'єктів і вдосконалюються застосовані підходи.

Наразі переважно обчислювальна гідрогазодинаміка дає ефективний інструментарій для розвитку комп'ютерного моделювання різних компонентів рельєфу у віртуальних середовищах. При цьому за-

звичай використовуються потужні комп'ютери, часто впроваджується паралелізація обчислень, розв'язання окремих підзадач покладається на графічні процесори та тензорні блоки обробки.

Важливими для моделювання нерівностей земної поверхні вбачаються диференціальні рівняння Нав'є-Стокса, які математично виражають закон збереження імпульсу, а також закон збереження маси для ньютонівських рідин. Але вони дуже вимогливі до обчислювальних ресурсів. Втім якщо взяти за основу нестисливу і нев'язку рідину, вони зводяться до рівнянь Ейлера. А якщо рівняння Нав'є-Стокса усереднити за глибиною (за умови, що горизонтальний масштаб набагато більший за вертикальний), то отримаємо рівняння мілководдя. Зазначені виведені рівняння є дуже корисними для генерації ландшафтів: за допомогою двовимірних рівнянь Ейлера, наприклад, можна моделювати реалістичні водні об'єкти, а рівняння мілкої води в односпрямованій формі (що також називають рівняннями де Сен-Венана) доцільні для моделювання процесів, схожих на ерозію, викликану руйнуванням ґрунту або гірських порід потоком води. Отож не завжди часткові спрощення призводять до погіршення естетичного вигляду цифрових сцен. До того ж постійно триває пошук ефективних методів оптимізації обчислень та покращення візуалізації графічних об'єктів.

Досить цікаві властивості, такі як стійкість та рухома форма, має специфічний клас нелінійних усамітнених хвиль, які називають частинкоподібними хвилями або солітонами. Їх, зокрема, можна описати рівняннями Кортевега-де Фріза. При моделюванні цифрових рельєфів вони сприяють створенню складних та водночас регулярних структур, що нагадують гори, річкові долини, обриви, снігові замети, піщані дони. Це додає певного реалізму та деталізації до ландшафтів. Ще більшу розмаїтість забезпечує задання параметрів солітонів (амплітуди, частоти, швидкості руху тощо) псевдовипадковими числами або генеруванням за допомогою, наприклад, шумових функцій (шуму Перліна, Вороного, фрактального тощо). Розробляються й інші раціональні методи покращення візуальної правдоподібності цифрових ландшафтів.

Проте ще існує проблема забезпечення узгодженості деталей рельєфу при моделюванні їх на мезорівнях, а також у більш глобальних структурах. Вивчаються найдоцільніші методи подолання небажаних візуальних артефактів, що при цьому трапляються.

Я. Л. Снайчук, аспірант,  
К. М. Обельовська, канд. техн. наук

\*Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## МАРШРУТИЗАЦІЯ ПАКЕТІВ У КОМП'ЮТЕРНІЙ МЕРЕЖІ З НЕДОВІРЕНИМИ МАРШРУТИЗАТОРАМИ

Процес маршрутизації пакетів у комп'ютерних мережах є ключовим для забезпечення ефективного та надійного зв'язку між вузлами-відправниками та вузлами-одержувачами. Мережі характеризуються великою кількістю параметрів, які можуть змінюватися в залежності від їх призначення та використаних технологій. Тому не існує універсально-го методу маршрутизації, який би задовільнив усі вимоги до мережі.

Дослідимо задачу, коли у мережі присутні маршрутизатори, які спеціальні служби Інтернету визначили як потенційно небезпечні для транзиту трафіку. Це транзитні маршрутизатори, які надалі називатимемо недовіреними маршрутизаторами. В той же час для підтримки роботи мережі потрібно забезпечити доставку пакетів до всіх її вузлів-одержувачів, які підключені як до довірених та недовірених маршрутизаторів. В роботі [1] поставлене завдання вирішене за умови появи в мережі одного недовіреного маршрутизатора, на практиці кількість недовірених маршрутизаторів може бути більшою. В цій роботі запропоновано метод маршрутизації для використання його у мережі при появі в ній декількох недовірених маршрутизаторів.

Рисунок 1 ілюструє результат роботи запропонованого методу для прикладу мережі, що включає в себе 9 маршрутизаторів (від А до І) з'єднаних відповідним чином дуплексними каналами, як показано на рисунку. Характеристикою каналів служать числові значення критерія, за яким відбувається оптимізація при виборі шляху. Їх значення зазначені над лініями, що з'єднують вузли мережі.

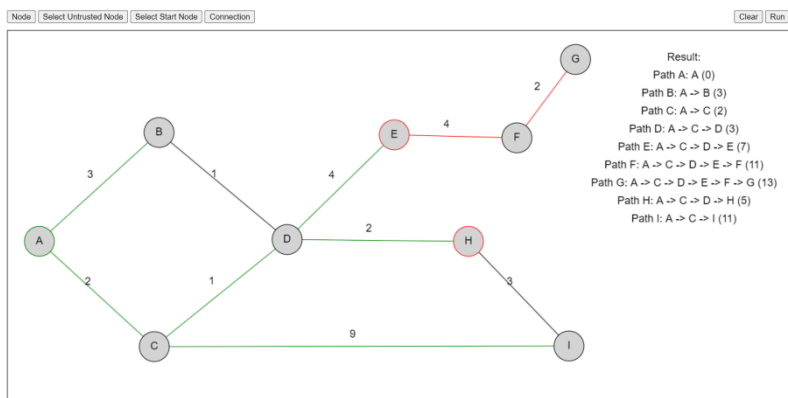
Два з дев'яти маршрутизаторів Е та Н є недовіреними, на рисунку вони обведені червоним кольором. Приклад ілюструє результат процесу знаходження дерева найкоротших шляхів для побудови маршрутної таблиці маршрутизатора А за критерієм мінімальної ваги шляху. Задача зводиться до побудови дерева найкоротших шляхів графа рисунку 1 з коренем у вузлі А, яке не буде використовувати недовірені вузли Е та Н у якості транзитних за умови існування такого дерева. Якщо ж такого дерева не існує, недовірливі вузли будуть використані, але їх кількість у кожній вітці дерева буде мінімально можлива.

Вітки знайденого дерева містять зелені та червоні ділянки. Зелені лінії з'єднують тільки довірени маршрутизатори, червоні лінії використані для позначення шляху, що проходить через недовірені маршрутизатори. В нашому прикладі останні мусять бути задіяні для

передачі пакетів до маршрутизаторів F та G, оскільки іншого шляху до них не існує. Наявні у мережі канали, що не будуть задіяні для передачі пакетів, позначені чорними лініями.

У правій частині результуюче дерево найкоротших шляхів представлено у текстовому форматі. Шлях від початкового вузла A до кожного з маршрутизаторів мережі заданий як послідовність маршрутизаторів, через які має бути переданий пакет. Після кожного шляху у дужках вказана його вага.

Варто зазначити, що отриманий шлях A-C-I (11) з вузла A до вузла I не є найкоротшим, проте коротший шлях A-C-D-H-I (8) був відкинутий через наявність у ньому недовіреного вузла H.



**Рис. 1.** Приклад результатів пошуку дерева найкоротших шляхів в мережі з недовіреними маршрутизаторами

Програмна реалізація розроблена з використанням мови JavaScript.

Запропонований метод дозволяє створювати дерево найкоротших шляхів без недовірених вузлів за умови, що таке дерево існує. У випадку, якщо такого дерева не існує, кількість недовірливих маршрутизаторів на шляху до вузла-одержувача буде мінімізована.

### Список використаних джерел:

1. Obelovska K., Snaichuk Y., Selecky J., Liskevych R., Valkova T. An approach toward packet routing in the OSPF-based network with a distrustful router. *WSEAS transactions on information science and applications*. 2023. Vol. 20. P. 432-443.

**О. С. Станіславів**

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільський

## **ГЕНЕРАЦІЯ ТРИВИМІРНОГО ЛАНДШАФТУ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ МОДЕЛЮВАННЯ ГІДРАВЛІЧНОЇ ЕРОЗІЇ НА ОСНОВІ ЧАСТИНОК**

Формування ландшафтів водним потоком, відоме як гідравлічна ерозія, природне явище, коли водний потік розмиває рельєф, переносючи відкладення та змінюючи форму землі з часом, є важливим чинником у формуванні природного рельєфу. Точне моделювання цих процесів у комп'ютерній графіці дозволяє створювати реалістичні тривимірні ландшафти, які знаходять застосування в різних сферах, включаючи відеоігри, ландшафтний дизайн та віртуальну реальність. Одним із можливих підходів до моделювання гідравлічної ерозії є підхід на основі частинок, який використовує принципи класичної механіки для моделювання складних взаємодій між частинками води та поверхнею рельєфу [1].

Останні досягнення в розробці графічних процесорів (GPU) надають можливості для більш складного моделювання ерозії в реальному часі. Технології на основі GPU досягають значного підвищення швидкості порівняно з традиційними методами, пов'язаними із CPU [2]. Це дозволяє моделювати більшу кількість частинок за одну і ту ж одиницю часу.

Моделювання починається з ініціалізації частинок у випадкових точках на поверхні ландшафту. Ці частинки, що представляють собою краплі води, мають певні властивості, такі як швидкість та розмір. Коли вони взаємодіють із рельєфом, їх поведінка регулюється законами класичної механіки. Рух кожної частинки визначається її швидкістю  $v$  і прискоренням  $a$ , де положення  $x$  частинки визначається згідно рівняння

$$\frac{dx}{dt} = v .$$

Швидкість в свою чергу змінюється з часом через вплив прискорення, що описується рівнянням

$$\frac{dv}{dt} = a .$$

Частинки рухаються по поверхні рельєфу під впливом сили тяжіння та нахилу рельєфу у відповідній точці. Цей рух має вирішальне значення для моделювання ерозії, оскільки частинки з більшими швидкостями можуть витіснити більше матеріалу. Взаємодія між час-



тинками та поверхнею включає в себе процес масообміну, коли частинки збирають осад із поверхні, змінюючи його форму. Цей процес осадження залежить від різних факторів, включаючи швидкість частинок, нахил місцевості та властивості матеріалу.

Під час свого руху частинки випаровуються, що зменшує їхній розмір. Цей крок моделює природне випаровування води, впливаючи на здатність частинок переносити осад. На швидкість випаровування можуть впливати зовнішні фактори симульованого навколишнього середовища, наприклад, температура та вологість.

Якщо ж частинка стає занадто малою в результаті дії на неї процесу випаровування або виходить за межі ландшафту, вона видаляється із симуляції. Це дозволяє зосереджувати обчислювальні ресурси на тих частинках, які активно сприяють процесу ерозії, забезпечуючи цим самим ефективність обчислень. Симуляція продовжується шляхом ітерації цього процесу для великої кількості частинок, кожна з яких сприяє кумулятивній ерозії та осадженню, динамічно змінюючи рельєф.

Техніка моделювання гідравлічної ерозії на основі частинок дозволяє моделювати комплексний і фізично точний метод створення тривимірного ландшафту. Використовуючи класичну механіку для моделювання руху та взаємодії частинок, він імітує складну динаміку ерозії та осадження, що веде до більш реалістичних і деталізованих моделей рельєфу.

### Список використаних джерел:

1. McDonald N. Simple particle-based hydraulic erosion. URL: <https://nickmcd.me/2020/04/10/simple-particle-based-hydraulic-erosion> (дата звернення: 26.05.2024).
2. Mei X., Decaudin P., Hu B.-G. Fast hydraulic erosion simulation and visualization on GPU. *15th Pacific Conference on Computer Graphics and Applications (PG'07)*. 2007. DOI: 10.1109/PG.2007.15.

**Є. А. Сторожук**, д-р фіз.-мат. наук,

**І. С. Чернишенко**, д-р техн. наук

Інститут механіки імені С. П. Тимошенка НАН України, м. Київ

## **МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРУЖНОГО ДЕФОРМУВАННЯ ЦИЛІНДРИЧНОЇ ОБОЛОНКИ ЗМІННОЇ ТОВЩИНИ ЗА ДІЇ ДИНАМІЧНОГО НАВАНТАЖЕННЯ**

Тонкі циліндричні оболонки кругового і некругового поперечного перерізу знаходять широке застосування в різноманітних галузях сучасної техніки як конструктивні елементи машин і приладів.

Розглянемо кругову циліндричну оболонку змінної товщини  $h$ , виготовлену з композитного матеріалу і навантажену динамічними

поверхневими та крайовими силами. При підвищених рівнях діючого навантаження в оболонці виникають значні напруження і переміщення. Для збільшення міцності та жорсткості оболонки її підкріплюють поздовжніми і поперечними ребрами жорсткості (стрингерами і шпангоутами). В цьому випадку товщина оболонки є східчато-змінною функцією просторових координат, а у випадку гладкої оболонки – неперервною. За координатну поверхню приймемо серединну поверхню оболонки (у випадку підкріпленої оболонки – серединну поверхню обшивки). Віднесемо оболонку до криволінійної ортогональної системи координат  $(x, y, z)$ , де  $x, y, z$  – довжини твірної, напрямної та нормалі координатної поверхні оболонки.

Вирази для компонентів деформації (1) представимо у векторній формі згідно теорії непологих оболонок, яка базується на гіпотезі прямої лінії (враховуються деформації поперечного зсуву) [1]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad \varepsilon_{22} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \quad \varepsilon_{12} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}; \\ \mu_{11} &= \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial x}; \quad \mu_{22} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial y}; \quad 2\mu_{12} = \bar{e}_2 \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial x} + \bar{e}_1 \cdot \frac{\partial \bar{\mathcal{G}}}{\partial y}; \\ \gamma_{13} &= \mathcal{G}_1 + \bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial x}; \quad \gamma_{23} = \mathcal{G}_2 + \bar{n} \cdot \frac{\partial \bar{u}}{\partial y}, \end{aligned} \quad (1)$$

де  $\bar{u} = u_1 \bar{e}_1 + u_2 \bar{e}_2 + w \bar{n}$  – вектор переміщень точок координатної поверхні оболонки;  $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{n}$  – орти системи координат  $(x, y, z)$ ;  $\bar{\mathcal{G}} = \mathcal{G}_1 \bar{e}_1 + \mathcal{G}_2 \bar{e}_2$  – вектор кутів повороту нормалі.

Вважаючи, що в кожній точці оболонки напрямки ортотропії матеріалу збігаються з напрямками осей координат  $(x, y, z)$ , зв'язок внутрішніх силових факторів з компонентами деформації при плоскому напруженому стані запишемо на основі закону Гука у вигляді [1]:

$$\begin{aligned} T_{ii} &= C_{i1} \varepsilon_{11} + C_{i2} \varepsilon_{22} + K_{i1} \mu_{11} + K_{i2} \mu_{22}; \\ M_{ii} &= K_{i1} \varepsilon_{11} + K_{i2} \varepsilon_{22} + D_{i1} \mu_{11} + D_{i2} \mu_{22}; \\ T_{12} &= C_{33} \varepsilon_{12} + K_{33} 2\mu_{12}; \quad M_{12} = K_{33} \varepsilon_{12} + D_{33} 2\mu_{12}; \\ T_{i3} &= N_{ii} \varepsilon_{i3} \quad (i = 1, 2). \end{aligned} \quad (2)$$

У формулах (2) літерами  $C_{mn}, K_{mn}, D_{mn}, N_{ii}$  ( $m, n = 1, 2, 3; i = 1, 2$ ) позначені характеристики жорсткості оболонки.

Система розв'язувальних рівнянь отримана з варіаційного принципу Гамільтона-Остроградського. При розв'язанні конкретних динамічних задач дана система доповнюється відповідними крайовими і початковими умовами.

Чисельна методика розв'язання рівнянь коливань циліндричної оболонки змінної товщини за дії нестационарного навантаження базується на застосуванні варіаційного векторно-різницевого методу при побудові різницевих співвідношень за просторовими координатами та явній скінченно-різницевої апроксимації за часовою координатою.

З використанням розробленої методики досліджено вплив геометричних і механічних параметрів на напружено-деформований стан даних оболонок за дії імпульсного поверхневого навантаження.

### Список використаних джерел:

1. Максимюк В. А., Сторожук Е. А., Чернышенко И. С. Вариационно-разностные методы в линейных и нелинейных задачах деформирования оболочек из металлических и композитных материалов (обзор). *Прикл. механика*. 2012. Т. 48. № 6. С. 3-80.

**О. О. Фомін**, д-р техн. наук, професор,

**В. В. Літинський**, аспірант,

**О. В. Татарин**, аспірант

Національний університет «Одеська політехніка» м. Одеса

### МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ ДИНАМІКИ В ГЕТЕРОГЕННИХ СИСТЕМАХ З ПРОМІЖНИМ «АГЕНТОМ»

Виконано дослідження сталості фронтального витіснення для гетерогенних (багатокомпонентних) пластових систем, які представлено рідинами, що фільтруються та не змішуються. Причому, ці рідини можуть являти собою як ньютонівські (або ідеальні), так і неньютонівські (або аномальні) рідини. Типовим прикладом фільтрації такого типу гетерогенних систем може слугувати витіснення водою (ньютонівська рідина) парафіністої нафти (неньютонівська рідина). При цьому просування фронту розділу компонент гетерогенної системи характеризується суттєвим відхиленням від гладкості фронту – тобто утворенню «пальців» невідфільтрованої нафти на границі  $\Gamma$  області фільтрації  $\Omega$  і, навіть, «застійних» зон в середині  $\Omega$ . Таку картину витіснення зумовлено наявністю граничного градієнта тиску  $G$  у аномальній компоненти (через в'язкопластицичність), що визначає для неї нульову швидкість фільтрації  $\varpi = 0$ , якщо пластовий тиск  $P$  приймає значення  $P < G$ .

Вперше показано, що дослідження гладкості границі розділу компонент гетерогенної системи, що фільтрується, може бути використано при розв'язанні задачі на утворення «застійних зон», в тому числі і для компонент, які мають аномальний характер, а їх фільтрація характеризується законом з граничним градієнтом [1, с. 194; 2,

с. 24]. За умову, що визначає границю розділу компонент гетерогенної системи, яка фільтрується, розглянуто «стрибок» насиченості в функції Баклея-Левретта [2, с. 355]

$$J(S) = \frac{k_1^0(S_1)}{\mu_1 k_1^0(S_1) + \mu_2 k_2^0(S_2)}, \quad (1)$$

де  $k_1^0(S_1)$  та  $k_2^0(S_2)$  – відносні фазові проникності для компонент гетерогенної системи, що фільтрується;  $\mu_1$  та  $\mu_2$  – їх в'язкості;  $S_1$  та  $S_2$  – насиченості пористого середовища компонентами гетерогенної системи, відповідно.

Використовуючи рівняння «стрибка» насиченості виду (1) та відомі рівняння динаміки процесу двофазної фільтрації з граничним градієнтом  $G$ , що описують фільтрацію при відхиленні від закону Дарсі [2, с. 14], отримано математичну модель (ММ) «поршневого» витіснення з проміжним «агентом». При цьому, в якості «поршня», виступає проміжний «агент», наприклад, піна або полімер, що закачується між аномальною та ідеальною компонентами гетерогенної системи. Проміжний «агент» («поршень») є хорошим витискачем, внаслідок чого забезпечується гладкість границі  $\Gamma$  області фільтрації  $\Omega$  і, як результат, збільшується нафтовіддача. ММ представлено у вигляді варіаційних нерівностей

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial S_l}{\partial t}(v-S_l) - \int_{\Omega} J(S_l) \left\{ \Psi_l \sum_{i=1}^n \left[ \frac{\partial S_1}{\partial z_i} \cdot \frac{\partial(v-S_1)}{\partial z_i} \right] dz \right\} + \\ & + \int_{\Omega} J(S_1) \left\{ \Psi_l \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |v| \right] \right\} dz - \int_{\Omega} J(S_1) \left\{ \Psi_l \left[ \frac{\partial^2 P}{\partial z_i^2} |S_1| \right] \right\} dz \geq (f, v-S_l), \\ & l = \overline{1,3}; \Psi_1 = (1-S_1), \Psi_2 = 1, \Psi_3 = (1-S_3); \forall v, S_l \in K \quad (2) \end{aligned}$$

з початковими та граничними умовами

$$S_l(0, x) = S_{l_0}(x), \quad l = \overline{1,3}; \quad (\partial P / \partial \eta) = 0. \quad (3)$$

У виразах (2), (3) позначено:  $v$  – пробну функцію;  $f$  – примушуючу функцію;  $t, x$  – незалежні часову та просторову змінні, відповідно;  $\eta$  – нормаль до границі  $\Gamma$ ; індексами  $l = \overline{1,3}$  – аномальну, ідеальну рідини та проміжний «агент», відповідно.

Для кожної з границь «ідеальна рідина – проміжний «агент» та «проміжний «агент» – аномальна рідина» виконано формальні заміни  $S_2 = (1-S_3)$  і  $S_1 = (1-S_3)$ , що дало можливість еквівалентно замінити систему трьох варіаційних нерівностей виду (2), (3) на дві системи

двох варіаційних нерівностей, які можна розв'язувати незалежно одну від іншої, що значно спрощує числову реалізацію вихідної задачі.

### Список використаних джерел:

1. Polozhaenko S. A. Integral model for heat conduction in piecewise homogeneous medium for case of multidimensional space. *Informatics and mathematical methods in simulation*. 2014. Vol. 4. № 4. P. 291-303.
2. Верлань А. Ф., Положаєнко С. А., Сербов Н. Г. Математичне моделювання аномальних дифузійних процесів. Київ: Наукова думка, 2011. 416 с.

**Я. М. Чабанюк\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**А. В. Нікітін\*\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**Р. А. Чипурко\***

\*Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів,

\*\*Національний університет «Острозька академія», м. Київ

## ГЕНЕРАТОР ЗАДАЧІ КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИFUЗИЙНОГО ПРОЦЕСУ В СХЕМІ ЛЕВІ В НАПІВМАРКОВСЬКОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Розглядається задача керування для випадкового процесу переносу  $y(t) \in R^d$ , з керуванням  $u(t) \in (X, X)$  [1]. При цьому, процес переносу визначається рівнянням

$$dy(t) = C(y(t), x(t), u(t))dt + d\eta(t, u(t)), \quad (1)$$

де  $\eta(t, u)$ ,  $t \geq 0$ , – імпульсний процес збурень, який в схемі апроксимації Леві визначається співвідношенням [1]

$$\eta(t, u(t)) = \int_0^t \eta(ds, x(s), u(s))ds. \quad (2)$$

Нехай критерій якості керування  $u(t)$  для переносу (1) визначається функцією  $G(y, x, u)$  з єдиною точкою  $u^*$ , в якій

$$G(y, x, u^*) = \min G(y, x, u).$$

Таким чином, для керування  $u(t)$  розглянемо процедуру стохастичної оптимізації [1]

$$\frac{\alpha t}{dt} = d(t) \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u), \quad (3)$$

$$\text{де } \nabla_{\beta(t)} G(y, x, u) = \frac{(G(y, x, u + \beta(t)) - G(y, x, u - \beta(t)))}{2\beta(t)}.$$

Для задачі (1)-(3) побудовано генератор в схемі малого параметра.

### Список використаних джерел:

1. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analysis for Complex Evolutionary Systems with Markov and semi-Markov switching using approximation schemes. John Wiley & Sons. 2020.

**Я. М. Чабанюк**, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**О. Б. Степаняк**

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## ЗБІЖНІСТЬ ПРОЦЕДУРИ СТОХАСТИЧНОЇ АПРОКСИМАЦІЇ МОДЕЛІ ШАХТА-САНТОНЯ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ПЕРЕКЛЮЧЕННЯМИ

У поданому матеріалі побудовано процедуру стохастичної апроксимації (ПСА)

$$\begin{aligned} a'(t) &= c(t) \left[ \mu_{\xi} + \gamma_{\eta} m(t) + \beta_{\zeta} a(t) - a(t) (\beta_{\zeta} + \mu_{\xi} + \gamma_{\eta}) + \sigma_1 w_1 \right], \\ m'(t) &= c(t) \left[ \beta_{\zeta} a(t) - a^2(t) \beta_{\zeta} - m(t) (\alpha + \mu_{\xi}) + \sigma_2 w_2 \right], \end{aligned} \quad (1)$$

для моделі споживання алкоголю в Іспанії [1]. Тут коефіцієнти  $\mu_{\xi}, \gamma_{\eta}, \beta_{\zeta}$  приймають сталі значення на інтервалах часу, що мають рівномірний та нормальний розподіли.

Керуюча функція  $c(t)$  задовольняє необхідні умови збіжності ПСА

$$\int_0^{\infty} c(t) dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} c^2(t) dt < \infty.$$

Вектор  $(w_1, w_2)$  – двовимірний процес Вінера.

Зауважимо, що природа змін вказаних коефіцієнтів вказує на напівмарковські переключення моделі [2].

Реалізація ПСА (1) вказує на збіжність до точки рівноваги вихідної моделі, яка отримана з аналітичних обчислень в [1].

### Список використаних джерел:

1. Santonja L. Shaikhet. Analysing social epidemics by delayed stochastic models. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2012. Article ID530472. 13p.
2. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. *Mathematics and Statistics*. John Wiley & Sons, October 2, 2020. 240 p.

**Я. М. Чабанюк**, д-р фіз.-мат. наук, професор,  
**У. Т. Хімка**, канд. фіз.-мат. наук,  
**А. А. Литвин**

Львівський національний університет імені Івана Франка, м. Львів

## **ЗАДАЧА КЕРУВАННЯ ДЛЯ ДИФУЗІЙНОЇ МОДЕЛІ ЕПІДЕМІЇ З НАПІВМАРКОВСЬКИМИ ЗМІНАМИ КОЕФІЦІЄНТІВ**

Розглядається задача керування для дифузійної моделі споживання алкоголю в Іспанії [1]

$$\begin{aligned} a^{(t)} &= \mu(x) + \gamma(x) + m(t) + \beta(x)a(t) + \sigma_1(u(t))w_1(t), \\ m^{(t)} &= \beta(x)a(t) - \beta(x)a^2(t) - m(t) + \sigma_2(u(t))w_2(t) \end{aligned}$$

$u(t)$  – процес керування,  $x$  – напівмарковський процес переключень, а коефіцієнти  $\mu, \gamma, \beta$  характеризують процес споживання алкоголю,  $(w_1, w_2)$  – процес Вінера [2].

Оптимальність витрат на лікування характеризується функціоналом:

$$G(a(t), m(t), u(t)) \rightarrow \min \quad (1)$$

Знаходження керування  $u(t)$  визначається за допомогою процедури стохастичної оптимізації для (1) [2].

$$\frac{du}{dt} = \alpha(t) \nabla_{b(t)} G(a(t), m(t), u(t)),$$

де

$$\nabla_{b(t)} G(\cdot, \cdot, u) = \frac{G(\cdot, \cdot, u + b(t)) - G(\cdot, \cdot, u - b(t))}{2b(t)} \quad (2)$$

При виконанні умов

$$\int_0^{\infty} \alpha(t) dt = \infty, \quad \int_0^{\infty} \alpha^2(t) dt < \infty, \quad \int_0^{\infty} \alpha(t) \beta(t) dt < \infty,$$

процедура (2) збігається до точки досягнення мінімуму критерію (1).

### **Список використаних джерел:**

1. Santonja F., Shaikhet L. Analysing social epidemics by delayed stochastic models. *Discrete Dynamics in Nature and Society*. 2012.
2. Chabanyuk Y., Nikitin A., Khimka U. Asymptotic Analyses for Complex Evolutionary Systems with Markov and Semi-Markov Switching Using Approximation Schemes. *Mathematics and Statistics*. John Wiley & Sons, October 2, 2020. 240 p.

**Я. М. Чабанюк\***, д-р фіз.-мат. наук, професор,

**У. Т. Хімка\***, канд. фіз.-мат. наук,

**С. А. Семенюк\*\***, канд. фіз.-мат. наук

\* Львівський національний університет ім. І. Франка, м. Львів,

\*\* Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## **ГЕНЕРАТОР СТОХАСТИЧНОЇ ЕВОЛЮЦІЇ З МАРКОВСЬКО-МОДУЛЬОВАНИМ ПУАСОНІВСЬКИМ ШУМОМ**

У цій роботі ми розглядаємо стохастичну еволюцію, яка піддається впливу Марковсько-модульованого пуасонівського шуму. Такий шум є узагальненням стандартного пуасонівського шуму і моделюється за допомогою марковських процесів, які переключають інтенсивність пуасонівських стрибків. Це дозволяє більш адекватно описувати системи з перемиканням режимів або з рідкісними, але значними стрибками, характерними для багатьох природних і технічних процесів.

Розглянемо еволюційну систему:

$$du^\varepsilon(t) = C(u^\varepsilon(t)) + N(t), \quad u^\varepsilon(t) \in R.$$

Тут  $N(t)$ ,  $t \geq 0$  процес підрахунку кількості подій, які відбулися до часу  $t$ . Швидкість надходження подій в момент часу  $t$  задається  $\lambda(x(t))$ . Де процес  $x(t)$ ,  $t \geq 0$  рівномірно ергодичний процесом Маркова у фазовому просторі  $(X, \mathcal{X}$  зі стаціонарним розподілом  $\pi(B)$  та генератором  $Q\varphi(x) = q(x) \int_X P(x, dy) [\varphi(y) - \varphi(x)]$ ,  $\varphi \in B(X)$  [1]. Властивості та генератор двохкомпонентного процесу  $(x(t), N(t))$  досліджувалися в [2].

В результаті досліджень отримано вигляд генератора еволюційної системи. Наступним кроком досліджень є встановлення асимптотичних властивостей стохастичного процесу на зростаючих інтервалах часу.

### **Список використаних джерел:**

1. Koroliuk V. S., Limnios N. Stochastic Systems in Merging Phase Space. World Scientific. 2005.
2. Semenyuk S. Asymptotic properties of the Markov-modulated Poisson process. *Proceedings of the XXXVIII International Conference Problems of decision making under uncertainties (PDMU-2023)*. 2023. P. 93.



**І. М. Черевко**, д-р фіз.-мат. наук, професор

**Т. В. Щур**, аспірант

**А. Г. Коньяков**

Чернівецький національний університет  
імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

## **ЧИСЛОВЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПОЧАТКОВИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЗАПІЗНЕННЯМ**

Введення запізнення в диференціальні рівняння, які описують багато прикладних задач в системах автоматичного регулювання та керування, хімічних, біологічних, технічних, економічних та інших процесах, еволюція яких залежить від передісторії, є поширеним підходом для побудови адекватних математичних моделей [1, 2].

Знайти точний розв'язок диференціально-різницевого рівнянь вдається тільки у найпростіших випадках. Тому важливою задачею для диференціально-різницевого рівнянь є побудова та обґрунтування методів наближеного знаходження розв'язків початкових та крайових задач.

Числові методи розв'язування початкових задач для диференціально-різницевого рівнянь розвивалися в працях [3,4]. При цьому в основному наближені методи розв'язання звичайних диференціальних рівнянь адаптуються на різні класи диференціально-функціональних та диференціально-різницевого рівнянь. У роботі [4] одержано узагальнену сім'ю  $\theta$  різницевого схем, які є узагальненням різницевого схем Ейлера для інтегрування диференціальних рівнянь із запізненням.

У даній роботі розглядається автоматизації методу кроків для початкових задач із запізненням. Розглянемо початкову задачу для диференціального рівняння із запізненням

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), x(t-\tau)), \quad t_0 < t \leq T, \\ u(t) &= \varphi(t), \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \end{aligned} \quad (1)$$

Метод послідовного інтегрування (метод кроків) полягає в тому, що на початку знаходимо розв'язок рівняння (1) при  $t_0 \leq t \leq t_0 + \tau$ , далі при  $t_0 + \tau \leq t \leq t_0 + 2\tau$ , і т. д.

На першому відрізку  $[t_0, t_0 + \tau]$  маємо задачу Коші:

$$\begin{aligned} u'(t) &= f(t, u(t), \varphi(t-\tau)), \quad t_0 < t \leq t_0 + \tau, \\ u(t_0) &= \varphi(t_0). \end{aligned} \quad (2)$$

Інтегруючи задачу (2) деяким числовим методом, знаходимо наближені значення  $u_h(t)$  шуканої функції  $u(t)$  на відрізку  $[t_0, t_0 + \tau]$ .

Тепер розглянемо наступний відрізок  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ . Визначимо на ньому функції  $u_1(t) = u(t - \tau)$  і  $u_2(t) = u(t)$  та запишемо задачу (2) у вигляді системи двох рівнянь:

$$\begin{aligned}
u_1'(t) &= f(t - \tau, u_1(t), \varphi(t - 2\tau)), \quad t_0 + \tau < t \leq t_0 + 2\tau, \\
u_2'(t) &= f(t, u_2(t), u_1(t)), \quad t_0 + \tau < t \leq t_0 + 2\tau, \\
u_1(t_0 + \tau) &= \varphi(t_0), \quad u_1(t_0 + \tau) = u_h(t_0 + \tau).
\end{aligned} \tag{3}$$

Інтегруючи систему (3) деяким числовим методом, знаходимо наближені значення  $u_h(t)$  шуканої функції  $u_2(t) = u(t)$  на відрізку  $[t_0 + \tau, t_0 + 2\tau]$ .

Розмірковуючи таким чином, приходимо до загальної формули представлення вихідної задачі (3) на відрізку  $[t_0 + (m-1)\tau, t_0 + m\tau]$ ,  $m = 1, 2, \dots$  у вигляді системи  $m$  рівнянь:

$$\begin{aligned}
u_i'(t) &= f(t - (m-i)\tau, u_i(t), u_{i-1}(t)), \quad i = 1, \dots, m, \\
u_i'(t_0 + (m-1)\tau) &= u_h(t_0 + (i-1)\tau), \quad i = 1, \dots, m, \\
\text{де } u_0(t) &= \varphi(t - m\tau), \quad u_i(t) = u(t - (m-i)\tau).
\end{aligned} \tag{4}$$

Формули (4) дозволяють послідовно (покроково) інтегрувати вихідну задачу (1) деяким числовим методом. Сукупність обчислених на кожному кроці  $k$  – значень  $u_k$  функції  $u_h(t)$  являє собою наближені значення шуканої функції  $u(t)$ .

Головною перевагою методу являється те, що система (4) не містить запізнення і для її розв'язання можуть бути використані класичні числові методи.

### Список використаних джерел:

1. Forrest-Owen O. Mathematical Modelling and it's Applications in Biology, Ecology and Population Study. University of Chester, United Kingdom. 2016. 124 p.
2. Schiesser W. E. Time Delay ODE/PDE Models. Applications in Biomedical Science and Engineering. Boca Rona, 2019. 250 p.
3. Bellen A., Zenaro M. Numerical methods for delay differential equations. New York: Oxford University Press, 2003. 395 p.
4. Луник Т. В., Черевко І. М. Моделювання математичних моделей біології та імунології із запізненням. *Буковинський математичний журнал*. 2021. Т. 8, № 2. С. 92- 98.

**О. Ю. Чернуха**, д-р техн. наук, професор

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

## **МОДЕЛЮВАННЯ ПОТОКІВ ДОМІШКОВОЇ РЕЧОВИНИ У ДВОФАЗНОМУ СТОХАСТИЧНО НЕОДНОРІДНОМУ ТІЛІ З ПРОШАРКАМИ ВИПАДКОВОЇ ТОВЩИНИ**

Велика кількість реальних об'єктів, таких як композити, пористі середовища, біологічні тканини тощо, характеризуються наявністю складної неоднорідної структури [1, 2]. Розуміння закономірностей дифузії у таких середовищах є необхідним для прогнозування їх властивостей та поведінки. Наявність включень, шарів або градієнтів властивостей може суттєво змінювати характер дифузії у порівнянні з однорідним середовищем. Це зумовлює необхідність розробки спеціальних математичних моделей та методів моделювання процесів перенесення маси, які враховують ефекти неоднорідності структури.

На основі оригінального підходу досліджено процеси переносу домішок у двофазних стохастично неоднорідних багатозарових тілах з рівномірним розподілом неоднорідностей в тілі. Товщина шаруватих включень моделювалася як випадкова величина з рівномірним або трикутним розподілом у заданих межах. Новий підхід полягав у формулюванні крайових задач безпосередньо для функцій масового потоку  $J(z, t)$ , на основі рівняння дифузії, сформульованого безпосередньо для потоку [3]

$$\frac{\partial J(z, t)}{\partial t} = D(z) \frac{\partial^2 J(z, t)}{\partial z^2},$$

з граничними умовами для потоку на одній поверхні  $J(z, t)|_{z=0} = J_* \equiv \text{const}$  та для концентрації – на іншій  $c(z, t)|_{z=z_0} = 0$ .

Тут  $D(z) = \begin{cases} D_0, & z \in \Omega_0, \\ D_1, & z \in \Omega_1, \end{cases}$  – коефіцієнт дифузії домішкової речовини,

що є сталим в області  $\Omega_j$  кожної з фаз.

Враховуючи наявність стохастичних неоднорідностей як внутрішні джерела, задача з випадковими коефіцієнтами була зведена до інтегро-диференціального рівняння. Його розв'язок побудовано методом послідовних ітерацій у вигляді збіжного ряду Неймана. Отримано розрахункові формули для усередненого потоку у випадках нульової та ненульової початкової концентрації домішки в тілі.

На основі отриманих розрахункових формул, розроблено програмне забезпечення для аналізу залежності усередненого потоку від па-

раметрів середовища, таких як співвідношення коефіцієнтів дифузії, об'ємна частка включень тощо. Проведено порівняльний аналіз масових потоків, усереднених за випадковою товщиною, на етапі формування математичної моделі та на заключному етапі дослідження.

Показано, що врахування стохастичності товщини включень по-різному впливає на усереднений потік залежно від вхідних коефіцієнтів задачі. Наприклад, при більших значеннях коефіцієнта дифузії домішок у включеннях порівняно з матрицею, зміщення інтервалу ймовірних значень товщини включень до 1 призводить до збільшення дифузійного потоку. При часах дифузійного процесу, близьких до стаціонарного стану, різниця між значеннями усереднених дифузійних потоків у шаруватому тілі для рівномірного та трикутного розподілів товщини включень становить менше 1%. У випадку тришарової смуги вибір типу розподілу не є суттєвим. В обох випадках розподілу товщини, збільшення довжини інтервалу ймовірних значень товщини включень при фіксації одного з його кінців призводить до зростання усередненого потоку домішки.

Крім того, показано, що для малих часів процесу дифузії, великих значень об'ємної частки включень і коефіцієнтів дифузії домішки в матриці менших, ніж у включеннях, суттєвою є стадія, на якій виконується усереднення за випадковою товщиною. Для інших значень параметрів задачі для визначення усереднених потоків можна використовувати більш просту математичну модель з відомою товщиною включень, попередньо усереднивши цей параметр із заданою функцією ймовірного розподілу.

### Список використаних джерел:

1. Balaji T. E., Tanaya Das H., Maiyalagan T. Recent trends in bimetallic oxides and their composites as electrode materials for supercapacitor applications. *ChemElectroChem*. 2021. Vol. 8 (10). P. 1723-1746.
2. Khan M. F. A., Ur. Rehman A., Howari H. and other. Hydrogel Containing Solid Lipid Nanoparticles Loaded with Argan Oil and Simvastatin: Preparation, In Vitro and Ex Vivo Assessment. *Gels*. 2022. Vol. 8. P. 277.
3. Чернуха О. Ю., Білушак Ю. І., Чучвара А. Є. Моделювання дифузійних процесів у стохастично неоднорідних структурах. Львів: Растр-7, 2016. 262 с.

Ю. А. Чернуха

Національний університет «Львівська політехніка», м. Львів

## МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ ЗА ДІЇ СИСТЕМИ ВИПАДКОВИХ ТОЧКОВИХ ДЖЕРЕЛ МАСИ ПРИ ЗАДАНІЙ СТАТИСТИЦІ

Статистичне моделювання як метод розв'язання ймовірнісних та детермінованих задач на основі використання випадкових величин та законів теорії ймовірностей набуло широкого застосування для великого кола задач, які стосуються аналізу, синтезу та оптимізації параметрів, прогнозування складних фізичних та технічних об'єктів [1]. Особливістю вказаного типу моделей є їх недетермінованість, тобто те, що у статистичній моделі, заданій за допомогою математичних співвідношень, деякі змінні не мають конкретних значень, а мають розподіл ймовірностей. У даній роботі досліджуються дифузійні процеси в шарі за дії системи випадково розташованих точкових джерел маси, тобто задана статистика системи точкових джерел.

Нехай в шарі товщини  $x_0$  дифундує домішкова речовина. В області тіла діє набір точкових джерел маси  $\omega_i \delta(x - \hat{x}_i)$ , де  $\omega_i$  – потужність  $i$ -го джерела,  $\delta(x)$  – функція Дірака, які розглядатимемо як систему джерел у випадкових точках  $x = \hat{x}_i$ ,  $\hat{x}_i \in [\bar{x}_1, \bar{x}_2]$ , і  $0 \leq \bar{x}_1 < \bar{x}_2 \leq x_0$ . Нехай задана статистика джерел  $\langle \delta(x - \hat{x}_i) \rangle$ ,  $\langle \delta(x - \hat{x}_i) \delta(x - \hat{x}_j) \rangle$ ,  $\langle \delta(x - \hat{x}_i) \delta(x - \hat{x}_j) \delta(x - \hat{x}_k) \rangle$ ,  $i, j, k = 1..N$ .

Розглядається крайова задача:

$$\rho \frac{\delta c(t, x)}{\delta t} = d \frac{\delta^2 c(t, x)}{\delta x^2} + \sum_{i=1}^N \omega_i \delta(x - \hat{x}_i), \quad (1)$$

$$c(t, x)|_{t=0} = 0, c(t, x)|_{x=0} = c_0 \equiv const, c(t, x)|_{x=x_0} = c_* \equiv const \quad (2)$$

де  $c(t, x)$  – концентрація мігруючої речовини,  $\rho$  – густина тіла,  $d$  – кінетичний коефіцієнт перенесення,  $N$  – кількість випадкових точкових джерел.

Шукаємо розв'язок крайової задачі (1),(2) у вигляді

$$c(t, x) = c^h(t, x) + \sum_{i=1}^N \omega_i \int_0^t \int_0^{x_0} G(t, t', x, x') \delta(x' - \hat{x}_i) dx' dt',$$

де  $c^h$  – розв'язок однорідної крайової задачі,  $G$  – функція Гріна [2].

Усреднюємо функцію  $c(t, x)$  за випадковими координатами місцезнаходження джерел  $\hat{x}_i$

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \left\langle \sum_{i=1}^N \omega_i \int_0^t \int_0^{x_0} G(t, t', x, x') \delta(x' - \hat{x}_i) dx' dt' \right\rangle.$$

Нехай  $f(\hat{x}_i)$  – густина функції розподілу випадкової величини  $\hat{x}_i$ . Вважаємо, що внутрішні джерела маси складають систему джерел, і що вклад кожного з джерел у систему є рівноімовірним. Тоді маємо:

$$f\left(\sum_{i=1}^N \hat{x}_i\right) = \sum_{i=1}^N p_i f(\hat{x}_i), \quad p_i \equiv 1.$$

Нехай відомий інтервал дії системи джерел  $[\bar{x}_1; \bar{x}_2] \subseteq [0, x_0]$ . Отримаємо:

$$\langle c(t, x) \rangle = c^h(t, x) + \frac{2\Omega}{dx_0 N(\bar{x}_2 - \bar{x}_1)} \sum_{n=1}^{\infty} S_{12}(y_n) \left(1 - e^{-dy_n^2 t / \rho}\right) \sin(y_n x),$$

де

$$S_{12}(y_n) = (\cos(y_n \bar{x}_1) - \cos(y_n \bar{x}_2)) / y_n^3, \quad \Omega = \sum \omega_i.$$

Знайдено дисперсію  $\sigma_c^2(t, x)$  поля концентрації домішкової речовини за дії системи випадкових точкових джерел маси:

$$\sigma_c^2(t, x) = \frac{2\Omega^2}{d^2 x_0^2 N^2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{y_n^3} \left[ \frac{1 - (-1)^n}{\bar{x}_2 - \bar{x}_1} - S_{12} \right] \left(1 - e^{-dy_n^2 t / \rho}\right) \sin(y_n x) \right)^2.$$

Знайдено функцію кореляції і коефіцієнт кореляції поля концентрації домішкової речовини. Встановлено, що коефіцієнт кореляції не залежить від потужності точкових джерел та їхньої кількості, а залежить від інтервалу дії системи точкових джерел. Зазначимо, що найбільших значень коефіцієнт кореляції досягає в околі верхньої границі шару.

### Список використаних джерел:

1. Grigorios A. Pavliotis. Stochastic Processes and Applications: Diffusion Processes, the Fokker-Planck and Langevin Equations. 2014. 339 p.
2. Evans L. C. Partial Differential Equations. Province, Rhode Island, American Mathematical Society, 2010. 662 p.

**А. Є. Чучвара**, канд. техн. наук

Інститут прикладних проблем механіки і математики  
імені Я. С. Підстригача НАН України, м. Львів

## **КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПЕРЕНЕСЕННЯ МАСИ У ВИПАДКОВО НЕОДНОРІДНІЙ СМУЗІ З КУЛЬОВИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ НА НИЖНІЙ ГРАНИЦІ ТІЛА**

Композиційні матеріали з неоднорідностями типу пор, гранул, зерен знайшли широке використання у медицині (наприклад, композити з титановою матрицею, зміцнені магнієвими включеннями), машинобудуванні та аерокосмічній галузі (біметалеві композити), будівництві (газосилікати, газобетон), тощо. Ці матеріали застосовуються через їх унікальні властивості, які виникають завдяки складній внутрішній структурі, що дозволяє досягти високої ефективності в різних умовах експлуатації. Комп'ютерне моделювання процесу перенесення маси в композиційних структурах з неоднорідною внутрішньою будовою є важливим для точного прогнозування поведінки матеріалів, економії ресурсів, оптимізації їх властивостей та вивчення складних фізичних процесів, що в них протікають. Воно дозволяє зменшити кількість необхідних експериментів, розробляти нові матеріали, оцінювати вплив різних факторів на процес перенесення маси та моделювати застосування таких матеріалів за різних умов експлуатації.

На основі підходу до математичного опису процесів перенесення маси у випадково неоднорідних середовищах, що базується на побудові розв'язку у вигляді інтегрального ряду Неймана та його подальшого усереднення за ансамблем конфігурацій фаз [1], проведено комп'ютерне моделювання перенесення домішкової речовини у двофазній смузі з випадково розташованими кульовими включеннями, зосередженими біля нижньої границі тіла.

Розглянуто процес перенесення маси домішкової речовини у смузі товщини  $z_0$ , що складається з основної фази (матриці) та кульових включень. Координати розташування включень є невідомими, але прийнято, що вони найбільш ймовірно зосереджені біля нижньої границі тіла. Для опису такої структури використано частковий випадок ймовірного бета-розподілу. Прийнято, що коефіцієнти дифузії  $d_j$  та густини  $\rho_j$  є сталими в межах кожної з фаз ( $j=0,1$ ), а об'ємна частка матриці є превалюючою.

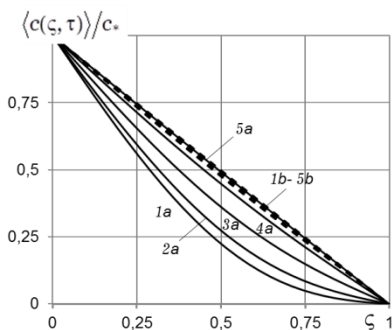
Враховуючи відсутність конвективного механізму перенесення, процес дифузії домішкової речовини у такому тілі описується наступними рівняннями для кожної фази  $j$ :

$$\rho_j \frac{\partial c_j(\vec{r}, t)}{\partial t} = d_j \left[ \frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 c_j(\vec{r}, t)}{\partial z^2} \right], \quad \vec{r} \in (V^{(j)}),$$

де  $c_j(\vec{r}, t)$  – концентрація домішки у  $j$ -ій фазі;  $\vec{r} = (x, y, z)$  – радіус-вектор біжучої точки;  $t$  – час ( $t \in [0; \tau], \tau < \infty$ ).

Враховано, що у початковий момент часу відсутня домішка у тілі, на верхній границі підтримується стале значення її концентрації, а на нижній границі тіла домішкова речовина відсутня.

Отримано диференціальне рівняння перенесення маси для тіла в цілому, яке враховує стрибок шуканої функції та її похідної на випадкових границях розділу фаз. Прийнявши неоднорідність структури тіла за внутрішні джерела, для крайової задачі знайдено еквівалентне інтегро-диференціальне рівняння, розв'язок якого представлено у вигляді інтегрального ряду Неймана. Проведено усереднення стохастичного поля концентрації за ансамблем конфігурацій фаз із функцією щільності часткового випадку ймовірнісного бета-розподілу. Одержано розрахункову формули для усередненої концентрації та проведено чисельний аналіз концентрації домішкової речовини у тілі з кульовими включеннями, зосередженими біля нижньої границі тіла.



**Рис. 1.** Концентрація домішки у різні моменти часу

Показано, що у випадку коефіцієнтів дифузії у включеннях менших, ніж у матриці, збільшення часу протікання процесу дифузії призводить до зростання усередненої концентрації в неоднорідному тілі (1a-5a, рис. 1), при цьому концентрація домішки в однорідному тілі (без включень) зростає незначно (криві 1b-5b, рис. 1).

### Список використаних джерел:

1. Chernukha O., Chuchvara A. Modeling of the diffusion of admixtures in a porous body with random spherical pores with comparable volume fractions of the phases. *J. of Math. Sci.* 2021. Vol. 258. № 4. P. 553-567.



**І. В. Юрченко**, канд. фіз.-мат. наук,  
**В. К. Ясинський**, д-р фіз.-мат. наук, професор  
 Чернівецький національний університет  
 імені Юрія Федьковича, м. Чернівці

## ДОСЛІДЖЕННЯ ПОВЕДІНКИ РОЗВ'ЯЗКІВ СТОХАСТИЧНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ У ЧАСТИННИХ ПОХІДНИХ З ВИПАДКОВИМИ ПАРАМЕТРАМИ В ПРАВІЙ ЧАСТИНІ

Розглянемо стохастичний експеримент з базовим імовірнісним простором  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ ,  $\mathbb{F} \equiv \{\mathcal{F}_t, t \geq 0\}$  – фільтрація, де задана функція  $u(t, x, \omega) \in$  вимірною з імовірністю одиниця за  $t$  та  $x$  відносно мінімальної  $\sigma$ -алгебри  $\mathcal{B}([0, T], \mathbb{R}^1)$  борелевих множин на площині та для якої  $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathbb{E} \left\{ |u(t, x, \omega)|^2 \right\} dx < \infty$  для всіх  $t \in [0, T]$ ,  $\mathbb{E}\{\cdot\}$  – математичне сподівання,  $T \subset [0, \infty)$  [1, 2]. Простір функцій  $\{u(t, x, \omega)\}$ , що володіє властивістю інтегровності, позначимо через  $\mathfrak{M}_T$ . У просторі  $\mathfrak{M}_T$  слід ввести норму вигляду

$$\|u(t, x, \omega)\|^2 \equiv \int_0^T \mathbb{E}_u(t) dt = \int_0^T \mathbb{E} \left[ \int_{-\infty}^{+\infty} |u(t, x, \omega)|^2 dx \right] dt .$$

Позначимо через  $Q(A, q, p) \equiv \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^m a_{kj} q^k p^j$ , де  $A \equiv \{a_{kj}\}$  – дійснозначна матриця розмірності  $n \times m$ , складена з елементів  $a_{kj} \in \mathbb{R}^1$ .

Розглянемо на  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$  задачу Коші для СДРЧП вигляду [3,4]

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left[ Q \left( A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \right] + Q \left( B, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) = \\ = \varphi(\xi(\omega)) Q \left( C, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \frac{dw(t, \omega)}{dt}, \\ Q \left( A, \frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial x} \right) u(t, x, \omega) \Big|_{t=0} = [Qu]_0, \end{aligned}$$

$B \equiv \{b_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$ ,  $b_{ij} \in \mathbb{R}^1$ ;  $C \equiv \{c_{ij}\}_{i,j=1}^{k,n}$ ,  $c_{ij} \in \mathbb{R}^1$ ,  $\varphi(\cdot)$  – берівська функція з областю значень  $\mathbb{R}^1$ ,  $\xi(\omega)$  – випадкова величина, задана щіль-

ністю  $p_{\xi}(x)$  (або функцією розподілу),  $w(t, \omega)$  – одновимірний вінерів процес, при цьому  $\xi(\omega)$  не залежить від  $w(t, \omega)$ .

Отримані результати щодо поведінки в середньому квадратичному сильного розв'язку даного рівняння (див. [3-7]).

#### Список використаних джерел:

1. Гіхман Й. І., Скороход А. В. Стохастичні диференціальні рівняння з частинними похідними. Київ: Ін-т математики АН УРСР, 1981. С. 25-59.
2. Перун Г. М., Ясинський В. К. Дослідження задачі Коші для стохастичних рівнянь у частинних похідних. *Укр. мат. журн.* 1993. Т. 45. № 9. С. 1773-1781.
3. Koroliuk V. S., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Behavior of the Second Moment of the Solution to the Autonomous Stochastic Linear Partial Differential Equation with Random Parameters in the Right-Hand Side. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2015. Vol. 51. № 1. P. 56-63.
4. Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Existence of Lyapunov–Krasovskii Functionals for Stochastic Functional Differential Ito–Skorokhod Equations under the Condition of Solutions' Stability on Probability with Finite Aftereffect. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2018. Vol. 54. № 6. P. 957-970.
5. Lukashiv T. O., Yurchenko I. V., Yasynskyy V. K. Necessary and Sufficient Conditions of Stability in the Quadratic Mean of Linear Stochastic Partial Differential-Difference Equations Subject to External Perturbations of the Type of Random Variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2020. Vol. 56. № 2. P. 303-311.
6. Yasynskyy V. K., Yurchenko I. V. Existence of the Solution to the Cauchy Problem for Nonlinear Stochastic Partial Differential-Difference Equations of Neutral Type. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2021. Vol. 57. № 5. P. 764-774.
7. Yasynskyy V. K., Yurchenko I. V. Mean-Square Stability and Instability Criteria for the Gikhman-Ito Stochastic Diffusion Functional Differential Systems Subject to External Disturbances of the Type of Random Variables. *Cybernetics and Systems Analysis*. 2023. Vol. 59. № 2. P. 283-295.

**В. Бараннік\***, д-р техн. наук, професор,  
**Р. Онищенко\*\***,  
**К. Ревва\*\***,  
**С. Шульгін\*\***

\*Харківський національний університет  
імені В. Н. Каразіна, м. Харків,

\*\*Харківський національний  
університет радіоелектроніки, м. Харків

## **МОДЕЛЬ КОМПРЕСІЙНОГО КОДУВАННЯ ВІДЕОСЕГМЕНТІВ**

Існує велика кількість різних відеосервісів щодо створення інформаційного простору. Якісні характеристики відеосервісних додатків постійно поліпшуються [1]. З одного боку це зумовлено збільшенням продуктивності інфокомунікаційних мереж та систем. В той же час, з іншого боку виникає дисбаланс [2-4]. Він зумовлений такими факторами [5; 6]:

- обмеженими пропускними здатностями сучасних інфокомунікацій;
- вплив на зменшення пропускної здатності з боку супротивника, в ому числі руйнування сегментів інфокомунікаційної системи, знищення обладнання електронних мереж, пошкодження об'єктів енергетичної інфраструктури;
- пікове збільшення навантаження на мережі передачі даних під час кризових ситуацій.

Звідси маємо такі негативні наслідки [7]:

- 1) втрата властивостей інформаційного ресурсу, в тому числі оперативності, актуальності та достовірності;
- 2) створення вразливих факторів щодо втрати належного рівня інформаційної безпеки;
- 3) утворення дестабілізуючих факторів відносно підвищення ефективності проведення деструктивних інформаційних та кібернетичних атак супротивником;
- 4) втрата якості управління в системах критичної інфраструктури;
- 5) створення умов для дестабілізації населення в окремих регіонах.

Отже край важливим є усунення або локалізація дисбалансів між інформаційним навантаженням та вимогами сучасних сервісів з одного боку, та обмеженими характеристиками сучасних інфокомунікацій щодо їх продуктивності.

Для цього створюється та використовується комплекс різних інформаційно-технічних концепцій та засобів.

Водночас аналіз відеоінформаційних ресурсів (стаціонарних відеозображень, панорамних аерофотознімків, динамічних потоків відеокад-

рів) показав наявність для них значної кількості різних залежностей, в тому числі семантичних, структурно-статистичних та психовізуальних [5]. Це дозволяє стверджувати щодо потреби у розвитку технологій кодування відеоданих. З одного боку врахування таких залежностей дозволяє побудувати формати представлення відеоданих, які мають множинну переважних властивостей. З іншого боку існуючі концепції щодо розробки методів форматування відеоданих та їх ефективного синтаксичного представлення мають певні обмеження.

Звідси існує актуальна науково-прикладна проблема, яка стосується створення нових методів форматування та обробки відеоданих в умовах встановлення та врахування різних типів залежностей відеоданих для збільшення ефективності сучасних відеосервісів та інформаційного забезпечення соціо-технічного простору.

Можливі напрямки щодо вирішення даної проблеми стосуються в більшій мірі використання технологій кодування відеоданих [5]. Це створює вразливості у разі використання таких технологій для інформаційного супроводу систем М2М. Отже існує протиріччя між з одного боку наявністю особливостей відео контенту та обмеженими можливостями існуючих технологій кодування щодо їх встановлення.

Локалізація означеного протиріччя полягає у [5]:

- застосування нерівномірних структурних складових відеосегментів для встановлення та виявлення залежностей та особливостей відео контенту;
- застосування контрольованих локально-рівномірних конструкцій для побудови кодового формату компактного синтаксичного опису відеокадрів;
- надання переваги щодо встановлення та скорочення кількості надмірності не зв'язаної з процесом внесення спотворень;
- створені умов для поширеного застосування технологій штучного інтелекту.

Отже потрібно розробити технологічну концепцію відносно врахування контекстно-зв'язаних залежностей в нерівномірних структурних складових відеосегментів.

Тому мета статті полягає у розробці формату відеокадру на основі системи нерівномірних структурних складових відеосегментів для підвищення ефективності технологій компресійного кодування без втрати достовірності інформації.

Створено концепцію блокового кодування нерівномірних діагональних послідовностей в двовимірному спектральному просторі трансформанти на основі формування кодового значення  $E_{l,\xi}^{(\tau)}$  усічено-позиційним числам. Це дозволяє врахувати комбінаторні конфігу-

рації трансформанти за нерівномірною діагональною текстурою та усунути кількість відповідних типів надмірності без втрати цілісності відеоінформації.

### Список використаних джерел:

1. Barannik V. Technology of Structural-Binomial Coding to Increase the Efficiency of the Functioning of Computer Systems. *2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*. Kyiv, 2022. P. 96-100. DOI: 10.1109/ATIT58178.2022.10024205.
2. Chen T.-H., Wu Ch.-S. Efficient multi-secret image sharing based on V. Barannik, A. Krasnorutsky, V. Kolesnik, V. Barannik, S. Pchelnykov, P. Zeleny Compression method in terms of ensuring the fidelity of video images in infocommunication networks. *Radioelectronic and Computer Systems*. 2022. № 4 (100). P. 10-24. DOI: 10.32620/reks.2022.5/09.
3. Krasnorutsky A., Onyshchenko R., Barannik D., Barannik V. The Methods of Intellectual Processing of Video Frames in Coding Systems in Progress Aeromonitor to Increase Efficiency and Semantic Integrity. *2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*. Kyiv, 2022. P. 53-56. DOI: 10.1109/ATIT58178.2022.10024208.
4. Barannik V., Babenko Y., Barannik V., Kolesnyk V., Zhuikov D. Method Taking into Account Level of Structural and Statistical Saturation of Video Segments in the Coding Process. *2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*. Kyiv, 2022. P. 66-71. DOI: 10.1109/ATIT58178.2022.10024193.
5. Barannik V., Shulgin S., Barannik N., Barannik V. Method of Coding Subbands of Non-Homogeneous Spectrum of Video Segments in Uneven Diagonal Space. *2022 IEEE 4th International Conference on Advanced Trends in Information Theory (ATIT)*. Kyiv, 2022. P. 72-75. DOI: 10.1109/ATIT58178.2022.10024236.

**О. В. Слободянюк**, канд. техн. наук

Кам'янець-Подільського національного університету  
імені Івана Огієнка, м. Кам'янець-Подільського

### ЧАСТОТНІ МЕТОДИ ПРИХОВУВАННЯ ДАНИХ В АУДІО КОНТЕЙНЕРАХ

Стеганографічне приховування даних в аудіоконтейнерах за допомогою методів, що працюють у частотній області обробки аудіопотоків, є перспективним напрямком у сфері інформаційної безпеки. Цей підхід використовує різні перетворення та методи для стеганографічного захисту, який є складним для дешифрування та забезпечує високий ступінь захисту даних.

Переважає більшість найсучасніших досліджень та публікацій що стосуються напрямку дослідження й розробки методів стегано-

рафічного приховування даних в аудіоконтейнерах зосереджені на операціях модифікування даних у частотній області аудіо потоку. 1. Формулювання проблеми та огляд методів:

Ці методи, як правило, використовують модифікацію частотних компонентів аудіосигналу для інтеграції прихованих даних. Частотні методи мають переваги над методами, що працюють у часовій області, завдяки своїй високій стійкості до втрат та спотворень, що виникають під час обробки аудіо.

Одним із найбільш поширених груп методів є використання дискретного косинусного перетворення (DCT) та дискретного хвильового перетворення (DWT). Ці методи дозволяють вбудовувати дані у високочастотні компоненти аудіо, які менш помітні для людського слуху та мають більшу стійкість до спотворень.

У праці [8] автори пропонують метод приховування даних за допомогою дискретного вейвлетного перетворення DWT, що характеризується високим рівнем стійкості до спотворень, що можуть виникати в процесі аудіо компресії та інших обробок. У статті [3] описується розробка покращеного алгоритму стеганографії, який використовує модифікацію частотних компонентів аудіо. Автори зазначають, що запропонований метод здатен забезпечити доволі високу якість прихованої передачі аудіо даних.

До основних переваг частотних методів полягають у їх високій стійкості до аудіо компресії та інших видів обробки. Однак, складність реалізації та обчислювальні витрати можуть бути вищими, ніж у методів, що працюють у часовій області. Також існує ризик помітності змін у спектрі аудіо при надмірному вбудовуванні даних.

Розглянемо перспективні напрямки досліджень, що стосуються стеганографічних методів у частотній області: розробка алгоритмів з низькою обчислювальною складністю, збільшення стійкості нових методів до впливу на них результатів аудіо компресії та спотворень.

Одним із перспективних напрямків є розробка комбінованих методів, які використовують переваги як часових, так і частотних підходів для досягнення оптимального балансу між прихованістю та стійкістю. Ще одним перспективним напрямком є розробка методів на основі дискретного косинусного перетворення (DCT) [6]. У публікації автори пропонують алгоритм аудіостеганографії, який використовує DCT для розміщення прихованих даних у частотній області. Використання хаотичних систем додатково підвищує безпеку алгоритму, роблячи його стійким до виявлення.

Методи на основі дискретного вейвлетного перетворення (DWT) є доволі популярними серед дослідників у всьому світі. У дослідженні [4] пропонується новий підхід до аудіостеганографії із вико-

ристанням DWT, що дозволяє ефективно приховувати дані в низько-частотних підсмугах сигналу, забезпечуючи таким чином стійкість до стиснення та проведення криптографічних атак.

Наступну групу представляють методи, що працюють на базі швидкого перетворення Фур'є (ШПФ) [2]. У цьому дослідженні авторами запропоновано метод аудіостеганографії, що використовує FFT для розміщення даних у спектральній області. Ще однією групою є так звані адаптивні методи. Адаптивні методи стеганографічного приховування забезпечують баланс між непомітністю та міцністю прихованої інформації.

Дослідники Nguyen, T. M. Та Vo, A. T. У праці [3] представляють групу методів, що будуються на основі комбінації частотних методів. Ними було запропоновано гібридний підхід до аудіостеганографії, що використовує як DWT, так і FFT. Такий метод, на переконання його авторів, здатен забезпечувати високу стійкість до атак на виявлення та спроб розшифровки прихованих даних.

Отже провівши аналіз вищезазначених досліджень можна зробити висновок, що найкращі результати показують методи та алгоритми, що використовують одночасно декілька підходів. Балансування між використанням характеристик у частотній, спектральній областях може забезпечити кращі результати. Однак при цьому слід враховувати початкові умови, тип контейнерів, характер секретних повідомлень та їх статистичні або структурні параметри. URL: [<https://www.mdpi.com/2079-9292/11/2/181>] (<https://www.mdpi.com/2079-9292/11/2/181>).

### Список використаних джерел:

1. Dahiya V., Jain R. A High Capacity Data Hiding Approach using Audio Steganography. *Journal of Engineering Science and Technology*. 2020. URL: <https://t.ly/fwn11>
2. Dey S., Pramanik S., Chattopadhyay S. Robust Audio Steganography Technique Based on Discrete Cosine Transformation. *Advances in Intelligent Systems and Computing*. 2023. URL: <https://t.ly/tL5sG>
3. Liu Q., Zhang W. Improved Audio Steganography Algorithm Based on Frequency Domain. *International Journal of Digital Content Technology and its Applications*. 2021. Vol. 15 (4). P. 45-52.
4. Nguyen V. H., Hoang V. N. High Capacity Audio Steganography based on Adaptive Embedding Strategy. *Multimedia Tools and Applications*. 2019. URL: <https://t.ly/noB-j>
5. Patel M., Prasad A. A New Approach to Audio Steganography using Discrete Wavelet Transform.
6. Ravikumar G., Ranganayakulu S. V. Enhanced Audio Steganography using LSB Matching and Discrete Wavelet Transform. *International Journal of Information Technology and Computer Science*. 2022. URL: <https://ijitcs.org/index.php/ijitcs/article/view/1943>

7. Sahu P. K., Panda S. K., Panda, S. K. An Improved Audio Steganography Scheme for Robust and Secure Data Transmission. *Security and Communication Networks*. 2020. Article ID 9218045. URL: <https://t.ly/ESPWa>.
8. Sharma M., Singh A. An Efficient Audio Steganography Technique Based on Discrete Wavelet Transform. *Journal of Signal Processing*. 2020. Vol. 34 (2). P. 123-130.
9. Wang J., He D. A Secure and Robust Audio Steganography Algorithm Based on DCT and Chaotic System. *Sensors*. 2020. Vol. 20 (4). P. 1235. URL: <https://www.mdpi.com/1424-8220/20/4/1235>
10. Zhou X., Guo H., Liu L. Improved Robust Audio Steganography Scheme Based on Logistic Map and Genetic Algorithm. *Security and Communication Networks*. 2021. URL: <https://t.ly/I4J>.



## ЗМІСТ

### Доповіді

**Митько Л. О.**

Науковий доробок та спадщина Анатолія Федоровича Верляня.....3

**Хіміч О. М.**

Математичне моделювання: інновації, проблеми і перспективи.....8

**Verlan Andriy**

Smart Energy Lab: Intelligent Multi-Agent Environment  
for Smart Energy System Modelling, Design and Training ..... 10

**Cherevko I. M., Piddubna L. A., Matwiy O. V., Pika S. A.**

Approximation Schemes for Differential-Difference  
Equations and Their Applications ..... 12

**Kovalenko O., Velev D., Karevina N., Li L.**

Situational Agents in Disaster Risk  
Management Problems Decision ..... 14

**Федорчук В. А., Іванюк В. А.**

Інтегральні моделі в задачах відновлення вхідних сигналів  
нелінійних вимірювальних перетворювачів ..... 16

### Секція 1. ІНТЕГРАЛЬНІ МЕТОДИ В ЗАДАЧАХ МАТЕМАТИЧНОГО ТА КОМП'ЮТЕРНОГО МОДЕЛЮВАННЯ

**Sytnyk O. O., Klyuchka K. M., Protasov S. Yu., Kyselova H. O.**

Application of Integral Dynamic Models  
for Research Of Electrical Circuits ..... 20

**Геселева К. Г.**

Побудова наближеного розв'язку одного типу  
інтегро-функціональних рівнянь з малою нелінійністю..... 22

**Лluca А. С., Павленко В. Д.**

Інструментальні засоби організації хмарних обчислень  
в задачах ідентифікації нелінійних динамічних систем ..... 24

**Павленко В. Д., Лукашук Д. К.**

Дослідження точності ідентифікації окуло-моторної  
системи на основі інтегральних моделей ..... 26

### Секція 2. ПИТАННЯ ОПТИМІЗАЦІЇ ОБЧИСЛЕНЬ

**Zadiraka V. K., Tereshchenko A. M., Shvidchenko I. V.**

S-Word Arithmetic and High Precision Computations ..... 28

<b>Білушак Ю. І.</b> Метод чисельного знаходження подвійних інтегралів зі змінною областю інтегрування .....	30
<b>Луц Л. В.</b> Оптимальне за точністю інтегрування швидкоозцилювальних функцій для підінтегральних функцій, що мають неперервну другу похідну .....	32
<b>Щирба В. С.</b> Організація обчислювальних процедур при побудові оптимізаційної траєкторії літального апарату .....	34
<b>Сидорук В. А., Павлюк А. В.</b> Деякі способи використання паралельних обчислень в прикладних задачах .....	35

### Секція 3. СТРАТЕГІЇ ТА ІННОВАЦІЇ В ІТ-ОСВІТІ

<b>Жолтовський О. О.</b> Програмна агрегація контенту для вивчення іноземної мови .....	38
<b>Кравчук О. В.</b> Форми використання інформаційних технологій в освітньому процесі .....	39
<b>Кух О. М., Кух А. М.</b> Моделювання обертання маятника Фуко засобами GNU OCTAVE.....	41
<b>Кух О. М., Кух А. М.</b> Цифрова компетентність і цифрове громадянство .....	44
<b>Моцик Р. В.</b> Вплив штучного інтелекту на онлайн-навчання .....	47
<b>Гончар Р. Я., Іванюк В. А., Мястковська М. О., Понеділок В. В.</b> Рефакторинг інформаційного середовища кафедри закладу вищої освіти на основі сучасних інноваційних підходів.....	49

### Секція 4. СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ І ПРИЙНЯТТЯ РІШЕНЬ

<b>Зеленський О., Фенцур М., Динич А., Стремедловський П.</b> Комбінаторний аналіз в моделюванні лотерей: визначення мінімальної кількості білетів для гарантованого виграшу.....	51
<b>Іванюк В. А., Кушнір О. К.</b> Побудова моделей інтелектуального аналізу даних .....	52
<b>Панчелюга О. П., Жуковський В. В.</b> Деякі аспекти виявлення нерозірваних боєприпасів та мін за допомогою глибокого навчання на основі термальних зображень .....	54
<b>Пилипюк Т. М.</b> Прийняття рішень в умовах невизначеності .....	56

<b>Порохнавець А. А.</b>	
Моделювання інвестиційної діяльності з криптоактивами .....	57
<b>Решетняк П. Ю.</b>	
Система онтологій для моніторингу стану захищеності телекомунікаційних послуг .....	59

## **Секція 5. МАТЕМАТИЧНЕ ТА КОМП'ЮТЕРНЕ МОДЕЛЮВАННЯ У ПРИКЛАДНИХ ЗАДАЧАХ**

<b>Blagitko B., Myronyuk D., Zajachuk I., Bodakovskiy Y.</b>	
Latency Image Recognition Benchmark in Real-Time .....	62
<b>Nikitin A. V., Krasiuk B. V.</b>	
Multidimensional Model of Information Warfare with Consideration of Random Factors .....	64
<b>Palahin V., Palahina O., Ivchenko O., Smirnov D., Zorin O.</b>	
Polynomial Methods and Algorithms for Signals Detection and Distinction in Non-Gaussian Noise .....	66
<b>Бак С. М., Ковтонюк Г. М.</b>	
Про існування біжучих хвиль в системах типу Фермі-Пасти-Улама з нелокальною взаємодією на двовимірній ґратці .....	68
<b>Барановський С. В., Бомба А. Я.</b>	
Модифікація моделі вірусної інфекції для урахування дифузійних збурень, конкурентної адсорбції в умовах температурної реакції організму .....	70
<b>Бігун Я. Й., Квасецький Я. А.</b>	
Математична модель поширення епідемії з лікуванням із запізненням .....	72
<b>Малачівський П. С., Мельничок Л. С.</b>	
Мінімаксне наближення логарифмом від раціонального виразу .....	73
<b>Максимюк В. А., Ушакова В. С., Ушаков О. В.</b>	
Про верхню оцінку напружень і деформацій у водяному кулеуловлювачі .....	75
<b>Глухов Ю. П.</b>	
Захищений пружним шаром стисливий попередньо напружений півпростір при рухомому навантаженні .....	77
<b>Громик А. П., Конет І. М., Пилипюк Т. М.</b>	
Параболічні крайові задачі математичної фізики в напівобмеженому кусково-однорідному клиновидному порожнистому циліндрі .....	80
<b>Гудима У. В., Гнатюк В. О.</b>	
Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукування узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого поліномованого простору відносно множини цього простору .....	82

<b>Дорош А. Б., Дорош І. В., Перцов А. С.</b> Моделювання динаміки накопичення біомаси та каротиноїдів у мікрододорослях .....	84
<b>Ємець К. В.</b> Адаптація архітектури трансформерів для прогнозування часових рядів .....	86
<b>Задорожний В. В., Смалько О. А.</b> Модель криптоблокчейну з посиленням захистом конфіденційності .....	88
<b>Зубілевич А. В.</b> Масштабування інформаційно-аналітичних документоборотних систем.....	90
<b>Кириленко М. Д., Щирба В. С.</b> Оптимізація траєкторії літального апарату на прикладі балістичної ракети .....	92
<b>Клевчук І. І., Щур О. І.</b> Квазіоптимальна стабілізація лінійних керованих сингулярно збурених систем із запізненням .....	93
<b>Коваль І.</b> Створення та тестування універсальної моделі попередньої обробки тексту у середовищі Orange Data Mining .....	94
<b>Ковальська І. Б., Радзівська О. І.</b> Співвідношення між константами Сеґе за різними еквівалентними системами елементів Банахового простору .....	96
<b>Косович І. Т., Черевко І. М., Краснокутський О. С.</b> Агентно-орієнтоване моделювання поширення епідемій .....	98
<b>Максимюк В. А., Сторожук Є. А.</b> Про перетворення координат в задачах концентрації напружень біля еліптичного отвору в сферичній оболонці .....	100
<b>Малачівський Р. П.</b> Застосування для опису термометричної характеристики термісторів NTC .....	102
<b>Положаєнко С. А., Прокоф'єв А. Ю.</b> Оцінювання розв'язків задач моделювання динамічних систем на основі методу ранжування за похибкою .....	104
<b>Савельєв А. А., Прокоф'єва Л. Л.</b> Математична модель реалізації енергозощадливого динамічного режиму у фрактально-неоднорідних структурах .....	106
<b>Смалько О. А.</b> Математичні основи комп'ютерного моделювання деяких компонентів цифрового ландшафту .....	108
<b>Снайчук Я. Л., Обельовська К. М.</b> Маршрутизація пакетів у комп'ютерній мережі з недовіреними маршрутизаторами.....	110

<b>Станіславів О. С.</b>	
Генерація тривимірного ландшафту з використанням методу моделювання гідравлічної ерозії на основі частинок .....	112
<b>Сторожук Є. А., Чернишенко І. С.</b>	
Математичне моделювання пружного деформування циліндричної оболонки змінної товщини за дії динамічного навантаження .....	113
<b>Фомін О. О., Літинський В. В., Татарин О. В.</b>	
Математична модель динаміки в гетерогенних системах з проміжним «агентом» .....	115
<b>Чабанюк Я. М., Нікітін А. В., Чипурко Р. А.</b>	
Генератор задачі керування для дифузійного процесу в схемі Леві в напівмарковському середовищі .....	117
<b>Чабанюк Я. М., Степаняк О. Б.</b>	
Збіжність процедури стохастичної апроксимації моделі Шахта-Сантона з напівмарковськими переключеннями .....	118
<b>Чабанюк Я. М., Хімка У. Т., Литвин А. А.</b>	
Задача керування для дифузійної моделі епідемії з напівмарковськими змінами коефіцієнтів .....	119
<b>Чабанюк Я. М., Хімка У. Т., Семенюк С. А.</b>	
Генератор стохастичної еволюції з марковсько-модульованим Пуассонівським шумом .....	120
<b>Червко І. М., Щур Т. В., Коньяков А. Г.</b>	
Числове моделювання початкових задач для диференціальних рівнянь із запізненням .....	121
<b>Чернуха О. Ю.</b>	
Моделювання потоків домішкової речовини у двофазному стохастично неоднорідному тілі з прошарками випадкової товщини .....	123
<b>Чернуха Ю. А.</b>	
Математичне та комп'ютерне моделювання дифузійних процесів за дії системи випадкових точкових джерел маси при заданій статистиці .....	125
<b>Чучвара А. Є.</b>	
Комп'ютерне моделювання перенесення маси у випадково неоднорідній смузі з кульовими включеннями на нижній границі тіла .....	127
<b>Юрченко І. В., Ясинський В. К.</b>	
Дослідження поведінки розв'язків стохастичних диференціальних рівнянь у частинних похідних з випадковими параметрами в правій частині .....	129
<b>Бараннік В., Онищенко Р., Ревва К., Шульгін С.</b>	
Модель компресійного кодування відеосегментів .....	131
<b>Слободянюк О. В.</b>	
Частотні методи приховування даних в аудіо контейнерах .....	133

Національна академія наук України  
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка  
Інститут кібернетики імені В. М. Глушкова НАН України  
Інститут проблем моделювання в енергетиці ім. Г. Є Пухова НАН України  
Національний технічний університет України «Київський  
політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»  
Національний університет «Одеська політехніка»  
Черкаський державний технічний університет  
Національний університет водного господарства та природокористування  
Вінницький державний педагогічний університет імені Михайла Коцюбинського  
Norwegian University of Science and Technology (Gjøvik, Norway)  
University of National and World Economy (Sofia, Bulgaria)  
Lublin University of Technology (Lublin, Poland)  
Atatürk University (Erzurum, Turkey)  
Tashkent State Technical University named after Islam Karimov (Tashkent, Uzbekistan)

НАУКОВЕ ВИДАННЯ

## **СУЧАСНІ ПРОБЛЕМИ МАТЕМАТИЧНОГО МОДЕЛЮВАННЯ, ПРОГНОЗУВАННЯ ТА ОПТИМІЗАЦІЇ**

ТЕЗИ ДОПОВІДЕЙ

10-ї Міжнародної наукової конференції  
пам'яті почесного професора

Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка,  
д.т.н., професора, почесного академіка НАПНУ  
Анатолія Федоровича ВЕРЛАНЯ

Електронне видання

---

Підписано 12.07.2024. Формат 60x84/16. Гарнітура «Times».  
Об'єм даних 3,21 Мб. Обл.-вид. арк. 8,6. Зам. № 1117.

Кам'янець-Подільський національний університет  
імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.  
Свідоцтво серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.

Виготовлено в Кам'янець-Подільському національному  
університеті імені Івана Огієнка,  
вул. Огієнка, 61, м. Кам'янець-Подільський, 32300.