Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Ю.В. ТЕПЛІНСЬКИЙ
Ю.Л. СМОРЖЕВСЬКИЙ
О.В. ЗЕЛЕНСЬКИЙ

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання

Кам’янець-Подільський
2024

УДК 514.18 (075)
ББК 22.151.54
Т34

Рекомендувала рада з науково-методичної роботи і забезпечення якості вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 10 від 29 жовтня 2024 року.

Рецензенти:

Марчук Н.А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій фізико-математичних та безпекових дисциплін Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»;

Шлапак Л.В. – викладач математики ВСП «Кам'янець-Подільський коледж Закладу вищої освіти «Подільський державний університет», спеціаліст вищої категорії;

Мрачковська О.В. – викладач математики, спеціаліст вищої категорії, викладач-методист Кам'янець-Подільського фахового коледжу індустрії, бізнесу та інформаційних технологій.

Теплінський Ю.В., Сморжевський Ю.Л., Зеленський О.В.

Т34 Задачі на побудову фігур на площині : навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. 97 с.

Навчально-методичний посібник присвячений вивченню методів розв'язування геометричних задач на побудову фігур на площині за допомогою циркуля та лінійки. Основну увагу сконцентровано саме на розв'язуванні задач. Необхідні теоретичні відомості подаються в мінімальному обсязі, що дає можливість читачеві, який володіє шкільним курсом геометрії, поступово опанувати матеріал цього посібника.

Для вчителів математики, студентів математичних спеціальностей, учнів спеціалізованих закладів загальної середньої освіти з поглибленим вивчення математики.

УДК 514.18 (075)
ББК 22.151.54

Електронна версія посібника доступна за покликанням:

URL: http://elar.kpnu.edu.ua/xmlui/handle/123456789/8465

ЗМІСТ

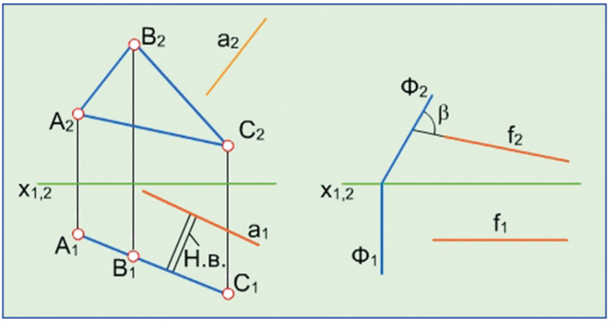
ПЕРЕДМОВА

Основу даного навчально-методичного посібника складає курс лекцій авторів для студентів фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Оскільки цей посібник розрахований для початкового вивчення предмету широким колом читачів, що мають різний рівень математичної підготовки, то необхідні теоретичні відомості тут подано у мінімальному обсязі. Так, складні і громіздкі доведення деяких теорем опускаються, а наводяться лише їх формулювання. Читачеві, який виявить бажання детально ознайомитись з технікою таких доведень, слід звернутись до більш серйозної літератури з конструктивної геометрії. Основну увагу сконцентровано на розв'язуванні задач. Частину з них розв'язано в тексті посібника, частину запропоновано для самостійного розв'язування.

Посібник присвячений ознайомленню з методами розв'язування геометричних задач на побудову фігур на площині за допомогою циркуля та лінійки. Підбір задач здійснено так, що читач при бажанні може отримати цілком достатні навички у самостійному застосуванні цих методів. Практика показує, що саме геометричні задачі на побудову фігур на площині становлять чи не найважчу проблему для учнів та абітурієнтів.

При розв'язуванні конструктивних задач на геометричному малюнку доводиться використовувати креслярські інструменти, дотримуючись при цьому певних правил та законів. Зрозуміло, що й самі малюнки при цьому повинні бути накреслені за відповідними правилами та законами.

Для формул та тверджень (означень, теорем, прикладів і т.п.) у тексті кожної теми цього посібника застосовано свою окрему нумерацію. Нумерація малюнків є суцільною. Символ ■ у тексті означає, що доведення сформульованої теореми або розв'язання прикладу завершене.



1.1. Основні поняття

Фігурою у довільному не порожньому просторі називають будь-яку множину його точок. Фігуру вважають побудованою, якщо про кожну точку простору можна сказати, належить вона цій фігурі, чи не належить. Так, наприклад, у просторі всіх дійсних чисел побудованою вважається фігура, що є множиною всіх натуральних чисел. У просторі, що складається з усіх упорядкованих трійок (x, y, z) дійсних чисел, можна вважати побудованою фігуру, яка є множиною всіх упорядкованих трійок раціональних чисел, елементи кожної з яких задовольняють систему рівнянь $\frac{x-2}{3}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-1}{25}$. Читач може самостійно навести багато аналогічних прикладів. Якщо в просторі введено певну систему координат, то фігуру вважають побудованою при умові, що знайдено систему рівнянь або нерівностей, які цю фігуру визначають. У шкільному курсі геометрії розглядають два основні точкові простори, які називають площиною і простором. Означень цим об'єктам в системі аксіом шкільної геометрії не дається. У цій книжці ми теж будемо використовувати ці поняття, не намагаючись надати їм означення, хоча на основі аксіоматики Вейля під площиною та простором можна розуміти двовимірний та тривимірний евклідові простори відповідно.

У вказаному вище сенсі побудова фігури ніяк не пов'язана з процесом креслення, тобто є суто математичною задачею. Взагалі кажучи, там, де з'являються реальні креслярські інструменти, закінчується математика як формальна наука. Проте з часів сивої давнини життєві потреби людини вимагали побудови плоских фігур зовсім в іншому сенсі, а саме: побудованою вважалась фігура, якщо вона накреслена. Такий підхід викликає багато проблем, починаючи з вибору креслярських інструментів. Після цього виникає питання про операції, які можна здійснювати з їх допомогою, і так далі. Задачі на побудову в площині становлять розділ конструктивної геометрії, успішне оволодіння яким потребує досконалого знання планіметрії та креслярських навичок. Алгоритму розв'язування таких задач не існує, тому окремі з них можуть скласти для читача досить серйозну проблему.

Надалі площину ми не будемо вважати фігурою і при розв'язуванні задач на побудову фігур у площині будемо використовувати наступні аксіоми:

1) ***кожна з даних (заданих) фігур побудована;***
2) ***якщо побудовано фігури F і G, то побудовано фігуру*** $F \cup G$;
3) ***якщо побудовано фігури F і G, перетин яких не порожній, то побудовано фігуру*** $F \cap G$;
4) ***якщо побудовано фігури F і G, що не співпадають, і*** $F \subset G$, ***то побудовано фігуру, що є їх різницею;***
5) ***якщо фігуру побудовано, то можна побудувати точку, що їй належить;***
6) ***якщо фігуру побудовано, то можна побудувати точку, що цій фігурі не належить;***
7) ***побудовану фігуру накреслено;***
8) ***якщо дві точки A і B побудовано, то можна побудувати промінь AB з вершиною A;***
9) ***якщо побудовано точку та відрізок, то можна побудувати коло з центром у цій точці, радіус якого дорівнює цьому відрізку.***

Таким чином, побудова шуканої фігури у площині зводиться до скінченої кількості найпростіших побудов, які регламентовано аксіомами 1-9:

а) ***побудова променя AB з вершиною A при умові, що різні точки A і B побудовано;***
б) ***побудова кола з центром у побудованій точці, радіус якого дорівнює побудованому відрізку;***
в) ***побудова точки перетину двох побудованих непаралельних прямих;***
г) ***побудова точок перетину побудованих кола і прямої, якщо такі точки існують;***
д) ***побудова точок перетину двох побудованих кіл, якщо такі точки існують;***
е) ***побудова точки, що належить побудованій фігурі;***
ж) ***побудова точки, що не належить побудованій фігурі.***

Зауважимо, що 7-ма аксіома пов'язана з процесом креслення, який не можна аксіоматично визначити. Якщо цю аксіому вилучити з списку і звести задачу на побудову фігури у площині до визначення скінченого ланцюжка найпростіших побудов, який веде від заданих умовою задачі фігур до шуканої, то ніяких креслярських інструментів не потрібно, задача стає суто математичною, але при цьому всі побудови виконуються лише в уяві людини.

У цій книжці ми свідомо обрали інший шлях, при якому математично строгий процес ілюзорних побудов доповнюється реальним процесом креслення.

Надалі ми використовуватимемо як креслярські інструменти лише циркуль і лінійку. Аксіоми 8 та 9 назвемо відповідно аксіомами лінійки та циркуля. Отже, за допомогою циркуля можна креслити лише кола та їх дуги, а за допомогою лінійки — лише прямі, відрізки та промені.

Робити висновок про те, чи перетинаються побудовані фігури, користуючись лише їх малюнком, не можна. Для цього додатково слід використовувати аналітичні методи дослідження. Дев'ята аксіома говорить про те, що за допомогою циркуля можна побудувати коло будь-якого радіуса. Такий циркуль часто називають *математичним циркулем*. Під лінійкою надалі розумітимемо односторонню лінійку без поділок, що має необмежену довжину *(математична лінійка)*. Така лінійка дає можливість побудувати промінь AB з вершиною A при умові, що різні точки A і B побудовано.

Постановка задач виду: "побудувати піраміду", "побудувати призму", "побудувати сферу" є некоректною щодо побудов у площині. У площині можна будувати лише зображення вказаних просторових фігур, про що буде йти мова у другому розділі цієї книжки.

Нагадаємо, що дві множини називаються рівними, якщо кожний елемент однієї з них міститься в другій, і навпаки. Тобто, рівні множини завжди співпадають. У цьому сенсі дві рівні фігури повинні співпадати, оскільки за означенням кожна фігура є множиною точок. Дві фігури називають конгруентними, якщо одну з них можна одержати з другої за допомогою руху. Щоб не ускладнювати термінологію та позначення, у подальшому тексті ми дозволяємо собі вважати конгруентні фігури рівними.

Розв'язування задач на побудову проводиться за наступною загальною схемою.

1. **Аналіз.** Встановлюються відношення між заданими та шуканою фігурами, які дають можливість визначити послідовність побудов, що розв'язують задачу. При цьому дуже часто буває корисним вважати шукану фігуру побудованою і, виходячи з цього, знаходити ці відношення. На цьому кроці можна не

використовувати креслярські інструменти, хоча не забороняється їх використання.

2. **Побудова.** Усі потрібні побудови виконуються обов'язково за допомогою циркуля і лінійки. Одночасно коротко описується хід побудов.
3. **Доведення.** Доводиться, що побудована фігура — шукана. Цей крок у розв'язуванні задачі тісно пов'язаний з аналізом.
4. **Дослідження.** Встановлюється, при яких умовах задача має розв'язок і скільки різних розв'язків може існувати в залежності від властивостей заданих фігур. Дві фігури вважаються різними, якщо вони не конгруентні. Але існують задачі, в яких береться до уваги розташування шуканої фігури по відношенню до даних фігур. Якщо таке розташування двох розв'язків задачі не однакове, то вони вважаються різними розв'язками навіть тоді, коли є конгруентними фігурами.

Задача на побудову вважається розв'язаною, якщо реалізовано всі чотири кроки запропонованої схеми.

Слід пам'ятати, що всі побудови виконуються саме на площині, а не на аркуші паперу обмежених розмірів. При цьому використовуються інструменти, що не є реальними циркулем і лінійкою. Тому у випадку, коли процес побудови шуканої фігури виводить за межі аркуша паперу, на якому відбувається креслення, не можна стверджувати, що задача не має розв'язку. Зрозуміло, що на аркуші паперу взагалі неможливо накреслити пряму, кут, промінь. Отже, надалі під час реалізації другого кроку наведеної вище загальної схеми під аркушем паперу розумітимемо частину площини, на якій здійснюються побудови, під реальним циркулем — математичний циркуль, під односторонньою лінійкою скінченої довжини — частину математичної лінійки. Будемо вважати також, що на площині побудовано промінь, якщо на аркуші паперу накреслено його відрізок, один з кінців якого співпадає з вершиною цього променя. Ця домовленість дає право вважати пряму, відрізок якої накреслено на аркуші паперу, побудованою на площині. Аналогічно розв'язується питання з побудовою кута на площині. Без таких домовленостей практична реалізація сьомої аксіоми та другого кроку загальної схеми розв'язування задач на побудову фігур у площині неможлива.

Сформулюємо 8 стандартних задач, при розв'язуванні яких легко будується ланцюжок потрібних найпростіших побудов, добре відомий з шкільного курсу геометрії:

1) побудувати кут, рівний даному;
2) поділити даний кут навпіл;

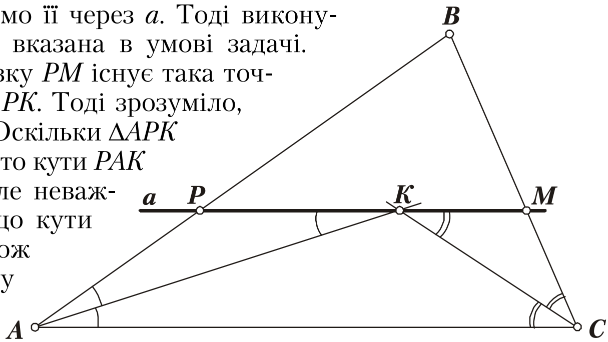
3) поділити даний відрізок навпіл;
4) побудувати перпендикуляр до даної прямої, який проходить через дану точку;
5) побудувати пряму, яка проходить через дану точку і паралельна до даної прямої;
6) побудувати трикутник, у якого задано: а) три сторони, б) сторона і прилеглі кути, в) дві сторони і кут між ними;
7) побудувати прямокутний трикутник, у якого задано: а) гіпотенуза і катет, б) гіпотенуза і гострий кут, в) катет і гострий кут;
8) побудувати дотичну до даного кола, яка проходить через дану точку.

При розв’язуванні більш складних задач ці побудови часто використовуються як допоміжні. Їх ми домовимось виконувати без обґрунтування. У формулюваннях 5-7 свідомо допущено “вільність мови”. Так, наприклад, задачу 6(а) слід було сформулювати точніше: побудувати трикутник, якщо задано три відрізки, які дорівнюють його сторонам. Ми і надалі будемо це робити з метою значного скорочення викладок, що не повинно викликати ніяких непорозумінь. Так, наприклад, слова “побудувати” і “провести” при описанні побудов вважатимемо синонімами. Якщо сенс позначення AB у тексті не визначено, то вважатимемо, що це є число, яке дорівнює довжині відрізка AB.

Розглянемо два приклади.

Приклад 1. *Задано трикутник ABC. Побудувати пряму, яка паралельна до прямої AC, перетинає сторони AB та BC у точках P та M відповідно, і при цьому $AP + MC = PM$.*

Розв’язання. Проведемо спочатку **аналіз**. Нехай ABC — даний трикутник (*мал. 1*). Припустимо, що шукана пряма побудована і позначимо її через a. Тоді виконується рівність, вказана в умові задачі. Отже, на відрізку PM існує така точка K, що $AP = PK$. Тоді зрозуміло, що $KM = MC$. Оскільки ΔAPK рівнобедрений, то кути PAK і PKA рівні. Але неважко помітити, що кути PKA і KAC також рівні. У цьому разі відрізок AK належить



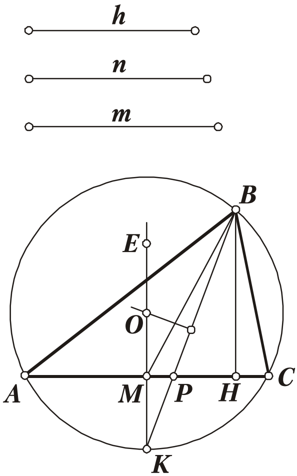
Мал. 1

бісектрисі кута BAC. Аналогічно доводиться, що відрізок CK належить бісектрисі кута BCA. Таким чином, точка K є точкою перетину цих двох бісектрис. Це дозволяє виконати **ланцюжок побудов**:

1) будуємо бісектриси кутів BAC і BCA;
2) будуємо точку K перетину цих бісектрис;
3) через точку K проводимо пряму, паралельну до прямої AC.

Побудована пряма — шукана. **Доведемо це твердження**. Оскільки побудована пряма та пряма AC паралельні за побудовою і пари кутів PAK та KAC, MCK та ACK відповідно рівні (теж за побудовою), то трикутники APK і KMC — рівнобедрені. Звідси одразу випливає рівність $AP + MC = PM$, що завершує доведення. **Дослідження** слід пов'язувати з ланцюжком проведених побудов. Усі вони завжди виконуються, причому однозначно. Висновок: задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Приклад 2. *Побудувати трикутник ABC, якщо задано його висоту, бісектрису і медіану, які проведено з вершини B.*



Мал. 2

Розв'язання. Проведемо спочатку **аналіз**. Припустимо, що трикутник ABC — шуканий і у ньому BH — висота, BM — медіана. Опишемо навколо цього трикутника коло, центр якого позначимо через O (*мал. 2*). Очевидно, що пряма OM перпендикулярна до прямої AC.

Точку перетину прямої OM з побудованим колом позначимо через K. Оскільки точка K ділить дугу AKC навпіл, то відрізок BK містить у собі бісектрису BP кута ABC. Оскільки точки B і K належать колу, то його центр лежить на серединному перпендикулярі, встановленому до відрізка BK. Проведені міркування дозволяють виконати наступні **побудови**:

1) будуємо прямокутний трикутник BHM за катетом (даною висотою h) і гіпотенузою (даною медіаною m);
2) будуємо пряму ME, паралельну до прямої BH;
3) будуємо точку P, оскільки відрізок BP (бісектриса n кута ABC) заданий;
4) будуємо точку K перетину прямих BP і ME;

5) будуємо серединний перпендикуляр до відрізка BK і точку O перетину його з прямою MK;

6) будуємо коло з центром у точці O, радіус якого дорівнює відрізку OB, і точки A та C перетину останнього кола з прямою AC. Трикутник ABC — шуканий.

Доведення. Прямі BH і AC перпендикулярні, відрізки $BH = h$, $BM = m$ (все це за побудовою). Точка M є серединою відрізка AC, оскільки вона є основою перпендикуляра, опущеного з точки O (центр кола) на хорду AC. Кути ABP і PBC рівні, оскільки точка K є серединою дуги AKC.

Дослідження. Трикутник MBH будується, якщо $m > h$. Легко бачити, що при умові $h < n < m$, усі проведені побудови однозначно виконуються, тобто задача має єдиний розв'язок. Якщо $h = n = m$, то шуканий трикутник рівнобедрений, і задача має безліч розв'язків. При всіх інших співвідношеннях між даними елементами задача розв'язку не має. ■

Нижче ми наводимо умови задач, що входять до шкільних підручників з геометрії, розв'язування яких не вимагає застосування спеціальних методів, про які буде йти мова у цьому посібнику. Радимо читачеві оцінити свої можливості, розв'язавши запропоновані нижче задачі. Це становитиме перший крок до успішного засвоєння подальшого матеріалу.

Задачі підготовчого рівня

1. Побудувати коло даного радіуса, що проходить через дві дані точки.
2. Побудувати коло, яке вписане в даний трикутник.
3. Побудувати коло, яке описане навколо даного трикутника.
4. Вписати в дане коло правильний дванадцятикутник.
5. Описати навколо даного кола правильний трикутник (правильний восьмикутник).
6. Через дану точку провести дотичні до даного кола. Побудувати спільні дотичні до двох даних кіл.
7. Поділити даний кут на чотири рівні частини. Побудувати кути градусною мірою 30, 45 та 60 градусів. Побудувати кут, косинус якого дорівнює 0,8.
8. Поділити даний відрізок на п'ять рівних частин.
9. На даній прямій побудувати точку, сума відстаней від якої до двох даних точок є найменшою.

10. На даній прямій побудувати точку, рівновіддалену від двох даних точок.

11. Чи можна побудувати трикутник з сторонами 3 см, 7 см, 11 см?

12. Повернути даний відрізок на кут у 60 градусів проти годинникової стрілки навколо даної точки.

13. Задано відрізки, що мають довжини *a, b, c, d, l*. Побудувати відрізки, довжини яких визначаються за формулами: $\frac{ab}{c}, \frac{abc}{dl}, \sqrt{ab}, \sqrt{a^2+b^2}, \sqrt{a^2-b^2}$.

14. Побудувати трикутник, якщо задано середини його сторін.

15. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою і висотою, опущеною з вершини прямого кута.

16. Побудувати трикутник за:

а) двома сторонами і радіусом описаного кола;
б) двома сторонами і кутом, протилежним до однієї з них;
в) двома сторонами і медіаною, проведеною до однієї з них;
г) двома сторонами і медіаною, проведеною до третьої сторони;
д) двома сторонами і висотою, опущеною на третю сторону;
е) двома сторонами і висотою, опущеною на одну з них;
ж) стороною та проведеними до неї медіаною і висотою;
з) стороною, прилеглим до неї кутом і відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжин двох інших сторін;
і) стороною, прилеглим до неї кутом і відрізком, довжина якого дорівнює різниці довжин двох інших сторін;

17. Побудувати рівнобедрений трикутник за основою та радіусом описаного кола.

18. Побудувати прямокутний трикутник за катетом та відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжин другого катета і гіпотенузи.

19. Побудувати трикутник за стороною, медіаною, проведеною до неї, та радіусом описаного кола.

20. Побудувати ромб за:

а) діагоналлю і протилежним кутом;
б) стороною і діагоналлю;
в) двома діагоналями.

21. Побудувати паралелограм за:

а) стороною і діагоналями;
б) діагоналями і кутом між ними.

22. Поділити даний паралелограм на три рівновеликі частини двома прямими, що проходять через одну з його вершин (побудувати ці прямі).
23. Побудувати трапецію за: а) основами та бічними сторонами; б) основами та діагоналями.

1.2. Метод перерізів (геометричних місць точок) розв'язування задач на побудову

Часто трапляється, що розв'язування задачі зводиться до побудови точки, яка має дві певні властивості: A і B. Якщо вдається побудувати множину $N(A)$ усіх точок площини, які задовольняють властивість A, і множину $M(B)$ усіх точок площини, які задовольняють властивість B, то шукана точка повинна належати перерізу цих множин. Звісно, що цей переріз може в різних випадках складатися з однієї точки, кількох точок, нескінченної кількості точок або бути порожньою множиною. Усі ці випадки підлягають окремому дослідженню.

Множину всіх точок площини, кожна з яких задовольняє певну властивість, називають геометричним місцем точок площини (ГМТ), що задовольняють цю властивість. Отже, множина $N(A)$ є ГМТ, що задовольняють властивість A, а множина $M(B)$ — ГМТ, що задовольняють властивість B. Таким чином, поставлена задача зводиться до відшукання перерізу двох ГМТ. Зрозуміло, що для застосування методу перерізів треба вміти будувати ГМТ, використовуючи його визначальну властивість. Алгоритму для розв'язування задач такого типу не існує. Можна лише порадити використати один з двох наступних шляхів міркувань.

Шлях 1. Побудувати фігуру F, якій належить шукане ГМТ. Після цього перевірити аналітичним способом, чи належить довільна точка фігури F шуканому ГМТ. Якщо відповідь на це запитання позитивна, то шукане ГМТ співпадає з фігурою F і є побудованим. У протилежному випадку ГМТ не є побудованим і слід шукати спосіб вилучення з фігури F тих точок, які не належать шуканому ГМТ.

Шлях 2. Побудувати фігуру G, що належить шуканому ГМТ. Після цього перевірити аналітичним способом, чи належить довільна точка площини, яка не належить фігурі G, шуканому ГМТ. Якщо відповідь на це запитання негативна, то шукане ГМТ — співпадає з фігурою G і є побудованим. У протилежному випадку ГМТ не є побудованим і слід шукати спосіб відшукання тих точок площини, які належать шуканому ГМТ і не належать фігурі G.

Нагадаємо ГМТ, добре відомі з шкільного курсу геометрії:

а) ГМТ, рівновіддалених від даної точки — коло;

б) ГМТ, рівновіддалених від даної прямої — об’єднання двох прямих, паралельних до даної прямої;

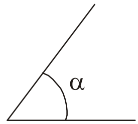
в) геометричне місце внутрішніх точок даного кута, рівновіддалених від його сторін — бісектриса даного кута.

Надалі розглядатимуться лише ті ГМТ, які можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки. Саме такі ГМТ можуть стати в пригоді при розв’язуванні задач на побудову згідно нашої домовленості про вибір інструментів, якими можна користуватися. Звичайно, існують ГМТ, які за допомогою циркуля і лінійки не будуються. Наприклад, ГМТ, сума відстаней від кожної з яких до двох даних точок є стале число, яке перевищує відстань між даними точками, є еліпс, який, як відомо, не складається з дуг кіл та відрізків прямих, якщо тільки його осі не є рівними (тоді еліпс є колом). За допомогою вказаних інструментів цю фігуру побудувати неможливо.

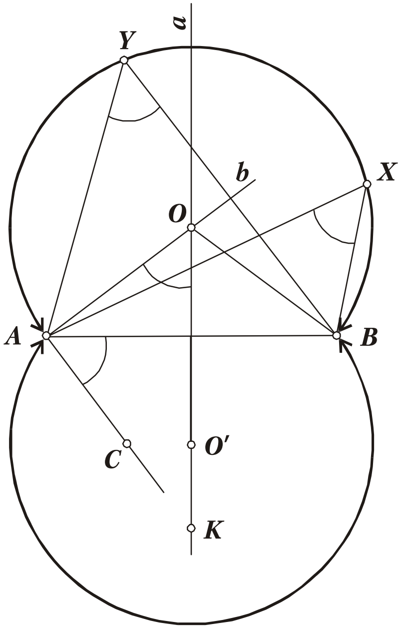
Наведемо приклади ГМТ, які часто застосовуються при розв’язуванні задач.

Приклад 1. *Побудувати ГМТ, з кожної точки якого заданий відрізок видно під даним кутом, градусна міра якого більша від 0 і менша від 180 градусів.*

Розв’язання. Нехай A і B — задані точки, α — заданий кут. Припустимо, що X — довільна точка, що належить шуканому ГМТ. Це означає, що кут AXB дорівнює куту α. Опишемо коло навколо трикутника AXB. Кожна точка Y дуги AXB цього кола, за винятком точок A і B, належить шуканому ГМТ, оскільки кути AXB і AYB рівні, бо вони є вписаними в побудоване коло кутами, що спираються на одну дугу. Отже, фігура E, що є дугою AXB без кінцевих точок, входить до шуканого ГМТ. Очевидно, до нього входить і фігура F, симетрична з фігурою E відносно прямої AB. Об’єднання фігур E та F позначимо через Q. Таким чином, фігура Q міститься у шуканому ГМТ. Неважко показати, що довільна точка площини, яка не належить фігурі Q, не належить шуканому ГМТ (пропонуємо це довести читачеві самостійно). Висновок: фігура Q є шуканим ГМТ. Зауважимо, що для проведення цих міркувань був використаний другий із запропонованих шляхів. Тепер виконаємо побудову цього ГМТ (*мал. 3*):



1) будуємо кут *BAC,* рівний куту α, як вказано на *малюнку 3*;
2) будуємо серединний перпендикуляр *a* до відрізка *AB* та перпендикуляр *b* до прямої *AC* в точці *A*. Легко бачити, що прямі *a* і *b* перетинаються у точці, яку позначено через *O*;
3) будуємо коло з центром в точці *O,* радіус якого дорівнює відрізку *OA*;
4) будуємо фігуру, симетричну дузі *AXB* відносно прямої *AB*. Об'єднання двох останніх дуг без точок *A* та *B* і є шуканим ГМТ.

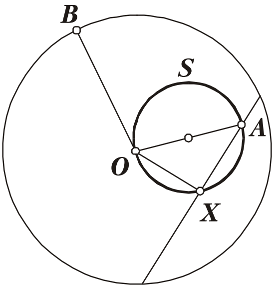


Мал. 3

Доведення. Кути *BAC* і *AOK* рівні як кути з попарно перпендикулярними сторонами. Кути *AOK* і *KOB* теж рівні, в чому легко переконатися. Таким чином, кут *AOB* дорівнює 2α. Цей кут є центральним для кола (*O, OA*) і він спирається на його дугу *AB*. Кут *AXB* є для вказаного кола вписаним кутом, що спирається на ту ж саму дугу. Зрозуміло, що кут *AOB* удвічі більший за кут *AXB,* тобто кут *AXB* дорівнює куту α. Завершіть доведення самостійно. Усі вказані побудови однозначно виконуються. Отже, задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Приклад 2. *Побудувати геометричне місце середин хорд даного кола, що проходять через дану точку.*

Розв'язання. Нехай коло (*O, OB*) (центр кола — точка *O*, радіус — відрізок *OB*) і точка *A* — задані фігури. Якщо *A* — зовнішня точка відносно даного кола, то очевидно, що задача розв'язків не має. Розглянемо випадок, коли ця точка є внутрішньою точкою круга *(O, OB)*. Подальші міркування проведемо першим рекомендованим шляхом. Нехай точка *X* належить шуканому ГМТ (*мал. 4*). Тоді точками *A* та *X* визначається хорда даного кола, причому точка *X* ділить її навпіл. За відомою теоре-



Мал. 4

мою прямі OX та AX взаємно перпендикулярні, тобто точка X є вершиною прямого кута трикутника AXO з гіпотенузою OA. Отже, точка X належить колу, діаметром якого є відрізок OA.

Таким чином, шукане ГМТ належить вказаному колу, яке ми позначимо через S.

Проведемо тепер міркування у зворотному порядку. Нехай точка X — довільна точка кола S. Тоді кут AXO — прямий, бо він спирається на діаметр кола. За відомою теоремою звідси випливає, що точка X ділить хорду даного кола, яка визначається точками X та A, навпіл. Таким чином, точка X належить шуканому ГМТ. Висновок: шукане ГМТ співпадає з колом S.

Якщо точка A належить даному колу, то всі проведені міркування залишаються в силі (перевірте самостійно).

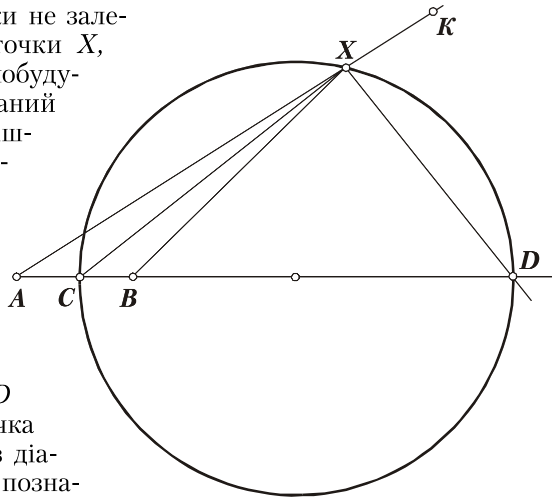
Легко бачити, що побудова кола S завжди виконується, причому однозначно. Задача завжди має єдиний розв'язок. ■

Приклад 3. *Побудувати ГМТ, відношення відстаней від кожної з яких до двох даних точок дорівнює* $\frac{m}{n} \neq 1$, *де* m *і* n *— довжини даних відрізків.*

Розв'язання. Зауважимо спочатку, що при умові $\frac{m}{n} = 1$, як відомо з шкільного курсу геометрії, шукане ГМТ є серединним перпендикуляром до відрізку AB, де A і B — задані точки. Тому цей випадок вилучено з розгляду.

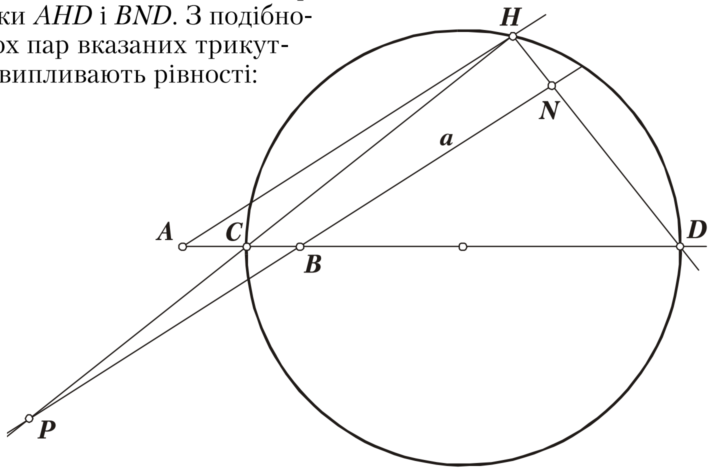
Припустимо, що точка X належить шуканому ГМТ і не лежить на прямій AB. Це означає, що $\frac{AX}{XB} = \frac{m}{n}$. Нехай бісектриса кута AXB перетинає відрізок AB (чому?) у точці C, а бісектриса зовнішнього кута KXB трикутника AXB перетинає промінь AB у точці D (*мал. 5*). За відомими властивостями бісектрис внутрішнього та зовнішнього кутів трикутника маємо, що $\frac{AC}{CB} = \frac{AX}{BX} = \frac{m}{n}$ і $\frac{AD}{BD} = \frac{AX}{BX} = \frac{m}{n}$, тобто, точки C і D належать шуканому ГМТ.

При цьому ці точки не залежать від вибору точки X, оскільки їх можна побудувати, поділивши даний відрізок AB внутрішнім і зовнішнім способом у даному відношенні $\frac{m}{n}$. Далі ми покажемо, як це робиться. Легко переконатися, що кут CXD — прямий, отже точка X належить колу з діаметром CD, яке ми позначимо через S. Приходимо до висновку, що цьому колу належить і шукане ГМТ.



Мал. 5

Оберемо тепер на колі S довільну точку H (крім точок C і D) і доведемо, що вона належить шуканому ГМТ. Це означатиме, що це коло співпадає з шуканим ГМТ. Через точку B проведемо пряму a, що паралельна до прямої AH. Точки перетину прямої a з променем HC та відрізком HD позначимо через P і N відповідно (*мал. 6*). Легко бачити, що трикутники AHC і BPC подібні. Подібними є також трикутники AHD і BND. З подібності двох пар вказаних трикутників випливають рівності:

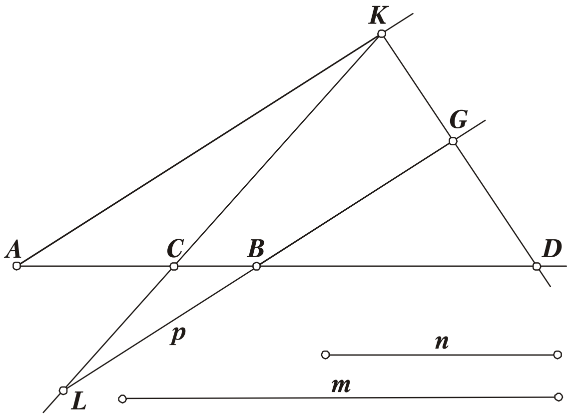


Мал. 6

$$\frac{AH}{PB}=\frac{AC}{BC}=\frac{m}{n}, \quad \frac{AH}{BN}=\frac{AD}{BD}=\frac{m}{n}. \tag{1}$$

Тоді $\frac{AH}{PB}=\frac{AH}{BN}$, звідки випливає, що $PB = BN$. Оскільки трикутник PHN — прямокутний (кут CHD спирається на діаметр кола S) з гіпотенузою PN, то точка B є центром кола, описаного навколо цього трикутника. Тоді $PB = BN = BH$ як радіуси вказаного кола. Замінивши в (1) число PB на число BH, одержуємо рівність $\frac{AH}{BH}=\frac{m}{n}$, тобто, точка H належить шуканому ГМТ. Висновок: шукане ГМТ співпадає з колом S, яке називають **колом Аполонія.** Задача має єдиний розв'язок.

Зрозуміло, що побудова кола Аполонія зводиться до побудови точок C і D. Для цього слід: а) через точку A провести довільний промінь, що не належить прямій AB, і на ньому відкласти відрізок AK з довжиною m; б) через точку B провести пряму p, яка паралельна побудованому променю, і відкласти на ній рівні відрізки BL і BG з довжиною n, як вказано на *малюнку 7*. Тоді $C = (KL) \cap (AB)$, $D = (KG) \cap (AB)$. Доведіть це самостійно, використовуючи подібність трикутників AKD і BGD та аналогічну властивість трикутників AKC і BLC. ■



Мал. 7

Застосуємо тепер побудовані ГМТ до розв'язування задач на побудову фігур у площині.

Приклад 4. *Побудувати трикутник за основою, протилежним до неї кутом та медіаною, проведеною до бічної сторони.*

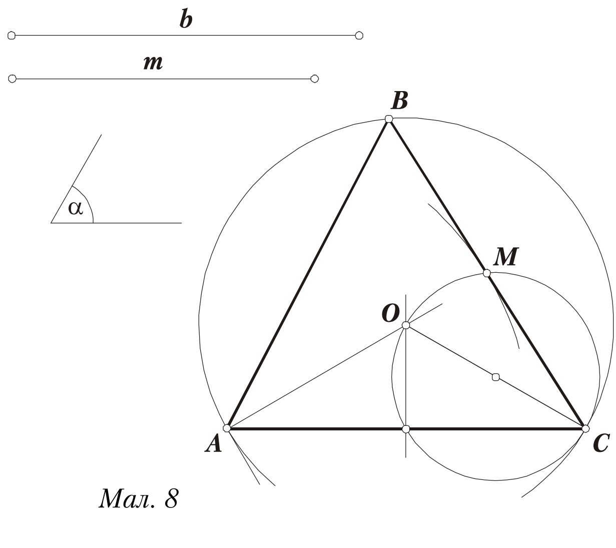
Розв'язання. Почнемо з **аналізу.** Позначимо заданий кут через α, задану основу — через b, задану медіану — через m. Припустимо, що трикутник ABC — шуканий, тобто відрізки AC і

b рівні, кути ABC та α — рівні, медіана AM дорівнює відрізку m. Рекомендуємо читачеві зробити окремий рисунок для аналізу. Задача зводиться до побудови вершини B. Одразу це здійснити не вдається. Можна лише зазначити, що точка B належить ГМТ, з яких відрізок AC видно під кутом α. При побудові цього ГМТ одночасно буде побудовано коло, що описане навколо трикутника ABC (див. приклад 1). Оскільки $BM = MC$, то точка M належить геометричному місцю середин хорд цього кола, які проходять через точку C (див. приклад 2). І, нарешті, точка M належить колу $(A, AM = m)$. Отже, точку M можна побудувати як точку перетину останнього кола з вказаним вище геометричним місцем середин хорд. Після цього точка B легко будується.

Нехай α, b, m — заданий кут і задані відрізки відповідно. **Послідовність побудов така:**

1) будуємо довільний відрізок AC, що дорівнює відрізку b;
2) будуємо ГМТ, з яких відрізок AC видно під кутом α, центр кола, описаного навколо трикутника ABC, позначаємо через O;
3) будуємо геометричне місце середин хорд цього кола, що проходять через точку C. Цим ГМТ є коло S з діаметром OC;
4) будуємо коло (A, m), від перетину якого з колом S одержується точка M;
5) точка $B = [CM) \cap (O, OC)$, тобто всі вершини шуканого трикутника побудовано (*мал. 8*).

Доведення ми тут не наводимо, оскільки його практично проведено у прикладах 1 і 2. **Дослідження** слід пов'язувати з кількістю точок перетину кіл (A, m) та S. Якщо таких точок не існує, то задача розв'язку не має, якщо існує одна така точка, то задача має єдиний розв'язок, якщо існують дві такі точки, то задача має два розв'язки. ■



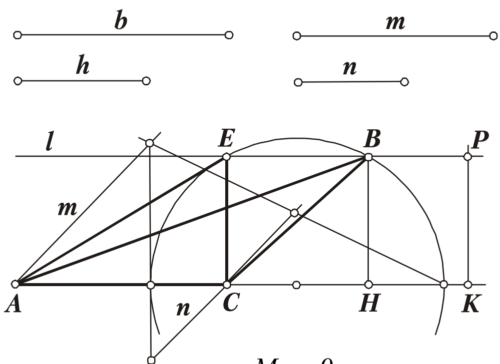
Мал. 8

Зауваження. Бажано, звичайно, знаходити аналітичні залежності між даними фігурами (між довжинами даних відрізків, величинами даних кутів тощо), які б визначали кожен з випадків, до яких приводить дослідження. Але такі задачі можуть виявитись складнішими, ніж сам процес побудови шуканої фігури. Попробуйте провести таке дослідження для попереднього прикладу.

Приклад 5. *Побудувати трикутник за основою, відношенням бічних сторін та висотою, опущеною на цю основу.*

Розв'язання. Нехай задано відрізок b, що дорівнює основі шуканого трикутника, і відрізок h, що дорівнює його висоті. Відношення його бічних сторін позначимо через $\frac{m}{n}$. Це означає, що задано відрізки з довжинами m і n. Припустимо, що трикутник ABC — шуканий, тобто, що його основа AC дорівнює відрізку b, $\frac{AB}{BC}=\frac{m}{n}$ і висота BH дорівнює відрізку h. Зрозуміло, що вершина B належить одночасно до двох ГМТ, одне з яких є колом Аполонія, а друге — об'єднання двох паралельних до (AC) прямих. Отже, задача зводиться до побудови перерізу вказаних ГМТ. **Побудова:**

1) будуємо коло Аполонія, як це зроблено у прикладі 3;
2) у довільній точці K прямої AC встановлюємо до неї перпендикуляр і на ньому відкладаємо відрізок KP, що дорівнює відрізку h (*мал. 9*);
3) через точку P проводимо пряму l, яка паралельна до прямої AC і шукаємо точки перетину цієї прямої з колом Аполонія. Кожна з цих точок визначає шукану точку B.



Мал. 9

Очевидно, що задача може мати один розв'язок, два розв'язки або жодного розв'язку. Довжини відрізків b і h позначимо через $|b|$ і $|h|$ відповідно.

Повернемось для зручності до *мал. 7*. Використовуючи подібність трикутників AKD і BGD та аналогічну властивість трикутників AKC і BLC, одержуємо рівності $\frac{m}{n} = \frac{AB + BD}{BD}$ та $\frac{m}{n} = \frac{AB - BC}{BC}$, $m > n$, з яких випливають співвідношення $BD = \frac{AB \cdot n}{m - n}$ та $BC = \frac{AB \cdot n}{m + n}$. Довжина r радіуса кола Аполонія дорівнює $\frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}(BD + BC) = \frac{AB \cdot m \cdot n}{m^2 - n^2}$. Тоді в позначеннях задачі 5 $r = \frac{|\,b\,| \cdot m \cdot n}{m^2 - n^2}$, і ця задача має єдиний розв'язок, якщо $|\,h\,| = r$, має два розв'язки, якщо $|\,h\,| < r$, не має розв'язків, якщо $|\,h\,| > r$.

На *малюнку 9* побудовано два трикутники ABC і AEC, кожен з яких є шуканим. Використання другої прямої, симетричної з прямою l відносно прямої AC, не змінить кількості розв'язків задачі (чому?). ■

Зауваження. У наступному підрозділі ми познайомимось ще з двома важливими ГМТ та їх застосуванням до розв'язування задач.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Побудувати геометричне місце внутрішніх точок даного кута, відношення відстаней від кожної з яких до його сторін дорівнює $\frac{m}{n}$, де m і n — довжини даних відрізків.
2. Побудувати геометричне місце центрів кіл даного радіуса, які дотикаються до даного кола.
3. Побудувати ГМТ, рівновіддалених від двох даних прямих, що перетинаються.
4. Побудувати ГМТ, що ділять навпіл хорди даного кола, які належать прямим, що містять дану точку, яка знаходиться зовні даного кола.
5. Побудувати ГМТ, рівновіддалених від: а) трьох даних точок, що не лежать на одній прямій; б) вершин даного прямокутника; в) вершин даної трапеції.
6. Побудувати геометричне місце середин відрізків, що паралельні до даної прямої, якщо їх вершини належать сторонам даного кута.
7. Побудувати геометричне місце центрів кіл, які однаковим способом дотикаються до двох даних рівних кіл, що не мають спільних точок.

8. Побудувати паралелограм за стороною, висотою та кутом між діагоналями.
9. Через дві дані точки даного кола провести дві паралельні хорди так, щоб сума їх довжин дорівнювала довжині даного відрізка.
10. Побудувати коло даного радіуса, яке проходить через дану точку, якщо це коло з іншої даної точки видно під даним кутом (мається на увазі кут між дотичними, проведеними з цієї точки до шуканого кола).
11. На спільній зовнішній дотичній двох даних кіл побудувати точку так, щоб сума кутів, під якими з цієї точки видно дані кола, дорівнювала даному куту.
12. Побудувати трикутник за:
    а) основою, протилежним кутом і точкою на цій основі, що належить бісектрисі протилежного кута;
    б) основою, висотою, проведеною до неї, та медіаною, проведеною до бічної сторони;
    в) стороною, протилежним до неї кутом і висотою, проведеною до іншої сторони;
    г) стороною, протилежним до неї кутом і радіусом вписаного кола;
    д) бісектрисою одного з кутів та відрізками, на які вона ділить протилежну сторону;
    е) основою та точками перетину з нею висоти і бісектриси, що проведено з вершини протилежного кута;
13. Накреслено два непаралельних відрізки AB і CM. На даній прямій побудувати таку точку X, щоб площі трикутників AXB і CMX були рівними.
14. Побудувати коло даного радіуса, яке б на сторонах даного кута “висікало” хорди, що дорівнюють двом даним відрізкам.
15. Через точку перетину двох даних кіл провести спільну січну так, щоб сума довжин утворених хорд дорівнювала довжині даного відрізка.

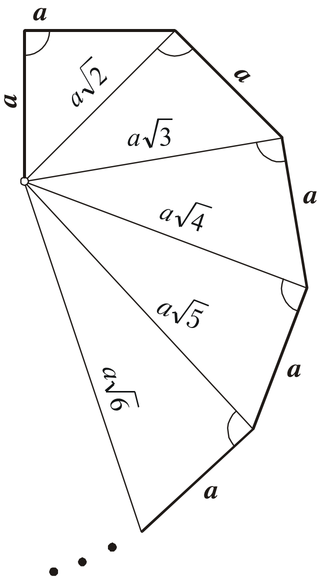
1.3. Алгебраїчний метод

Трапляються випадки, коли розв'язування геометричної задачі на побудову зводиться до побудови відрізка, довжина якого виражається через довжини даних відрізків за допомогою певної формули. Частіше усього до таких ситуацій приводить знаходження довжини відрізка як розв'язку рівняння або системи рівнянь, які одержуються на основі співвідношень між даними в умові задачі та шуканими фігурами. Одразу зауважимо, що далеко не кожна формула взагалі визначає довжину відрізка. Припустимо, що довжина відрізка визначена рівністю $x = f(a_1, a_2, ..., a_n)$, права частина якої є функцією від довжин даних відрізків, виміряних одиницею виміру e. Якщо змінити одиницю виміру згідно формули $e = tk$, де k — нова одиниця виміру, t — додатне дійсне число, то для одержання довжини кожного відрізка в новій системі виміру слід його довжину в старій системі виміру помножити на t. Наприклад, довжина відрізка дорівнює 5 метрів. Тут одиниця виміру — 1 метр. Якщо одиницею виміру покласти 1 сантиметр, то очевидно, що в цьому разі t = 100 і довжина вказаного відрізка стає рівною 100 x 5 = 500 сантиметрів. Отже, повертаючись до загального випадку, одержуємо рівність $tx = f(ta_1, ta_2, ..., ta_n)$, звідки випливає, що $tf(a_1, a_2, ..., a_n) = f(ta_1, ta_2, ..., ta_n)$. Як відомо, функції, що мають таку властивість, називаються однорідними функціями першого степеня. Це і є необхідна умова, щоб рівність $x = f(a_1, a_2, ..., a_n)$ визначала довжину певного відрізка.

Припустимо, що необхідна умова виконується. Але це ще не означає, що відрізок з довжиною x можна побудувати за допомогою циркуля та лінійки. Достатні умови такої можливості надає наступне важливе твердження [7, с.107].

Теорема 1. *За допомогою циркуля і лінійки можна побудувати відрізок тоді і тільки тоді, коли його довжина виражається через довжини даних відрізків та раціональні числа за допомогою скінченої кількості раціональних операцій та добування квадратних коренів.*

Нагадаємо, що раціональними вважають операції додавання, віднімання, множення та ділення. Нехай, наприклад, задано рівності: а) $x = \sqrt[3]{a^3 + b^3}$; б) $x = \dfrac{a^3 + b^2}{c}$; в) $x = \dfrac{(\sqrt[4]{a^2b^2 + c^4})a}{b}$, де a, b, c — довжини даних відрізків. Легко перевірити, що: рівність а) визначає довжину певного відрізка, але згідно теореми 1 за допомогою циркуля і лінійки побудувати його неможливо; рівністю б) довжина відрізка взагалі не визначається; рівністю в) визначається довжина відрізка, який можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Але не все так просто. Теорема 1 стверджує лише про можливість побудови відрізка і ніяких рецептів щодо техніки його побудови не дає. До задач такого типу, що розв'язуються в шкільному курсі геометрії, належить і задача 14 з п.1.1 (задачі підготовчого рівня). Розглянемо спочатку два прості приклади.



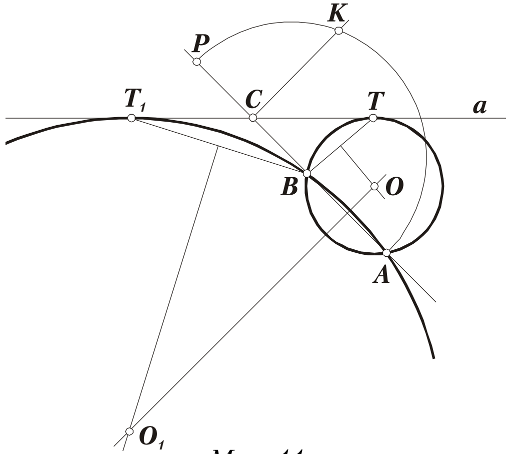
Мал. 10

Приклад 1. *Побудувати відрізок довжиною* $a\sqrt{n}$ *, де a — довжина даного відрізка, n > 1 — натуральне число.*

Розв'язування цієї задачі зводиться до побудови n — 1-го прямокутного трикутника, як це вказано на *малюнку 10* (дугою позначено прямі кути), і використання теореми Піфагора. Звичайно, не обов'язково будувати всі вказані на цьому малюнку трикутники. В залежності від числа n кількість їх можна зменшити. ■

Приклад 2. *Побудувати коло, що проходить через дві дані точки і дотикається до даної прямої.*

Розв'язання. З усіх можливих варіантів взаємного розміщення даних фігур розглянемо лише один: задані точки A і B лежать по один бік від даної прямої a, причому прямі AB і a перетинаються в точці C і не є перпендикулярними (усі інші випадки значно простіші, і читач сам може їх розглянути). Нехай шукане коло дотикається до даної прямої в точці T і точка B лежить між точками A і C. Отже, з точки C до шуканого кола проведено січну CA і дотичну CT. Як добре відомо з шкільного курсу планіметрії, справджується рівність $CT^2 = AC \times BC$, звідки $CT = \sqrt{AC \times BC}$. Відрізок CT можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Звідси випливає ланцюжок побудов (*мал. 11*): 1) будуємо відрізок CK, що дорівнює відрізку CT (ця побудова відома з шкільного курсу планіметрії: на прямій AC будуємо відрізок PC, що дорівнює відрізку CB, будуємо коло з діаметром *AP*, будуємо точку *K*, яка одержується від перетину цього кола з перпендикуляром, проведеним до прямої *AC* через точку *C*); 2) будуємо коло *S* (*C*, *CK*), від перетину якого з прямою *a* одержується точка *T;* 3) описуємо коло навколо трикутника *ABT*, яке і є шуканою фігурою. Нагадаємо, що центр *O* кола, описаного навколо трикутника, співпадає з точкою перетину серединних перпендикулярів, проведених до його сторін. Оскільки коло *S*(*C*, *CK*) перетинає пряму *a* в двох точках, то у зазначеному вище варіанті розташування даних фігур задача завжди має два розв'язки. ■



Мал. 11

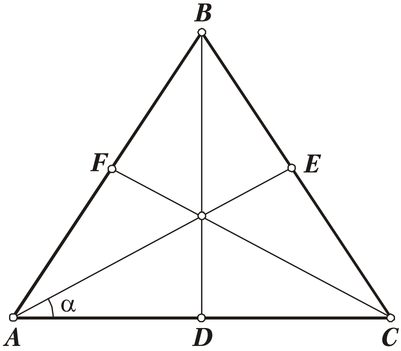
Приклад 3. *На даному відрізку AB побудувати таку точку X, щоб справджувалась рівність* $\frac{AB}{AX} = \frac{AX}{BX}$ ***(золотий переріз відрізка AB)****.*

Розв'язання. Позначимо довжини відрізків *AB* і *AX* через *a* та *x* відповідно. Тоді рівність з умови задачі набирає вигляду $\frac{a}{x} = \frac{x}{a-x}$, звідки одержується квадратне рівняння $x^2 + ax - a^2 = 0$. Воно має єдиний додатний корінь $x = \frac{-a + a\sqrt{5}}{2}$. Враховуючи приклад 1, відрізок довжиною *x* легко побудувати, після чого будується шукана точка *X*. Пропонуємо читачеві ці побудови провести самостійно. ■

Розглянемо тепер більш складну важливу задачу.

Приклад 4. *Побудувати трикутник за трьома його бісектрисами.*

Розв'язання. За умовою задачі дано три відрізки, що дорівнюють бісектрисам внутрішніх кутів трикутника, який треба побудувати.



Мал. 12

Доведемо, що в загальному випадку навіть для рівнобедреного трикутника ця задача за допомогою циркуля і лінійки не розв'язується. Отже, нехай треба побудувати рівнобедрений трикутник ABC, в якому бісектриса BD (вона ж — висота трикутника) дорівнює даному відрізку довжиною h, а бісектриси AE і CF дорівнюють даному відрізку довжиною l. Величину кута BAC позначимо через 2α (*мал. 12*).

Використовуючи теорему синусів, для трикутника ABE, і враховуючи, що величина кута AEB дорівнює $3a$, маємо, що $\dfrac{l}{\sin(\pi-4\alpha)} = \dfrac{AB}{\sin 3\alpha}$. У прямокутному трикутнику ABD $AB = \dfrac{h}{\sin 2\alpha}$, тому $\dfrac{l}{\sin(\pi-\alpha)} = \dfrac{h}{\sin 2\alpha \sin 3\alpha}$, звідки $h = \dfrac{l \sin 2\alpha \sin 3\alpha}{\sin 4\alpha}$. Покладемо $l = 4h$. Тоді з останньої рівності одержуємо рівняння $\cos 2\alpha = 2\sin 3\alpha$, яке після відповідних перетворень набирає вигляду $8\sin^3\alpha - 2\sin^2\alpha - 6\sin\alpha + 1 = 0$. Перевірка показує, що останнє рівняння не має раціональних коренів, якщо невідомим у ньому вважати $\sin\alpha$ (якщо такі корені б існували, то, як відомо з курсу алгебри, вони б належали до множини чисел $\left\{\pm 1; \pm\dfrac{1}{2}; \pm\dfrac{1}{4}; \pm\dfrac{1}{8}\right\}$). Припустимо, що трикутник ABC можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Тоді, очевидно, можна побудувати і кут EAC, величина якого дорівнює α. Але тоді, в свою чергу, можна побудувати відрізок довжиною $b \sin\alpha$, де b — довжина довільного заданого відрізка, побудувавши прямокутний трикутник за гіпотенузою, що має довжину b та гострим кутом, що має величину α. Це неможливо згідно теореми 1. ■

Сформулюємо тепер дві наступні класичні задачі.

Задача про подвоєння куба: *побудувати ребро куба, об'єм якого удвічі більший, ніж об'єм куба, ребро якого задано.*

Задача про квадратуру круга: *побудувати квадрат, площа якого дорівнює площі даного круга.*

Пропонуємо читачеві самостійно довести, що ці задачі за допомогою циркуля і лінійки не розв'язуються.

Розглянемо ще один тип задач, які зводяться до побудови правильних многокутників, вписаних у дане коло, або до поділу даного кола на декілька рівних дуг. Ця задача не становить труднощів, якщо число сторін правильного многокутника дорівнює 2^N, де N — натуральне число. Так, легко будуються вписані у дане коло правильні чотирикутник, восьмикутник, шістнадцятикутник і так далі. У протилежному випадку надзвичайно корисним є наступне твердження [7, с.114].

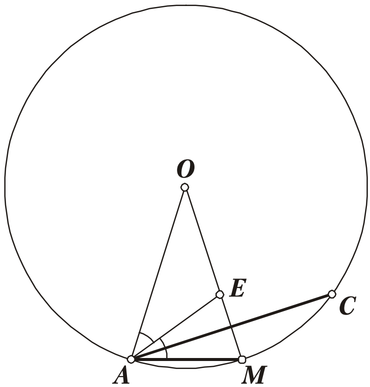
Теорема 2 (Гауса). *Поділити дане коло на n рівних частин за допомогою циркуля і лінійки можна тоді і тільки тоді, коли* $n = 2^m p_1 p_2 ... p_s$*, де m — ціле невід'ємне число, а* p_i $(i = 1, 2, ..., s)$ *— попарно різні прості числа Ферма (числа виду* $2^{2^k}+1$*, де k — цілі невід'ємні числа).*

Зрозуміло, що при цих самих умовах за допомогою циркуля і лінійки можна побудувати правильний n-кутник. Зауважимо, що не всі числа Ферма є простими. Так, значенням $k = 0, 1, 2, 3, 4$ відповідають прості числа Ферма 3, 5, 17, 257, 65537. Але числу $k = 5$ відповідає число Ферма, що є складеним (перевірте!).

Теорема Гауса говорить лише про можливість побудови правильного многокутника і не вказує алгоритму для здійснення цієї побудови. Наприклад, з'ясуємо питання, чи можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки правильний п'ятикутник. Так, оскільки $5 = 2^0 2^{2^1} + 1$, а $2^{2^1} + 1$ є простим числом Ферма. Правильний 360 кутник побудувати не можна, оскільки $360 = 2^3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, і хоча 3 та 5 є простими числами Ферма, але до розкладу числа 360 на множники входять два однакові співмножники.

Доведіть самостійно, що поділити даний кут на три рівні кути ***(класична задача про трисекцію кута)*** не завжди можливо за допомогою циркуля і лінійки. Для доведення досить навести приклад хоч одного такого кута. Зрозуміло, що існують кути, які можна поділити на три рівні частини за допомогою цих інструментів, наприклад, прямий кут (наведіть ще приклади таких кутів).

Приклад 5. *Побудувати сторони правильних десятикутника і п'ятикутника, вписаних у дане коло.*

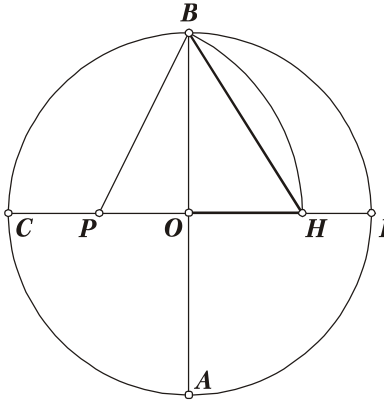


Мал. 13

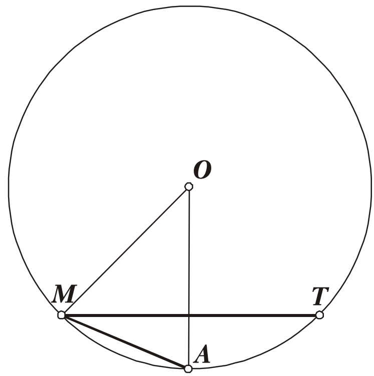
Розв'язання. Легко бачити, що ця задача розв'язується за допомогою циркуля і лінійки. Припустимо, що $S(O, OA)$ — дане коло, AM — сторона вказаного в умові задачі десятикутника (*мал. 13*). Нехай AE — бісектриса кута OAM. У цьому разі кути AOM, OAE та MAE рівні. Градусна міра кожного з них дорівнює 36 градусів. Кути OAM, OMA, AEM та AME теж рівні. Їх градусна міра становить 72 градуси. З цього випливає, що відрізки AM, AE, OE рівні між собою, а трикутники AOM та EAM подібні. Позначивши довжини відрізків OA та AM через r та x відповідно та прирівнявши відношення довжин відповідних сторін цих трикутників, одержуємо рівняння $\frac{r-x}{x} = \frac{x}{r}$, що має єдиний додатний корінь $x = \frac{-r + r\sqrt{5}}{2}$. Звідси випливає, що точка E здійснює "золотий переріз" відрізка OM (дивись приклад 3), а відрізок OE є шуканим. Цю побудову неважко здійснити.

Побудувавши сторону правильного десятикутника, вписаного в дане коло, легко можна побудувати сторону правильного п'ятикутника, вписаного в це коло. Для цього досить побудувати відрізок MC, що дорівнює відрізку AM, як це зроблено на *мал. 13*. Очевидно, що відрізок AC є стороною вказаного п'ятикутника.

Усі ці побудови можна значно спростити. Дійсно, нехай $S(O, OA)$ — дане коло, AB і CK — його взаємно перпендикулярні діаметри (*мал. 14*). Ділимо точкою P відрізок OC навпіл і будуємо коло (P, PB), яке перетинає відрізок OK у точці H. Покажемо, що відрізок OH є стороною правильного десятикутника, вписаного в дане коло. За теоремою Піфагора легко переконатися, що $PB = PH = \frac{r\sqrt{5}}{2}$, де r — довжина радіуса даного кола. Тоді $OH = PH - PO = \frac{-r + r\sqrt{5}}{2}$, що завершує доведення. І, нарешті, доведемо, що відрізок HB є стороною правильного п'ятикутника,



Мал. 14



Мал. 15

вписаного в дане коло. З трикутника BOH маємо, що $BH = \sqrt{r^2 + \left(\frac{-r + r\sqrt{5}}{2}\right)^2}$. Для зручності накреслимо ще один *малюнок 15*, на якому (O, OA) — задане коло, відрізки AM і MT — сторони правильних десятикутника і п'ятикутника відповідно, які вписані в це коло, тобто відрізки MA і AT рівні. Виразивши площу трикутника OAM один раз через MA, а другий раз — через MT, одержуємо рівняння $r \cdot MT = 2AM\sqrt{r^2 - \left(\frac{AM}{2}\right)^2}$, з якого знаходимо MT. Прирівнюючи MT до BH, одержуємо співвідношення

$$2\frac{AM}{r}\sqrt{r^2 - \left(\frac{AM}{2}\right)^2} = \sqrt{r^2 + AM^2}.$$

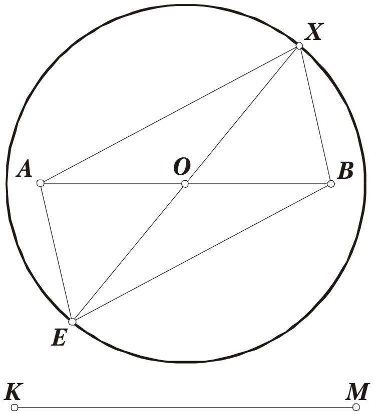
Залишається показати, що це співвідношення є тотожність. Елементарні спрощення зводять цю задачу до доведення рівності $3AM^2 - \frac{AM^4}{r^2} = r^2$, підставивши в яку замість AM число $\frac{-r + r\sqrt{5}}{2}$, зводимо останню задачу, в свою чергу, до доведення рівності $3(\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^2 - (\frac{-1+\sqrt{5}}{2})^4 = 1$, яке не викликає ніяких труднощів. ■

Тепер розглянемо приклади застосування алгебраїчного методу до побудови ГМТ.

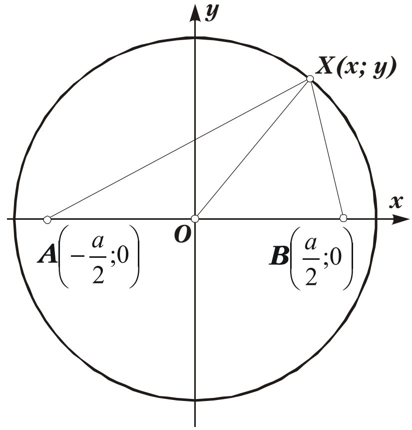
Приклад 6. *Побудувати ГМТ, сума квадратів відстаней від кожної з яких до двох даних точок A і B є стале число, що дорівнює квадрату довжини даного відрізка KM.*

Розв'язання. Довжини відрізків *AB* та *KM* позначимо через *a* та *c* відповідно. Нехай точка *X* належить шуканому ГМТ. Це означає, що $AX^2 + BX^2 = c^2$. Доповнимо трикутник *AXB* до паралелограма *AXBE*, як вказано на *малюнку 16*. Як відомо з шкільного курсу геометрії, сума квадратів довжин діагоналей паралелограма дорівнює сумі квадратів довжин його сторін, тобто $2(AX^2 + BX^2) = AB^2 + EX^2$, звідки випливає рівність $2c^2 = a^2 + 4OX^2$, де *O* — точка перетину діагоналей паралелограма. Тоді $OX = \dfrac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, причому дріб у правій частині останньої рівності не залежить від вибору точки *X*. Отже, кожна точка шуканого ГМТ віддалена від точки *O* на відстань $\dfrac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, а це означає, що шукане ГМТ належить колу $S(O, \dfrac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2})$. Пропонуємо читачеві самостійно довести, що кожна точка кола *S* належить шуканому ГМТ, тобто шукане ГМТ і коло S співпадають. **Дослідження:** задача має єдиний розв'язок при умові, що $a^2 \le 2c^2$ або $a \le c\sqrt{2}$. Якщо $a = c\sqrt{2}$, то ГМТ вироджується в точку *O*, якщо *a* = *c*, то шукане ГМТ є колом з діаметром *AB*.

Побудова цього ГМТ зводиться до побудови відрізка, довжина якого дорівнює $\dfrac{\sqrt{2c^2 - a^2}}{2}$, що потребує застосування алгебраїчного методу. Цей відрізок можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Спочатку будуємо відрізок з довжиною $b = c\sqrt{2}$ (приклад 1). Потім будуємо відрізок довжиною $d = \sqrt{b^2 - a^2}$ (катет трикутника з гіпотенузою, що має довжину *b*, і другий катет, що має довжину *a*). Останній відрізок ділимо навпіл і одержуємо відрізок потрібної довжини. Після цього будуємо точку *O* і коло *S*. ■



Мал. 16

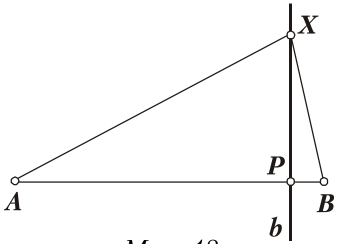


Мал. 17

Зауваження. Щоб встановити, чим є шукане ГМТ, часто застосовують метод координат. Застосуємо його до розв'язування останнього прикладу. Оберемо на площині прямокутну систему координат XOY і розмістимо точки A і B так, як вказано на *малюнку 17*. Нехай точка X з координатами x, y належить шуканому ГМТ. Тоді, використовуючи формулу для відстані між двома точками, одержуємо рівняння, якому задовольняють координати точки X: $\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2y^2=c^2$. Здійснивши очевидні перетворення, одержуємо рівняння $x^2+y^2=\frac{2c^2-a^2}{4}$, яке визначає коло з центром у початку координат при умові, що $a \le c\sqrt{2}$. Якщо $a = c\sqrt{2}$, то одержується коло нульового радіуса. Таким чином, шукане ГМТ належить цьому колу. Далі встановлюється, що кожна точка цього кола належить шуканому ГМТ. Побудова ГМТ здійснюється так, як було вказано вище.

Приклад 7. *Побудувати ГМТ, різниця квадратів відстаней від кожної з яких до двох даних точок A і B є стале число, що дорівнює квадрату довжини даного відрізка KM.*

Розв'язання. Довжини відрізків AB та KM позначимо через a та c відповідно. Нехай точка X належить шуканому ГМТ. Це означає, що $AX^2 - BX^2 = c^2$. Нехай точка P є основою перпендикуляра, опущеного з точки X на пряму AB (*мал. 18*). Справджуються наступні очевидні рівності: $AX^2 = AP^2 + PX^2$,



Мал. 18

$BX^2 = PB^2 + PX^2$, з яких випливає, що $AP^2 - PB^2 = c^2$. Таким чином, положення точки P на прямій AB не залежить від вибору точки X, яка належить шуканому ГМТ. Отже, шукане ГМТ належить перпендикулярній до прямої AB прямій b, що проходить через точку P. Легко переконатися, що довільна точка прямої b належить шуканому ГМТ (переконайтесь у цьому самостійно), тобто шукане ГМТ і пряма b співпадають. Таким чином, розв'язування задачі зводиться до побудови точки P. Позначимо довжину відрізка AP через x. Для знаходження числа x одержуємо рівняння $x^2 - (a - x)^2 = c^2$, яке має єдиний розв'язок $x = \dfrac{c^2 + a^2}{2a} = \dfrac{1}{2}(\dfrac{c^2}{a} + \dfrac{a}{2})$. Відрізок довжиною x можна побудувати за допомогою циркуля і лінійки. Спочатку слід побудувати відрізок, довжиною $\dfrac{c^2}{a}$, подавши останній дріб у вигляді $\dfrac{c \cdot c}{a}$. Це стандартна побудова четвертого пропорційного відрізка з шкільного курсу геометрії (задача 14 підготовчого рівня, **п.1.1**). Після цього відрізок з довжиною x будується тривіально. Залишається лише побудувати точку P і провести через неї пряму b, перпендикулярну до прямої AB. Шукане ГМТ побудовано. Пропонуємо читачеві самостійно провести побудову ГМТ окремо для випадків: $a = c$, $a > c$, $a < c$. ■

Наведені у цьому підрозділі приклади показують, що зустрічаються задачі на побудову, при розв'язуванні кожної з яких доводиться використовувати декілька методів одночасно, тому класифікація таких задач за методами їх розв'язування є досить умовною.

Вправи для самостійного розв'язування

1. Чи визначають формули: а) $x = \dfrac{\sqrt[4]{2a^8 + 3b^7}}{b}$,

   б) $x = \dfrac{\sqrt[8]{a^4 + 5b^4} \cdot \sqrt[4]{3a^2 + b^2}}{10}$ довжини певних відрізків, якщо a і b — довжини даних відрізків?

2. Чи можна за допомогою циркуля і лінійки побудувати відрізок довжиною x, якщо:
   а) $x^3 - 2x + 7 = 0$; б) $2x^3 - 7x^2 + 3x + 5 = 0$, де a, b — довжини даних відрізків.
3. Побудувати відрізок довжиною x, якщо $x^2 - x\sqrt{ab} + a^2 = 0$, де a, b — довжини даних відрізків.
4. Побудувати відрізок довжиною x, якщо $ax^2 - x\sqrt{ab^3} - b\sqrt{a^4 - b^4} = 0$, де a, b — довжини даних відрізків.
5. Побудувати відрізки, довжини яких виражаються через довжини a, b, c, d даних відрізків за формулами:

   а) $x = \sqrt{ab}\sqrt{\dfrac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}}(a > b)$, б) $x = \sqrt{c} \cdot \sqrt[4]{\dfrac{b}{d}} \cdot \sqrt[4]{a^2 + b^2}$,

   в) $x = \dfrac{a^3\sqrt{ab}}{bc^2}$.
6. Побудувати квадрат, рівновеликий даному трикутнику.
7. Через дану зовнішню відносно даного кола точку A провести січну до нього так, щоб вона перетинала це коло в точках C і K (точка C лежить між точками K і A), причому $AC = CK$.
8. Побудувати коло, площа якого дорівнює площі кільця між двома даними концентричними колами.
9. Чи можна за допомогою циркуля і лінійки побудувати:
   а) правильний п'ятнадцятикутник (сімнадцятикутник, 365-кутник);
   б) кут, градусна міра якого становить 3 градуси (8 градусів, 18 градусів)?
10. Побудувати круг даного радіуса, при перетині якого з сторонами даного кута одержуються хорди, що дорівнюють двом заданим відрізкам.
11. Побудувати трикутник за основою та висотою, опущеною на неї, якщо сума квадратів довжин його бічних сторін дорівнює квадрату довжини даного відрізка.
12. Побудувати трикутник за основою та висотою, опущеною на неї, якщо різниця квадратів довжин його бічних сторін дорівнює квадрату довжини даного відрізка.
13. Побудувати трикутник за основою та протилежним до неї кутом, якщо сума (різниця) квадратів довжин його бічних сторін дорівнює квадрату довжини даного відрізка.

14. Побудувати прямокутний трикутник за гіпотенузою та бісектрисою прямого кута.
15. Побудувати пряму, що паралельна до основи даного трикутника і відтинає від нього трикутник, площа якого удвічі менша, ніж площа даного трикутника.
16. Побудувати пряму, що паралельна до діагоналі даного прямокутника і ділить його на дві фігури, площі яких відносяться як один до трьох.
17. Побудувати пряму, яка паралельна до основ даної трапеції і ділить її на дві рівновеликі частини.

1.4. Інверсія та її застосування до розв'язування задач на побудову

Задамо на площині коло $S(O, OP)$ і довжину його радіуса OP позначимо через r. Нехай Φ − множина всіх точок площини без точки O. Задамо відображення f фігури Φ у себе, що діє на довільну точку $M \in \Phi$ наступним чином:

а) точка $M' = f(M)$ належить променеві OM;
б) $OM \cdot OM' = r^2$.

Таке відображення f називають інверсією; коло S, його центр і радіус називають колом інверсії, центром (полюсом) інверсії і радіусом інверсії відповідно.

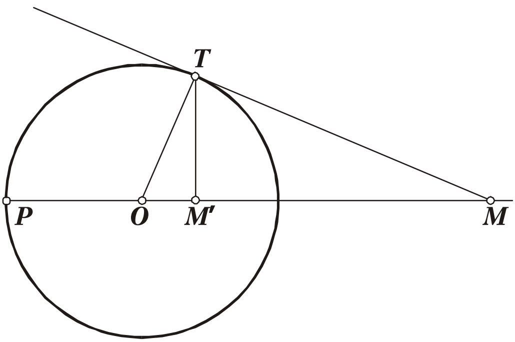
Очевидно, що це відображення є бієктивним (взаємно однозначним). Такі відображення в геометрії часто називають геометричними перетвореннями. Крім того, інверсія є взаємним відображенням, тобто, якщо точка M' інверсна відносно точки M, то точка M є інверсною відносно точки M'.

Безпосередньо з означення випливають твердження:

а) якщо точка M знаходиться всередині кола інверсії, то точка $M' = f(M)$ — зовні кола інверсії;

б) якщо точка M належить колу інверсії, то вона інверсується в себе, тобто, вона є нерухомою (інваріантною) точкою цього геометричного перетворення. Отже, коло інверсії є її інваріантом;

в) якщо пряма t проходить через центр інверсії, то фігура $t \setminus \{O\}$ (пряма, проколота в центрі інверсії) інверсується в себе, тобто є інваріантом цього перетворення. Але серед точок вказаної фігури є лише дві інваріантні — це ті точки, які належать колу інверсії.



Мал. 19

Покажемо тепер, як будуються інверсні точки (*мал. 19*). Нехай $S(O, OP)$ — коло інверсії, M — довільна точка, що лежить зовні цього кола. З цієї точки проведемо дотичну до кола інверсії і нехай T є точкою її дотику до цього кола. Точка M', що є основою перпендикуляра, опущеного на пряму OM з точки T, є інверсною відносно точки M. Дійсно, умова а) з означення інверсії виконується за побудовою, а умова б) випливає з рівностей $OM \cdot OM' = OT^2 = r^2$. Точку M, інверсну з точкою M', що знаходиться всередині кола інверсії, будують у зворотному порядку як точку перетину променя OM' з дотичною до кола інверсії в його точці T, яка належить перпендикуляру, що встановлений у точці M' до прямої OM'. Дотичною до кола інверсії у точці T є пряма, що проходить через цю точку і перпендикулярна до його радіуса OT.

Нехай коло Q проходить через полюс інверсії O. Домовимось фігуру $Q\backslash\{O\}$ називати колом, проколотим у полюсі (центрі) інверсії.

Теорема 1. *Фігурою, інверсною з прямою, яка не проходить через центр інверсії, є коло, проколоте в центрі інверсії, і навпаки, фігурою, інверсною з колом, проколотим у центрі інверсії, є пряма, що через центр інверсії не проходить. Фігурою, інверсною з колом, що не проходить через центр інверсії, є коло, що не проходить через центр інверсії.*

Щоб довести це твердження, спочатку встановимо зв'язок між координатами інверсних точок у ортонормованому репері $R = \{O, \vec{i}, \vec{j}\}$, початок якого співпадає з полюсом інверсії. Припустимо, що в обраному репері точка M має координати x, y, а інверсна з нею точка M' — координати x', y'. Оскільки вектори $\overrightarrow{OM}$ і $\overrightarrow{OM'}$ не нульові та колінеарні, то існує таке дійсне число λ, що $\overrightarrow{OM'} = \lambda \overrightarrow{OM}$. Помноживши останню рівність скалярно на вектор $\overrightarrow{OM}$, з одержаного рівняння отримуємо, що $\lambda = \dfrac{r^2}{\overrightarrow{OM}^2}$.

Тоді $\overrightarrow{OM'} = \dfrac{r^2}{\overrightarrow{OM}^2}\overrightarrow{OM}$. Запишемо цю рівність у координатній формі: $x' \cdot \vec{i} + y' \cdot \vec{j} = \dfrac{r^2}{x^2 + y^2}(x\vec{i} + y\vec{j})$. Прирівнюючи коефіцієнти при однакових векторах, що стоять у правій та лівій частинах останньої рівності, одержуємо потрібні формули:

$$x' = \frac{r^2 x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{r^2 y}{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Доведемо лише перше твердження теореми. Друге твердження доводиться аналогічно. Припустимо, що пряма a не проходить через полюс інверсії і має в обраному репері рівняння $Ax + By + C = 0$. Тоді, звісно, $C \neq 0$. Оскільки інверсія є взаємним перетворенням, то у формулах (1) можна поміняти місцями x з x' та y' з y'. Зрозуміло, що фігура, інверсна з прямою a, матиме рівняння

$$A\frac{r^2 x'}{x'^2 + y'^2} + B\frac{r^2 y'}{x'^2 + y'^2} + C = 0.$$

Звівши його до спільного знаменника і виділивши повні квадрати, одержуємо наступне рівняння:

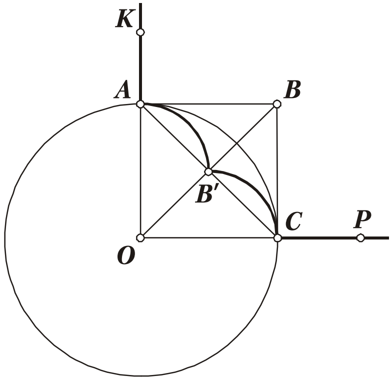
$$\left(x' + \frac{Ar^2}{2C}\right)^2 + \left(y' + \frac{Br^2}{2C}\right)^2 = \left(\frac{r\sqrt{A^2 + B^2}}{2C}\right)^2.$$

Легко бачити, що це рівняння визначає коло з проколотим полюсом інверсії (початком координат). З взаємності перетворення інверсії одразу випливає, що фігурою, інверсною з колом, проколотим у центрі інверсії, є пряма, що через центр інверсії не проходить. На цьому доведення теореми ми завершимо. ■

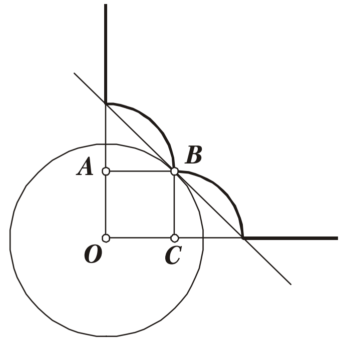
Розглянемо тепер приклади застосування інверсії до розв'язування задач на побудову. Спочатку побудуємо декілька фігур, що інверсні заданим фігурам.

Приклад 1. *Побудувати фігуру, інверсну з квадратом, проколотим у полюсі інверсії, одна з вершин якого співпадає з полюсом інверсії, а друга — належить колу інверсії.*

Розв'язання. Може трапитись два випадки. Розглянемо спочатку перший з них, який відповідає *малюнку 20*. Нехай коло $S(O, OA)$ є колом інверсії, $OABC$ — заданий квадрат. Легко переконатися, що фігурою, інверсною з відрізком OA, проколотим у



Мал. 20



Мал. 20(а)

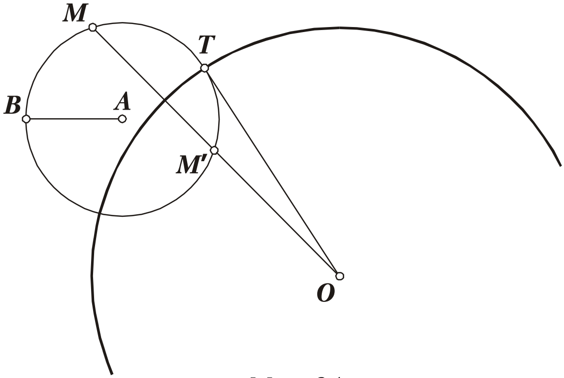
точці O, є промінь AK (попробуйте це пояснити), а фігурою, інверсною з відрізком OC, проколотим у точці O, є промінь CP. Відрізок AB належить прямій AB, що не проходить через полюс інверсії. Отже, цей відрізок інверсується в дугу кола, що інверсне з прямою AB і проходить через полюс інверсії. Це коло проходить через точку A, оскільки вона лежить на колі інверсії і є нерухомою точкою. Побудуємо тепер точку B', інверсну з точкою B, як це було зроблено вище. Беручи до уваги властивості квадрата, переконуємось, що точка B' співпадає з його центром. Таким чином, фігурою, інверсною до прямої AB, є коло, проколоте в точці O, що проходить через три точки: A, O і B'. Це коло легко будується. Фігурою, що інверсна з відрізком AB, є його дуга AB'. Аналогічно будується дуга $B'C$, що є фігурою, інверсною з відрізком BC.

Другий можливий випадок зображено на *малюнку 20(а)*. Пропонуємо читачеві самостійно обґрунтувати побудову інверсної до даного квадрата фігури, яку накреслено на цьому малюнку жирною лінією. ■

Приклад 2. *Задано коло $H(A, AB)$ і полюс інверсії O. Побудувати коло інверсії так, щоб дане коло H було інваріантом утвореної інверсії.*

Розв'язання. Проведемо дотичну з точки O до даного кола (стандартна побудова з шкільного курсу геометрії). Точку їх дотику позначимо через T. Покажемо, що коло $S(O, OT)$ є шуканим.

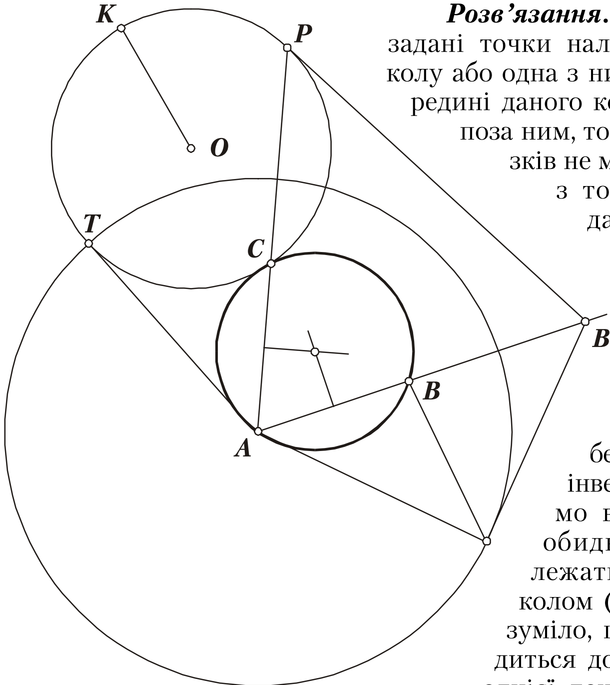
Дійсно, нехай M — довільна точка даного кола, що лежить зовні побудованого кола інверсії. Позначимо через M' другу точку перетину відрізка OM з даним колом (*мал. 21*). За відомою властивістю дотичної і січної, які проведено до кола з однієї



Мал. 21

точки, одержуємо, що $OM \times OM' = OT^2$, де відрізок OT є радіусом інверсії. Таким чином, точки M та M' є взаємно інверсними, що завершує доведення. Зауважимо, що дане коло ортогональне до побудованого кола інверсії, оскільки їх радіуси, що містять точку T, взаємно перпендикулярні. ■

Приклад 3. *Побудувати коло, що проходить через дві дані точки A та B і дотикається до даного кола H(O, OK).*



Мал. 22

Розв'язання. Якщо обидві задані точки належать даному колу або одна з них лежить всередині даного кола, а друга — поза ним, то задача розв'язків не має. Якщо одна з точок належить даному колу, а друга — не належить, то задача просто розв'язується (перевірте це самостійно) і без застосування інверсії. Розглянемо випадок, коли обидві дані точки лежать поза даним колом (*мал. 22*). Зрозуміло, що задача зводиться до побудови ще однієї точки, яка належить шуканому колу, наприклад, точки дотику C даного та шуканого кіл. Задамо інверсію так, щоб для фігур, що інверсні до даного і шуканого кіл, одержалася більш проста задача. Так, оберемо за центр інверсії одну з даних точок, наприклад, точку A. Тоді шукане коло проходить через центр інверсії і фігурою, інверсною до цього кола, проколотого в точці A, є пряма a, що через цю точку не проходить. Нехай T — спільна точка дотичної, що проведена до даного кола з точки A, і цього кола (точка дотику). Оберемо коло $S(A, AT)$ за коло інверсії. Тоді (дивись приклад 2), дане коло в цій інверсії інверсне самому собі. Таким чином, пряма a повинна дотикатися до даного кола в деякій точці P і проходити через точку B', інверсну з точкою B. Зрозуміло, що точка P інверсна з точкою C.

Звідси випливає **ланцюжок побудов**:

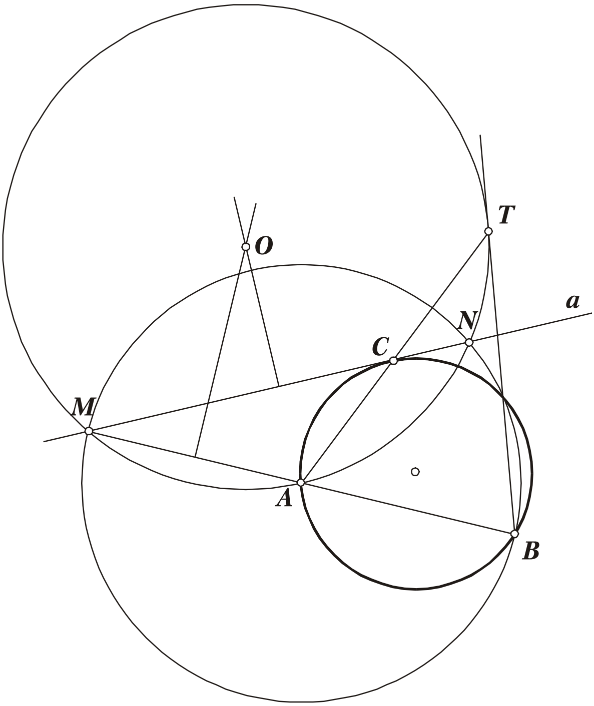
1) з точки A проводимо дотичну до даного кола, одержуємо точку T;
2) будуємо коло інверсії $S(A, AT)$;
3) будуємо точку B', інверсну з точкою B відносно побудованого кола інверсії;
4) з точки B' проводимо дотичну до даного кола, одержуємо точку P;
5) будуємо точку C, інверсну з точкою P;
6) описуємо коло навколо трикутника ABC. Це коло є шуканою фігурою.

Дослідження. Усі побудови пунктів 1-3 однозначно виконуються. Якщо точка B' лежить поза даним колом, то з неї до нього можна провести дві дотичні, і задача має два розв'язки. На даному колі ця точка лежати не може, бо інакше вона б співпала з точкою B, а остання не належить цьому колу за умовою. Не може точка B' лежати і всередині даного кола (попробуйте довести це самостійно). Отже, задача має два розв'язки. ■

Трапляється, що одну задачу можна розв'язати різними методами. Тоді слід обирати з них більш простий і раціональний.

Приклад 4. *Розв'язати приклад 2 з* ***п.1.3*** *цієї книжки методом інверсії.*

Розв'язання. Розглянемо той самий випадок, що і в прикладі 2 з **п. 1.3** (*мал. 23*). Оберемо за центр інверсії точку A, а за радіус інверсії — відрізок AB. Будуємо коло інверсії $S(A, AB)$. Фігурою, інверсною до шуканого кола, проколотого в точці A, є пряма b, що проходить через інверсну з B точкою (точка B лежить на колі інверсії, а отже, сама собі інверсна), і дотикається до фігури, що інверсна з даним колом. Цією фігурою є коло, яке можна побудувати. Звідси випливає наступний процес побудов:



Мал. 23

1) будуємо коло інверсії $S(A, AB)$ яке у нашому випадку має дві спільні точки M і N з даною прямою, що у загальному випадку не обов'язково;
2) описуємо коло навколо трикутника AMN, яке є фігурою, інверсною з прямою a;
3) до цього кола з точки B проводимо дотичну BT, де T — точка дотику;
4) будуємо точку C перетину відрізка AT і прямої a. Ця точка інверсна з точкою T і є точкою дотику шуканого кола до даної прямої a;
5) Описуємо коло навколо трикутника ABC. Воно є шуканим. ■

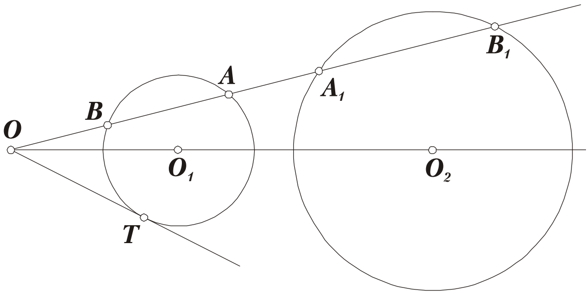
Приклад 5. *Знайти центр та коефіцієнт гомотетії двох інверсних кіл.*

Розв'язання. Нехай на *малюнку 24(а)* точка O — полюс інверсії f, r — довжина радіуса інверсії, кола з центрами O_1 та O_2 — інверсні фігури. Коло інверсії креслити не будемо. Зрозуміло, що жодне з двох інверсних кіл не може проходити через полюс інверсії. Нехай точка A належить першому колу і промінь OA має з цим колом ще одну спільну точку B. Якщо точки A_1 та B_1 інверсні з точками A і B відповідно, то промінь OA перетинає друге коло в точках A_1 та B_1. При цьому з означення інверсії випливає, що $OA \cdot OA_1 = r^2$ і $OB \cdot OB_1 = r^2$. Легко бачити, що існують такі дійсні числа k і λ, що $\overrightarrow{OB_1} = k\overrightarrow{OA}$ і $\overrightarrow{OA_1} = \lambda \cdot \overrightarrow{OB}$.

Звідси випливає, що

$$k = \lambda = \frac{r^2}{\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}}.$$

Скалярний добуток $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ не залежить від вибору точки A. Дійсно,



Мал. 24(а)

$\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = OA \cdot OB = OT^2$,

де точка T є точкою дотику до кола з центром O_1 дотичної, проведеної до цього кола через точку O. Скалярний добуток $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ називають степенем точки O відносно кола (O_1, O_1A) і позначають символом $C^O_{(O_1, O_1A)}$.

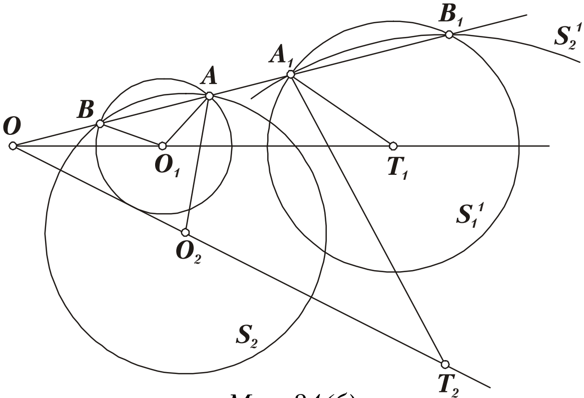
Отже, гомотетія h з центром O та коефіцієнтом $k = \dfrac{r^2}{C^O_{(O_1, O_1A)}}$ перетворює перше з даних інверсних кіл у друге. ■

Зауважимо, що на точки кола (O_1, O_1A) інверсія f та гомотетія h діють зовсім не однаково. Так, $f(A) = A_1$, а $h(A) = B_1$. Подумайте, чи існують на колі (O_1, O_1A) такі точки, на які ці перетворення діють однаково.

Розглянемо тепер на площині дві криві a і b, що мають спільну точку K, причому до кожної з них у цій точці існує дотична. У цьому разі кут між вказаними дотичними в точці K називають кутом між кривими a і b у цій точці. Під дотичною до прямої у будь-якій її точці розуміють саму цю пряму.

Теорема 2. *Припустимо, що в площині задано інверсію f відносно кола $S(O, OP)$. Нехай дві криві a і b, кожна з яких є або прямою, або колом, що лежать у цій площині, мають спільну точку A. Тоді кут між фігурами, що інверсні до цих кривих, у точці A_1, що інверсна з точкою A, дорівнює куту між кривими a і b у точці A.*

Зауважимо, що ця теорема справджується для набагато ширшого класу кривих. Але за допомогою циркуля та лінійки ніякі криві, крім прямих та кіл, не будуються, отже, сформульоване твердження цілком задовольняє потреби цієї книги.



Мал. 24(б)

Доведення проведемо для складнішого випадку, коли дані криві є колами $S_i(O_i)$, $(i = 1, 2)$, що не проходять через полюс інверсії і перетинаються в точках A і B. Інверсні до них фігури теж є колами, які ми позначимо через $S_i^1(T_i)$, $(i = 1, 2)$ відповідно. Користуючись *малюнком 24(а)*, зобразимо точки A і A_1 на схематичному *малюнку 24(б)*. З прикладу 5 випливає, що прямі O_1B та T_1A_1 паралельні, отже, кути OBO_1 та OA_1T_1 рівні. З рівності відрізків O_1B та O_1A випливає рівність кутів OBO_1 та O_1AA_1. З рівності двох пар вказаних кутів одержуємо, що кути O_1AA_1 та OA_1T_1 теж рівні. Аналогічно до останнього твердження легко показати, що рівними є кути O_2AA_1 та OA_1T_2. У цьому разі рівними є кути O_1AO_2 та $T_2A_1T_1$, оскільки перший з них дорівнює різниці кутів O_1AA_1 та O_2AA_1, другий – різниці кутів OA_1T_1 та OA_1T_2, а ці різниці рівні між собою. Легко бачити, що кут O_1AO_2 дорівнює куту між дотичними до кіл S_1 і S_2 в точці A, як кут між радіусами цих кіл, які містять цю точку. З тієї ж причини кут $T_2A_1T_1$ дорівнює куту між дотичними до кіл S_1^1 і S_2^1 в точці A_1. На цьому доведення теореми 2 ми завершуємо і пропонуємо читачеві самостійно розглянути випадки, коли деякі з кривих a, b та інверсних з ними фігур є прямими. ■

Вправи для самостійного розв'язування

1. Побудувати фігуру, інверсну до даного кола, яке розміщене зовні (всередині) кола інверсії.
2. Побудувати фігуру, інверсну до прямої, що не перетинає (перетинає) коло інверсії.
3. Побудувати фігури, що інверсні до квадрата і правильного трикутника, які вписано в коло інверсії (описано навколо кола інверсії).

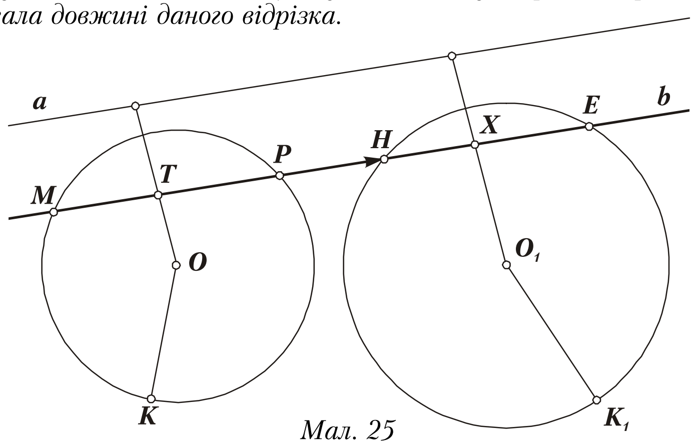
4. Розв'язати приклад 3 у випадку, коли дані точки лежать всередині даного кола.
5. Задано точку A і дві прямі, жодній з яких вона не належить. Через цю точку провести пряму, яка перетинає дані прямі в точках B і C відповідно, причому $AB \cdot AC = k^2$, де k — довжина даного відрізка.
6. Побудувати коло, що дотикається до трьох даних кіл, які мають спільну точку.
7. Побудувати коло, що дотикається до трьох даних кіл, якщо два з них дотикаються.
8. Побудувати коло, що проходить через дану точку і дотикається до двох даних кіл (до даного кола і до даної прямої).
9. Побудувати коло, що дотикається до даного кола і до даної прямої в заданій на ній точці.
10. Побудувати коло, що дотикається до двох даних кіл, причому до одного з них — у заданій точці.
11. Побудувати коло, що дотикається до трьох даних кіл (задача Аполонія).
12. Побудувати пряму, яка проходить через дану точку і ортогональна до даного кола (метод інверсії застосовувати не потрібно).
13. Побудувати коло, яке проходить через дві дані точки і ортогональне до даного кола.
14. Побудувати пряму, яка проходить через дану точку і перетинає дане коло під даним кутом (кутом між прямою і колом в їх спільній точці називають кут між цією прямою і дотичною до кола у цій точці).
15. Побудувати коло, що проходить через дві дані точки і перетинає задане коло (задану пряму) під даним кутом.

1.5. Метод геометричних перетворень

При розв'язуванні багатьох задач на побудову фігур у площині зручно використовувати різні види геометричних перетворень. Так, наприклад, у попередньому підрозділі ми використовували інверсію. Будемо вважати, що читач цього посібника знайомий з означеннями та основними властивостями руху та перетворення подібності. У цьому підрозділі до розв'язування задач будуть застосовані різні види руху (паралельне перенесення, поворот, центральна та осьова симетрії), а також — перетворення подібності і гомотетія, як його частинний випадок.

Почнемо з прикладів застосування методу паралельного перенесення.

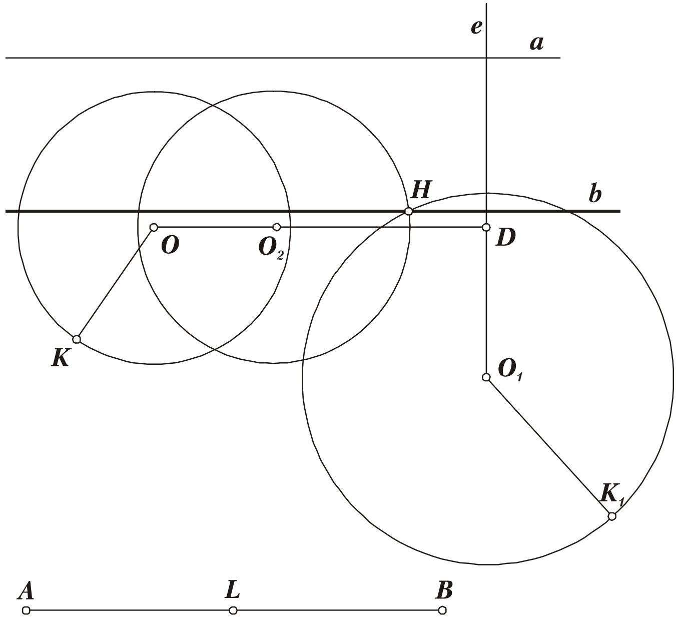
Приклад 1. *Побудувати паралельну до даної прямої спільну січну двох даних кіл так, щоб сума довжин утворених хорд дорівнювала довжині даного відрізка.*



Мал. 25

Розв'язання. Розпочнемо з аналізу. Нехай a — дана пряма, $S(O, OK)$ і $S(O_1, O_1K_1)$ — дані кола, c — довжина даного відрізка AB і b — шукана січна (*мал. 25*). Це означає, що прямі a та b паралельні і $MP + HE = c$. Опустимо на січну b перпендикуляри OT та O_1X, які одночасно перпендикулярні і до прямої a. Легко бачити, що $TP + HX = \dfrac{MP + HE}{2} = \dfrac{c}{2}$. Тоді $PH = TX - \dfrac{c}{2}$. Якщо здійснити паралельне перенесення кола S на вектор $\overrightarrow{PH}$, то образ цього кола перетне коло S_1 у точці H. Розв'язання зводиться до побудови цієї точки, тому що, провівши через неї пряму, паралельну до прямої a, одержимо шукану січну.

Побудову виконаємо на *малюнку 26* у такому порядку: 1) через точку O_1 проводимо пряму e, перпендикулярну до даної прямої a, і нехай OD — перпендикуляр, опущений на пряму e з точки O. Очевидно, що $OD = TX$; 2) ділимо точкою L даний відрізок AB навпіл і на промeневі DO відкладаємо відрізок DO_2, що дорівнює відрізку AL. Тоді довжина відрізка OO_2 дорівнює $OD - \dfrac{c}{2}$; 3) здійснюємо паралельне перенесення даного кола S на вектор $\overrightarrow{OO_2}$. Для цього будуємо коло $S_2(O_2, OK)$; 4) через точку H, яка належить перетину кіл S_1 та S_2 проводимо пряму b, паралельну до прямої a. Це і є шукана січна. **Доведення** випли-

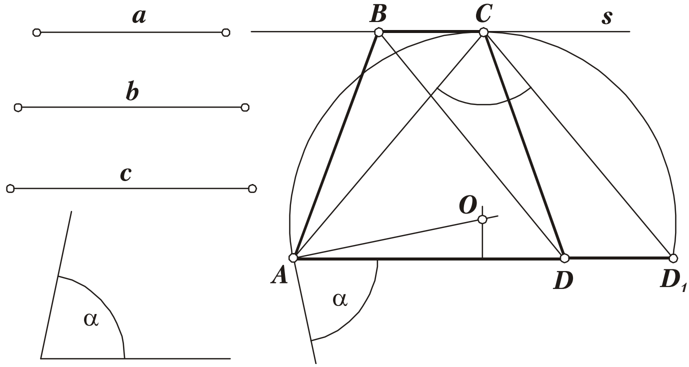


Мал. 26

ває з аналізу та ланцюжка проведених побудов. Детально виписувати його ми тут не будемо. **Дослідження.** Одразу слід виключити з розгляду таке розташування заданих фігур на площині, коли взагалі не існує жодної прямої, що паралельна до прямої a і перетинає обидва дані кола. У цьому випадку задача взагалі позбавлена смислу. Подальші міркування слід пов'язувати з існуванням відрізка OO_2 (умова $OD - \frac{c}{2} \geq 0$) та кількістю точок перерізу кіл S_1 та S_2, якщо цей відрізок існує. Задача може мати один, два, безліч розв'язків, а може і не мати жодного розв'язку. Пропонуємо читачеві накреслити малюнки, що відповідають цим випадкам. ■

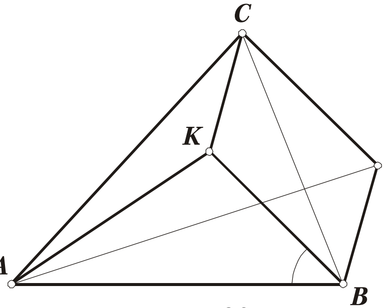
Приклад 2. *Побудувати трапецію за середньою лінією, висотою, бічною стороною та кутом між діагоналями.*

Розв'язання. Позначимо вершини шуканої трапеції через A, B, C, D, і нехай $(BC) \parallel (AD)$, відрізки AC і BD — діагоналі трапеції, відрізок KE — її середня лінія. Накресліть малюнок для аналізу самостійно. Здійснимо паралельне перенесення діагоналі BD вектор $\overrightarrow{BC}$. При цьому точка B перейде в точку C, а точка



Мал. 27

D — в точку D_1, причому чотирикутник BCD_1D є паралелограмом. У трикутнику ACD_1 основа $AD_1 = AD + DD_1 = AD + BC = 2KE$ і легко будується, кут ACD_1 відомий (кут між діагоналями трапеції) і, нарешті, відома висота (вона дорівнює заданій висоті трапеції). Такий трикутник можна побудувати. Подальші побудови не викликають ніяких ускладнень. Накреслимо спочатку задані фігури: відрізки з довжинами a, b і c, що дорівнюють середній лінії, висоті і бічній стороні AB трапеції відповідно, та кут α, що дорівнює куту між її діагоналями. **Побудову** виконаємо на *малюнку 27* у такій послідовності: 1) будуємо відрізок AD_1 довжиною $2a$; 2) будуємо ГМТ, з яких цей відрізок видно під кутом α (дивись приклад 1 з **п. 1.2** цієї книжки); 3) будуємо ГМТ, що віддалені від прямої AD_1 на відстань b (дві прямі, що паралельні до прямої AD_1. Одну з них позначимо через s); 4) точка C, яка належить перерізу першого побудованого ГМТ і прямої s, є однією з вершин шуканої трапеції, а точка B перетину цієї прямої з колом (A, r), де довжина відрізка r дорівнює c, теж є її вершиною; 5) на промені D_1A будуємо відрізок D_1D, що дорівнює відрізку BC, як показано на *малюнку 27*. Усі чотири вершини трапеції побудовано. **Дослідження.** Необхідною умовою існування розв'язку задачі є, очевидно, виконання нерівності $c > b$. Якщо два побудовані вище ГМТ мають у верхній півплощині відносно прямої AD_1 дві спільні точки, то задача має два розв'язки, якщо одну спільну точку, — то один розв'язок, якщо жодної спільної точки, — то задача розв'язків не має. Легко помітити, що спільні точки цих ГМТ, що лежать у нижній півплощині відносно прямої AD_1, не збільшують вказаної кількості розв'язків (про те, які розв'язки задачі вважати різними, ми домовились у **п. 1.1**). ■



Мал. 28

Приклад 3. *Побудувати опуклий чотирикутник за діагоналями, двома протилежними сторонами і кутом між прямими, що містять ці сторони.*

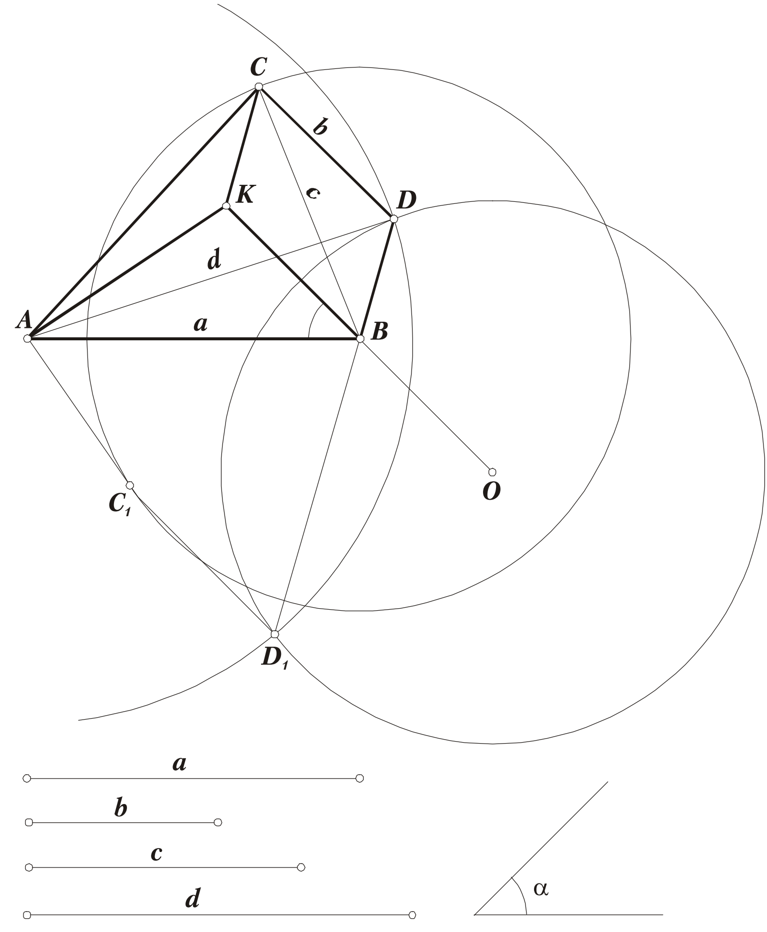
Розв'язання. **Аналіз.** Припустимо, що чотирикутник *ACDB* — шуканий (*мал. 28*) і його сторони *AB* і *CD* дорівнюють заданим відрізкам. Здійснимо паралельне перенесення відрізка *CD* на вектор $\overrightarrow{DB}$ і одержимо відрізок *KB*. У трикутнику *AKB* сторони *AB* і *BK* та кут *ABK* задані, тому цей трикутник можна побудувати (за двома сторонами і кутом між ними). Точка *C* лежить на колі $S_2(B, BC)$, а точка *D* — на колі $S_1(A, AD)$. Ці кола можна побудувати, оскільки задано їх центри і відрізки, що дорівнюють їх радіусам (діагоналі чотирикутника). Легко бачити, що при паралельному перенесенні точки *C* на вектор $\overrightarrow{KB}$ її образ співпаде з точкою *D*. Звідси випливає, що й коло S_3, що є образом кола S_2 при його паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{KB}$, містить точку *D*.

Побудову проведемо на *малюнку 29*. Нехай задано відрізки *a, b, c, d*, що дорівнюють сторонам *AB, CD* та діагоналям *BC*, *AD* відповідно, і α — кут між прямими *AB* та *CD*.

Здійснимо наступний ланцюжок побудов: 1) будуємо трикутник *ABK* за сторонами *a, b* та кутом α між ними; 2) будуємо кола $S_1(A, d)$ та $S_2(B, c)$; 3) на промені *KB* будуємо відрізок *BO*, що дорівнює відрізку *BK* і проводимо коло $S_3(O, c)$, що є образом кола $S_2(B, c)$ при його паралельному перенесенні на вектор $\overrightarrow{KB}$; 4) точка *D* перетину кіл S_1 та S_3 є вершиною шуканого чотирикутника. Остання його вершина *C* належить перерізу кіл S_2 та (D, b).

Доведення. Чотирикутник *ACDB* — шуканий. Дійсно, його сторони *AB* і *CD* та діагоналі *BC* і *AD* дорівнюють відповідним заданим відрізкам безпосередньо за побудовою, а кут між прямими *AB* і *CD* дорівнює даному куту α, оскільки, як неважко показати, фігура *CDBK* є паралелограмом.

Дослідження. Трикутник *AKB* завжди однозначно будується, кола S_1, S_2 та S_3 — теж. Отже, задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають кола S_1 та S_3. На *малюнку 29* таких точок дві. У цьому разі другим розв'язком задачі є чотирикутник ABD_1C_1. ■

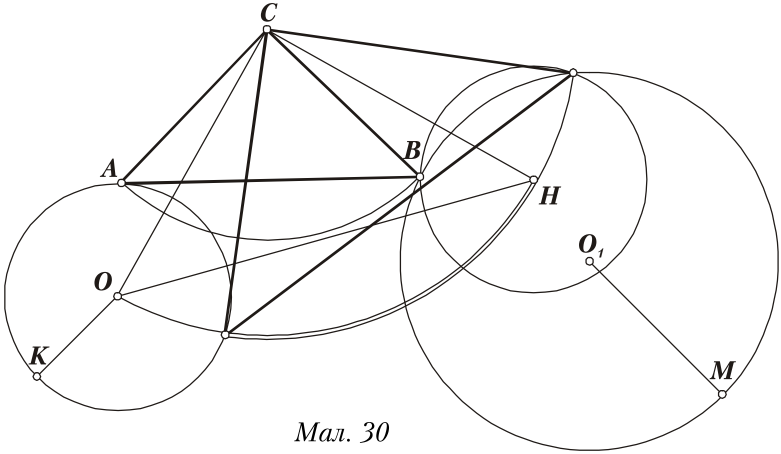


Мал. 29

Проілюструємо тепер застосування методу повороту до розв'язування задач на побудову.

Приклад 4. *Побудувати рівнобедрений прямокутний трикутник, вершина прямого кута якого співпадає з даною точкою С, а дві інші вершини належать по одній до кожного з двох даних кіл.*

Розв'язання. Нехай точка C і кола $S_1(O,\ OK)$, $S_2(O_1,\ O_1M)$ є заданими фігурами (*мал. 30*). Припустимо, що вершини A та B шуканого трикутника належать колам S_1 та S_2 відповідно. Якщо точку A повернути на прямий кут навколо точки C проти годинникової стрілки, то образ цієї точки співпаде з точкою B. Це



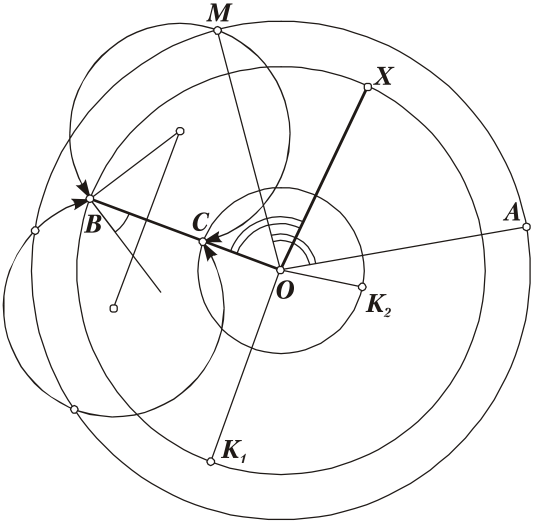
Мал. 30

означає, що образ кола $S_1(O, OK)$ при вказаному повороті повинен містити точку B. Звідси випливає побудова: 1) повертаємо на прямий кут проти годинникової стрілки навколо точки C точку O і одержуємо точку H; 2) будуємо коло $S_3(H, OK)$, що є образом кола $S_1(O, OK)$ при вказаному повороті; 3) точка B, яка належить перерізу кіл S_2 та S_3 є вершиною шуканого трикутника. Повернувши її на прямий кут за годинниковою стрілкою, одержимо точку A, що є третьою вершиною шуканого трикутника. Кількість розв'язків задачі слід пов'язувати з кількістю точок перерізу кіл S_2 та S_3 (їх може бути одна, дві, безліч або жодної). ■

Приклад 5. *Побудувати такий радіус більшого з двох даних концентричних кіл, щоб його відрізок, який міститься між цими колами, з даної точки було видно під даним кутом.*

Розв'язання. Нехай кола $S_1(O, OK_1)$, $S_2(O, OK_2)$, точка A та кут α — задані фігури (*мал. 31*). Ця задача відрізняється від попередніх тим, що сама шукана фігура (радіус кола S_1) є заданою, і з усіх радіусів цього кола слід вибрати ті, які задовольняють умову задачі. Кількість розв'язків цієї задачі співпадає з кількістю таких радіусів.

Проведемо довільний радіус OB кола S_1 і побудуємо ГМТ, з яких відрізок BC (C — точка перетину цього радіуса з колом S_2) видно під даним кутом α. Залишається повернути фігуру Φ, що є об'єднанням відрізка OB з побудованим ГМТ, навколо точки O на такий кут, щоб фігура Φ_1, яка є образом цього ГМТ, одержаним при вказаному повороті, містила у собі точку A. Для знаходження потрібного кута повороту побудуємо коло $S_3(O, OA)$, і нехай точка M є точкою перетину цього кола з фігурою Φ_1. У



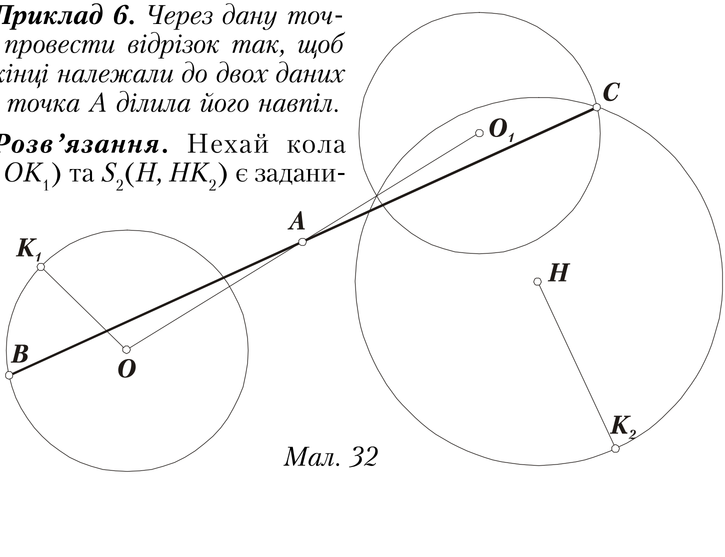
Мал. 31

цьому разі шуканий кут повороту навколо точки O за годинниковою стрілкою дорівнює куту MOA. Повернемо на цей кут відрізок BO за годинниковою стрілкою навколо точки O і одержимо шуканий радіус OX. Задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають побудоване ГМТ і коло $S_3(O, OA)$, тобто, або жодного розв'язку, або два розв'язки, або чотири розв'язки. У розглянутому нами випадку таких розв'язків існує чотири. ■

Зауважимо, що частковим випадком повороту є центральна симетрія. Дійсно, для побудови точки, симетричної з даною точкою відносно заданого центру симетрії, досить повернути дану точку навколо цього центру на кут, величина якого дорівнює 180°. Проте при розв'язуванні конкретних задач буває зручним безпосереднє застосування саме центральної симетрії.

Приклад 6. *Через дану точку A провести відрізок так, щоб його кінці належали до двох даних кіл, а точка A ділила його навпіл.*

Розв'язання. Нехай кола $S_1(O, OK_1)$ та $S_2(H, HK_2)$ є задани-

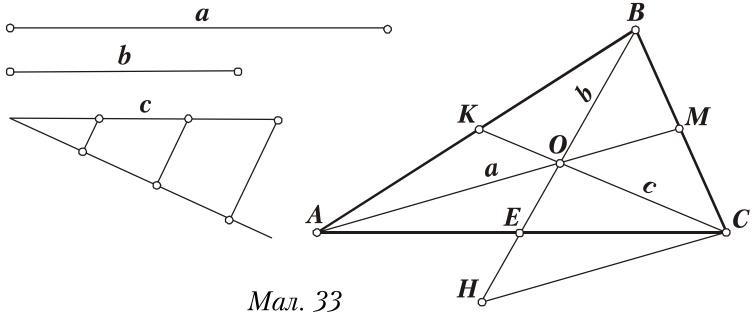


Мал. 32

ми фігурами. Якщо BC — шуканий відрізок, то точки B і C належать колам $S_1(O, OK_1)$ і $S_2(H, HK_2)$ відповідно, причому ці точки симетричні відносно даної точки A. Тоді коло S_3, симетричне до кола $S_1(O, OK_1)$, повинне містити точку C, отже, воно перетинає дане коло $S_2(H, HK_2)$ саме у цій точці. Звідси випливає **побудова:** 1) будуємо точку O_1, симетричну з точкою O відносно точки A; 2) будуємо коло $S_3(O_1, OK_1)$. Спільна точка цього кола і кола $S_2(H, HK_2)$ є одним з кінців шуканого відрізка (*мал. 32*). Задача має стільки розв'язків, скільки спільних точок мають кола S_2 та S_3. ■

Приклад 7. *Побудувати трикутник за трьома даними його медіанами.*

Розв'язання. Нехай задано три відрізки з довжинами a, b і c. Припустимо, що шуканий трикутник ABC побудований, і відрізки AM, BE і CK є його медіанами, тобто, $AM = a$, $BE = b$ і $CK = c$ (накресліть самостійно малюнок для аналізу). Як відомо з шкільного курсу геометрії, усі медіани трикутника мають спільну точку O, яка ділить кожну з них на два відрізки, причому справджуються рівності: $\frac{AO}{OM} = \frac{BO}{OE} = \frac{CO}{OK} = \frac{2}{1}$. Нехай H — точка, що симетрична з точкою O відносно точки E. Легко довести, що виконуються рівності: $HC = OA = \frac{2}{3}a$, $OH = OB = \frac{2}{3}b$, $OC = \frac{2}{3}c$ (доведіть це самостійно). Звідси випливає, що трикутник HOC можна побудувати за трьома сторонами, після чого шуканий трикутник легко будується. **Побудову** виконаємо на *малюнку 33*: 1) будуємо відрізки AO, BO і CO, поділивши кожний заданий відрізок на три рівні частини, користуючись теоремою Фалеса; 2) будуємо трикутник HOC за трьома сторонами, що відповідно рівні цим побудованим відрізкам; 3) будуємо точ-

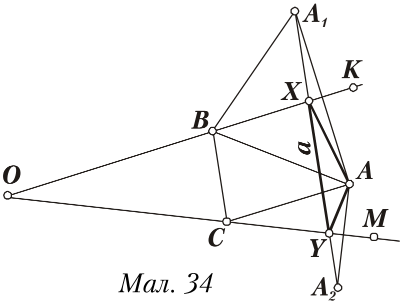


Мал. 33

ку A, симетричну з точкою C відносно точки E, яка ділить відрізок OH навпіл; 4) на промені HO будуємо відрізок OB, що дорівнює відрізку OH, так, як вказано на малюнку. Трикутник ABC — шуканий. Доведення цього майже очевидне, і ми пропонуємо читачеві провести його самостійно. **Дослідження** слід пов'язувати з можливістю побудови трикутника HOC. Якщо його можна побудувати, то задача має єдиний розв'язок, якщо ні, то задача розв'язків не має. Для існування трикутника з трьома наперед заданими сторонами необхідно і досить, щоб сума довжин будь-яких двох з них була більшою за довжину третьої сторони. Отже, задача має єдиний розв'язок, якщо виконується система нерівностей: $a + b > c$, $b + c > a$, $a + c > b$. Якщо хоч одна з них не виконується, то задача не має розв'язків. ■

У трьох наступних прикладах до розв'язування задач на побудову застосовано метод осьової симетрії.

Приклад 8. *Побудувати трикутник найменшого периметра так, щоб однією з його вершин була задана внутрішня точка даного кута, а дві інші вершини лежали на сторонах цього кута.*



Мал. 34

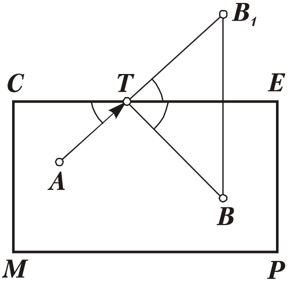
Розв'язання. Нехай KOM — заданий кут, A — задана точка. Припустимо, що вершини B і C трикутника ABC лежать на сторонах даного кута (*мал. 34*). Побудуємо точки A_1 та A_2, симетричні відносно прямих OK та OM відповідно. Зрозуміло, що периметр трикутника ABC дорівнює $A_1B + BC + A_2C$, і він є найменшим тоді, коли точки A_1, B, C і A_2 лежать на одній прямій. Звідси випливає **побудова:**

1) будуємо точки A_1 та A_2 і проводимо через них пряму a;
2) будуємо трикутник AXY, де X та Y — точки перетину прямої a з сторонами даного кута OK і OM відповідно.

Цей трикутник є шуканим. Усі побудови виконуються однозначно, тобто задача завжди має єдиний розв'язок. ■

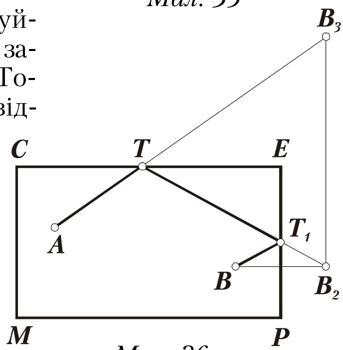
Приклад 9. *На прямокутному більярді CEPM без луз (мал. 35) задано точки A і B, у яких знаходяться дві кулі (ми їх для простоти називатимемо кулями A і B). В якому напрямку треба вдарити кулю A, щоб, відбившись від усіх чотирьох бортів, вона вдарила кулю B?*

Розв'язання. Спочатку розглянемо допоміжну задачу: в якому напрямку треба вдарити кулю *A*, щоб, відбившись від борту *CE*, вона вдарила кулю *B*? Припустимо, що цей напрямок визначається вектором $\overrightarrow{AT}$. Згідно відомого фізичного закону кути *CTA* і *BTE* повинні бути рівними. Нехай B_1 — точка, що симетрична з точкою *B* відносно прямої *CE*. Тоді очевидно, що точки *A, T* і B_1 лежать на одній прямій (обґрунтуйте це твердження). Отже, допоміжна задача завжди має єдиний розв'язок. Точка *T* будується як точка перетину відрізка AB_1 з відрізком *CE*.

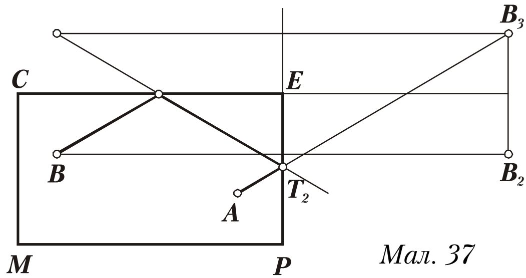


Мал. 35

Ускладнимо задачу: в якому напрямку треба вдарити кулю *A*, щоб, відбившись спочатку від борту *CE*, а потім — від борту *EP*, вона вдарила кулю *B*? Припустимо, що цей напрямок визначається вектором $\overrightarrow{AT}$ (*мал. 36*), і куля *A* рухалась вздовж ламаної ATT_1B. Неважко помітити, що точки *T*, T_1, B_2 лежать на одній прямій, і точки *A, T*, B_3 теж мають цю властивість. Тут точка B_2 симетрична з точкою *B* відносно прямої *EP*, а точка B_3 симетрична з точкою B_2 відносно прямої *CE*. Тепер побудова точки *T* зрозуміла: будуємо по черзі точки B_2 та B_3, проводимо пряму AB_3 і в перетині останньої з відрізком *CE* одержуємо точку *T*. Ця задача може не мати розв'язку (*мал. 37*), коли пряма AB_3 не перетинається з відрізком *CE*. Проте, якщо змінити чергу відбивання кулі *A* від вказаних бортів, тобто вважати, що спочатку вона відбивається від борту *EP*, а потім — від борту *CE*, то задача матиме розв'язок, який визначається вектором $\overrightarrow{AT_2}$.

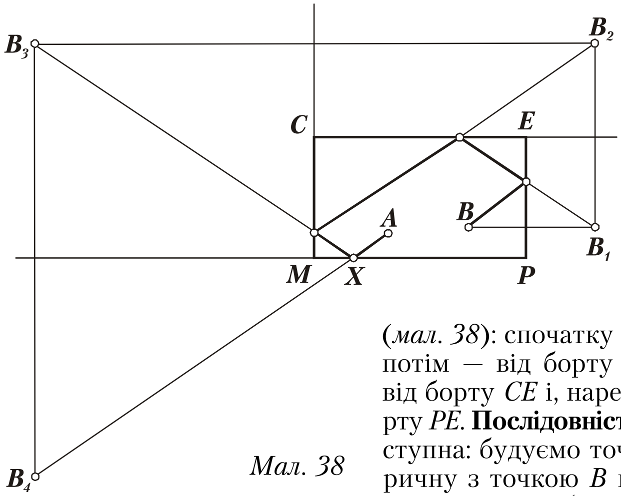


Мал. 36



Мал. 37

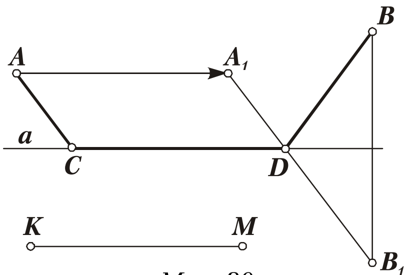
Зрозуміло, що в загальній постановці задача ще ускладнюється. Конкретизуємо послідовність відбивань кулі *A* від бортів



Мал. 38

(*мал. 38*): спочатку від борту *MP*, потім — від борту *MC*, потім — від борту *CE* і, нарешті, — від борту *PE*. **Послідовність побудов** наступна: будуємо точку B_1, симетричну з точкою *B* відносно прямої *PE*, потім будуємо точку B_2, симетричну з точкою B_1 відносно прямої *CE*, далі будуємо точку B_3, симетричну з точкою B_2 відносно прямої *MC* і, нарешті, будуємо точку B_4, симетричну з точкою B_3 відносно прямої *MP*. Через *X* позначимо точку перетину прямої AB_4 з відрізком *MP*. Якщо ця точка не є кінцем відрізка *MP*, то вектор $\overrightarrow{AX}$ визначає потрібний напрямок удару. Якщо ж пряма AB_4 з відрізком *MP* не перетинаються або точка їх перетину співпадає з кінцем цього відрізка, то слід змінити послідовність відбивань кулі від бортів. Попробуйте встановити самостійно, чи завжди існує така послідовність відбивань кулі від бортів, при якій поставлена задача має розв'язок. ■

Приклад 10. *Задано точки A і B, що лежать по один бік від даної прямої a, і відрізок KM. Побудувати на цій прямій точки C і D так, щоб відрізки CD і KM були рівними і ламана ACDB мала найменшу довжину.*



Мал. 39

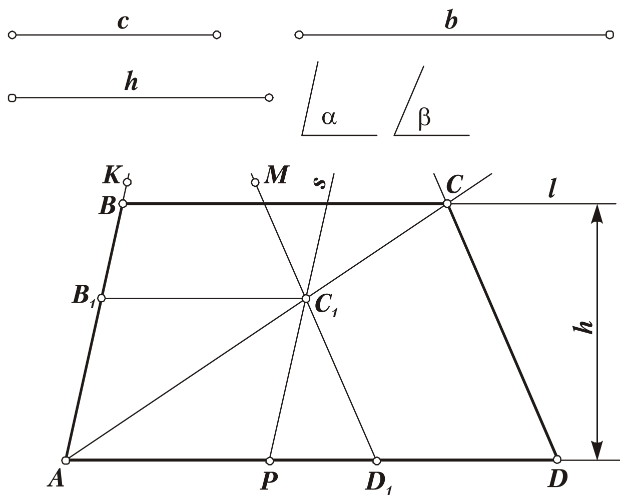
Розв'язання. Припустимо, що точки *C* і *D* побудовано (*мал. 39*), тобто *CD* = *KM* і вказана ламана має найменшу довжину. Здійснимо паралельне перенесення точки *A* на вектор $\overrightarrow{CD}$ і одержимо точку A_1. Довжина ламаної *ACDB* дорівнює *CD* +

$+ A_1D + BD$ і залежить від суми двох останніх доданків, оскільки довжина відрізка CD задана. Будуємо точку B_1, симетричну з точкою B відносно прямої a. Тоді $A_1D + BD = A_1D + B_1D$, а остання сума є мінімальною, коли точки A_1, D і B_1 лежать на одній прямій. Звідси одразу випливає наступна побудова: 1) будуємо точки A_1 і B_1, як вказано вище; 2) будуємо спільну точку прямих A_1B_1 та a, яка і є шуканою точкою D. Побудова точки C очевидна. Задача має єдиний розв'язок. ■

Застосування методу подібності до розв'язування задач на побудову часто полягає в тому, що спочатку будується не шукана фігура, а фігура, що подібна до неї. Розглянемо задачу такого типу.

Приклад 11. *Побудувати трапецію ABCD за кутами при її основі AD, висотою, що проведена до цієї основи, та відношенням* $\dfrac{m}{n}$ *(m > n) її основ* $\dfrac{AD}{BC}$*, де m та n — довжини даних відрізків.*

Розв'язання. Задані кути позначимо через α і β, задану висоту — через h, відрізки з довжинами m і n — через b та c відповідно. **Побудуємо спочатку трапецію $AB_1C_1D_1$** за основами b і c та заданими кутами при основі b (*мал. 40*). Для цього будуємо відрізок b з кінцевими точками A, D_1 і кути KAD_1 та MD_1A з вершинами у цих точках, що дорівнюють кутам α і β відповідно. На відрізку AD_1 будуємо відрізок AP, що дорівнює відрізку c. Через точку P проводимо пряму s, що паралельна до прямої AK, і одержуємо точку C_1 як точку перетину прямих s і D_1M. Побудова точки B_1 очевидна.



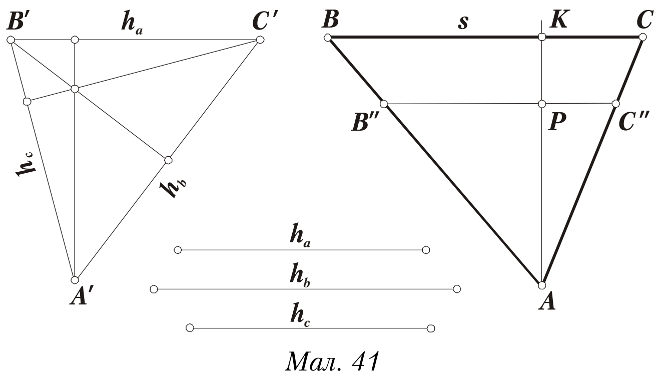
Мал. 40

Існує дві прямі, кожна точка яких віддалена від прямої AD_1 на відстань, що дорівнює довжині даного відрізка h. Будуємо ту з них, яка перетинає промінь AC_1 у деякій точці C (пряма l). Через цю точку проводимо пряму, що паралельна до прямої D_1M. Нехай побудована пряма перетинає пряму AD_1 у точці D, а пряма AK перетинає пряму l у точці B. Трапеція $ABCD$ — шукана. **Доведення** одразу виливає з гомотетичності трапецій $ABCD$ і $AB_1C_1D_1$. Центром гомотетії є точка A.

Дослідження. Оскільки за умовою задачі основа AD довша за основу BC, то сума даних кутів повинна мати величину, яка є меншою від 180° (доведіть це самостійно). Якщо ця умова не виконується, то задача розв'язків не має. Якщо ж вказана умова виконується, то задача має єдиний розв'язок. ■

Приклад 12. *Побудувати трикутник за трьома висотами.*

Розв'язання. Позначимо вершини шуканого трикутника через A, B, C, а довжини його сторін, що лежать проти цих вершин — через a, b, c відповідно. Довжини даних відрізків, що дорівнюють висотам шуканого трикутника, проведеним з вершин A, B, C, позначимо через h_a, h_b, h_c відповідно. Виразивши площу шуканого трикутника через довжини кожної з його сторін, одержуємо рівності $ah_a = bh_b = ch_c$. Побудуємо трикутник $A'B'C'$, використавши задані відрізки як його сторони, якщо це можливо (*мал. 41*). Отже, сторони побудованого трикутника з довжинами h_a, h_b, h_c лежать проти його вершин A', B', C' відповідно. З цих вершин опустимо висоти цього трикутника і позначимо їх довжини через h'_a, h'_b, h'_c відповідно. Очевидно, що справджуються рівності $h_a h'_a = h'_b h_b = h'_c h_c$. Враховуючи дві одержані системи рівностей, маємо, що $\frac{a}{h'_a} = \frac{b}{h'_b} = \frac{c}{h'_c} = k$, тобто шуканий трикутник та трикутник з сторонами, що мають довжини h'_a, h'_b, h'_c є подібними. Звідси випливає **ланцюжок побудов:** 1) будуємо



Мал. 41

трикутник $A'B'C'$ та його висоти; 2) будуємо трикутник з сторонами, що мають довжини h'_a, h'_b, h'_c. Його вершини, що лежать проти цих сторін, позначимо через A, B'', C'' відповідно; 3) будуємо висоту AP цього трикутника і на промені AP від точки A відкладаємо відрізок AK довжиною h_a; 4) через точку K проводимо пряму s, яка паралельна до прямої $B''C''$, і будуємо точки B і C, що є точками перетину прямої s з прямими AB'' і AC'' відповідно. Трикутник ABC — шуканий. Доведення без ускладнень випливає з аналізу і читачеві неважко провести його самостійно. Знайдіть також коефіцієнт подібності k.

Дослідження. Якщо виконуються умови:

$$h_a + h_b > h_c, h_a + h_c > h_b, h_c + h_b > h_a, \qquad (*)$$

то трикутник $A'B'C'$ будується єдиним способом. Якщо, крім цього, аналогічним умовам задовольняють числа h'_a, h'_b, h'_c, то однозначно будується шуканий трикутник.

Але існують такі трикутники, що за їх висотами як за сторонами трикутник побудувати неможливо, оскільки хоч одна з умов (*) не виконується (наведіть приклад такого трикутника). У цьому разі трикутник $A'B'C'$ не існує, і запропонований метод не дає результату.

Покажемо, що без побудови трикутника $A'B'C'$ взагалі можна обійтися. Дійсно, неважко переконатися в правильності наступних відношень:

$$a : b : c = h_b : h_a : \frac{h_a h_b}{h_c}$$

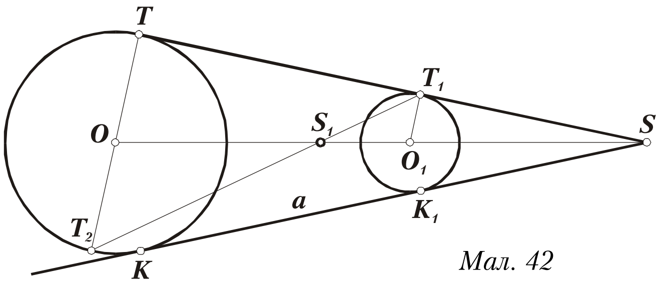
(перевірте це самостійно). Отже, шуканий трикутник подібний до трикутника, сторони якого мають довжини $h_b, h_a, \frac{h_a h_b}{h_c}$. Таким чином, спочатку відомим способом треба побудувати відрізок з довжиною $x = \frac{h_a h_b}{h_c}$, а потім — трикутник з сторонами, що мають довжини h_b, h_a, x. Одержаний трикутник подібний до шуканого. Наступні побудови не становлять труднощів, і читач повинен виконати їх самостійно. Достатніми умовами розв'язності задачі в цьому разі є виконання нерівностей

$$h_a + h_b > x, h_a + x > h_b, x + h_b > h_a. \blacksquare$$

При розв'язуванні задач на побудову досить часто використовують гомотетію кіл як частковий випадок перетворення подібності. Основні її властивості, які слід пам'ятати, наступні:

1) *гомотетія перетворює довільне коло в коло, причому центр кола-прообразу переходить у центр кола-образу, а відношення радіуса кола-образу до радіуса кола-прообразу дорівнює модулю коефіцієнта гомотетії;*
2) *будь-які два кола гомотетичні і, якщо вони не є рівними, мають два центри гомотетії (зовнішній та внутрішній). Рівні кола мають один центр гомотетії;*
3) *відповідні радіуси гомотетичних кіл паралельні (лежать на паралельних прямих).*

Приклад 13. *Побудувати центр гомотетії, яка переводить одне з двох даних кіл у друге. Побудувати спільні дотичні цих кіл.*

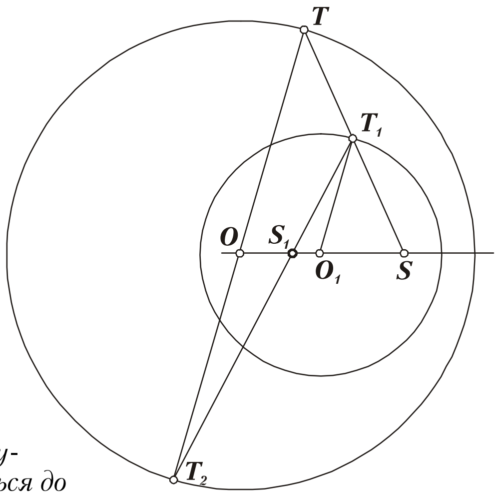


Мал. 42

Розв'язання. Припустимо, що дані кола не є рівними і розташовані так, як вказано на *малюнку 42*. Нехай коло (O_1, O_1T_1) є прообразом, а коло (O, OT) — його образом у гомотетії, яку нам слід задати. Будемо вважати, що радіуси OT і O_1T_1 паралельні, і нехай TT_2 — діаметр кола (O, OT). Тоді точка S, що є точкою перетину прямих OO_1 та TT_1, визначає зовнішній центр гомотетії з коефіцієнтом $k = \dfrac{OT}{O_1T_1}$, а точка S_1, що є точкою перетину прямих OO_1 та T_2T_1, визначає внутрішній центр гомотетії з коефіцієнтом $k = -\dfrac{OT}{O_1T_1}$. Легко бачити, що дотичні, проведені з точок S та S_1 до одного з даних кіл, будуть одночасно їх спільними дотичними. Так, наприклад, будуємо дотичну пряму a до кола (O_1, O_1T_1), яка містить точку S, і нехай K_1 — її точка дотику до цього кола. Тоді точка K, що є гомотетичною з точкою K_1, буде точкою дотику прямої a до кола (O, OT).

Зрозуміло, що у випадку рівності даних кіл точка S_1 ділить навпіл відрізок OO_1, а точка S не існує (у проективній геометрії говорять, що точка S є невласною точкою прямої OO_1).

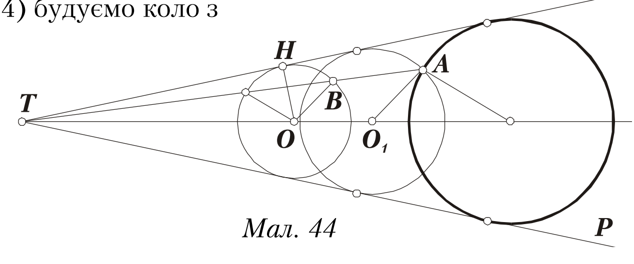
Розташування даних кіл не впливає на техніку побудови їх центрів гомотетії, але на кількість їх спільних дотичних, звичайно, впливає. Це продемонстровано на *мал. 43*, де збережено всі попередні позначення. У цьому разі дані кола мають два центри гомотетії, але не мають жодної спільної дотичної. ■



Мал. 43

Приклад 14. *Побудувати коло, що дотикається до сторін даного кута і проходить через задану внутрішню точку А цього кута.*

Розв'язання. Спочатку побудуємо довільне коло, яке дотикається до сторін даного кута *KTP* (*мал. 44*). Для цього досить обрати довільну точку *O* на бісектрисі цього кута, опустити з неї перпендикуляр *OH* на його сторону і провести коло *S*(*O, OH*) (доведіть, що це коло дотикається до сторін даного кута). Очевидно, що побудоване і шукане кола є гомотетичними, а точка *T* є центром відповідної гомотетії (див. попередній приклад). Точку *B*, гомотетичну з точкою *A*, можна побудувати, оскільки вона повинна належати одночасно променеві *TA* та колу *S*(*O, OH*). Радіус *OB* цього кола та радіус O_1A шуканого кола (через O_1 позначено його центр) є гомотетичними відрізками, тому повинні лежати на паралельних прямих. Звідси випливає **побудова:** 1) будуємо коло *S*(*O, OH*); 2) будуємо точку *B*; 3) через точку А проводимо пряму *c*, що паралельна до прямої *OB* і одержуємо точку O_1 перетину прямої *c* з бісектрисою даного кута; 4) будуємо коло з центром O_1, радіусом якого є відрізок O_1A. Це коло є шуканим.



Мал. 44

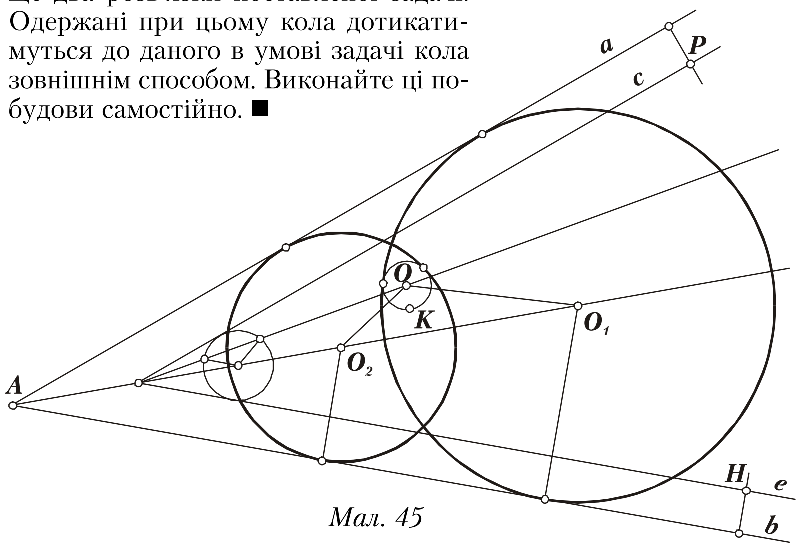
Дослідження. Оскільки промінь *TA* перетинає коло *S*(*O*, *OH*) у двох точках, то задача має два розв'язки. ■

Приклад 15. *Задано кут і коло, що знаходиться всередині цього кута. Побудувати коло, яке дотикається до сторін даного кута і до даного кола.*

Розв'язання. Нехай на *малюнку 45* заданим є кут з вершиною *A* і сторонами *a* та *b*. Всередині нього задано коло *Г(O, OK)*. Виконаємо наступний ланцюжок побудов:

1) всередині даного кута будуємо дві довільні точки *P* і *H*, що віддалені від прямих *a* і *b* відповідно на однакові відстані, які дорівнюють довжині радіуса *OK*;
2) через точки *P* і *H* проводимо прямі *c* і *e*, що паралельні до прямих *a* і *b* відповідно;
3) використовуючи приклад 14, будуємо кола з центрами O_1 та O_2, що дотикаються до прямих *c* і *e* та проходять через точку *O*;
4) будуємо два кола, концентричні з побудованими колами, довжини радіусів яких збільшено по відношенню до радіусів відповідних побудованих кіл на довжину відрізка *OK*.

Рекомендуємо читачеві довести самостійно, що одержані кола є шуканими фігурами. Зауважимо лише, що довільні точки *P* і *H*, про які йшла мова вище, можна побудувати зовні заданого кута і, здійснивши після цього аналогічні побудови, одержати ще два розв'язки поставленої задачі. Одержані при цьому кола дотикатимуться до даного в умові задачі кола зовнішнім способом. Виконайте ці побудови самостійно. ■



Мал. 45

Вправи для самостійного розв’язування

1. Побудувати трапецію за діагоналлю, бічними сторонами та відрізком, довжина якого дорівнює різниці довжин основ.
2. Побудувати опуклий чотирикутник за його кутами та двома протилежними сторонами.
3. Побудувати відрізок, що дорівнює даному відрізку і паралельний до даної прямої, так, щоб його кінці належали: а) до двох даних кіл; б) до даного кола і даної прямої. Зауважимо, що відрізок вважають паралельним до прямої a, якщо він належить прямій, яка паралельна до прямої a.
4. Побудувати трикутник за двома сторонами та медіаною, що проведена до третьої сторони.
5. Повернути даний трикутник (дане коло) на заданий кут навколо даної точки за годинниковою стрілкою (проти годинникової стрілки).
6. Побудувати правильний трикутник, одною з вершин якого є задана внутрішня точка даного кута, а дві інші його вершини лежать на сторонах цього кута.
7. У дане коло вписати прямокутний трикутник так, щоб один з його катетів утворював з гіпотенузою кут, що дорівнює даному куту, а другий катет проходив через задану точку.
8. Через задану внутрішню точку даного кута провести відрізок так, щоб його кінці лежали на сторонах цього кута, а дана точка була б його серединою.
9. Побудувати правильний трикутник, вершини якого лежать на трьох даних паралельних прямих.
10. Побудувати трикутник за двома сторонами та різницею протилежних до них кутів.
11. Побудувати опуклий чотирикутник за чотирма сторонами, якщо одна з його діагоналей належить бісектрисі одного з його кутів.
12. Побудувати трикутник найменшого периметра, якщо задано його сторону і висоту, що проведена до неї.
13. Основи двох даних рівнобедрених трикутників належать прямій a. Провести паралельну до неї пряму так, щоб її відрізки, розміщені всередині цих трикутників, були рівними.
14. У даний трикутник вписати квадрат так, щоб дві його вершини лежали на основі трикутника, а дві інші — на його бічних сторонах.

15. Побудувати трикутник, подібний до даного, якщо задано відрізок, довжина якого дорівнює периметру шуканого трикутника.
16. У дане коло вписати паралелограм з даним кутом і відношенням m/n сторін, де m та n — довжини даних відрізків.
17. Побудувати трикутник, бісектриси якого належать до трьох даних прямих, якщо задано точку, яка належить його стороні.
18. Задано три концентричні кола. Побудувати правильний трикутник так, щоб його вершини лежали на цих колах.
19. Побудувати рівнобедрений трикутник за кутом при вершині та відрізком, довжина якого дорівнює сумі довжин основи та відповідної висоти цього трикутника.
20. Побудувати трикутник за двома кутами та радіусом описаного навколо нього (вписаного у нього) кола.
21. Задано дві прямі та коло. Побудувати коло, що дотикається до трьох даних фігур.
22. Побудувати квадрат, якщо задано його центр і дві точки, що лежать на його паралельних сторонах.

1.6. Елементи геометрії кіл

Геометрія кіл становить важливий і цікавий розділ елементарної математики. Проте випускники шкіл та більшість вчителів математики з нею зовсім не знайомі, оскільки таке знайомство не передбачене програмою шкільного курсу геометрії, а у вищих педагогічних навчальних закладах студенти з цим розділом, у кращому випадку, зустрічаються лише за власним бажанням. Тому виклад матеріалу цього підрозділу ми почнемо з побудови необхідної теоретичної бази.

Одним з основних понять геометрії кіл є поняття степеня точки відносно даного кола. З ним ми уже зустрічалися у підрозділі 1.4.

Наведемо загальне означення цього поняття.

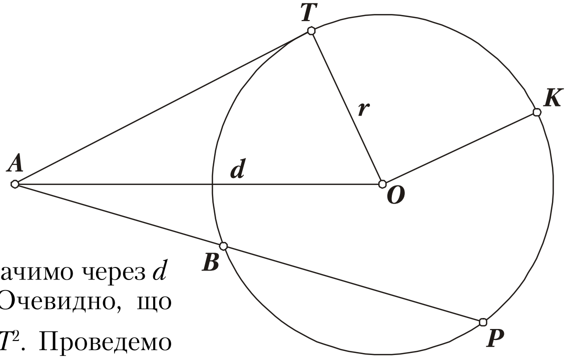
Означення 1. *Нехай задано коло $S(O, OK)$ і точку A. Степенем цієї точки відносно даного кола називають число $AO^2 - OK^2$, яке позначають через C_S^A.*

Із сформульованого означення одразу випливають наступні твердження:

1) якщо точка A є зовнішньою відносно даного кола, то степінь її є число додатне;

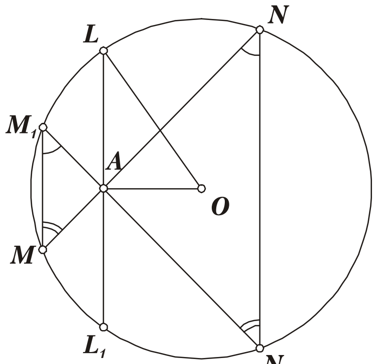
2) якщо точка A є внутрішньою відносно даного кола, то степінь її є число від'ємне;
3) якщо точка A належить даному колу, то степінь її дорівнює нулеві;
4) усі точки площини, що рівновіддалені від точки O, мають однаковий степінь відносно даного кола.

Нехай точка A лежить зовні даного кола, точка T — на даному колі і пряма AT є дотичною до даного кола (*мал. 46*). Довжини відрізків AO та OK позначимо через d та r відповідно. Очевидно, що $C_S^A = d^2 - r^2 = AT^2$. Проведемо через точку A довільну січну до даного кола, яка перетинає його в точках B і P. За відомою теоремою $AB \cdot AP = AT^2$, звідки $C_S^A = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AP}$, тобто в цьому разі означення 1 еквівалентне означенню степеня точки відносно кола, яке було наведене у попередньому підрозділі.



Мал. 46

Нехай тепер точка A лежить всередині даного кола. Проведемо через неї дві довільні його хорди MN та M_1N_1 (*мал. 47*). Неважко перевірити, що трикутники AMM_1 і AN_1N є подібними (переконайтеся в цьому самостійно), звідки випливає рівність $MA \cdot AN = M_1A \cdot AN_1$. Проведемо через точку A хорду LL_1 так, щоб прямі AO та LL_1 були перпендикулярними одна до одної. Тоді для хорди MN маємо, що $MA \cdot AN = LA \cdot AL_1 = AL^2 = LO^2 - AO^2 = -(d^2 - r^2) = -C_S^A$. Звідси випливає, що $C_S^A = \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{AN}$ для довільної хорди MN, що проходить через точку A.



Мал. 47

Отже, можна означити степінь точки відносно кола наступним чином.

Означення 2. *Нехай задано коло $S(O, OK)$ і точку A. Степенем цієї точки відносно даного кола називають число $C_S^A = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$, де CE — довільна пряма, що проходить через точку A і перетинає дане коло в точках C і E.*

Взявши до уваги, що степінь точки відносно кола, якому вона належить, дорівнює нулю в сенсі обох означень 1 і 2, приходимо до висновку, що ці означення є еквівалентними

Означення 3. *Радикальною віссю двох даних кіл називають ГМТ, кожна з яких має однакові степені відносно цих кіл.*

Безпосередньо з означення випливає, що для двох концентричних кіл радикальної осі не існує (доведіть це самостійно). Нехай r_1 і r_2 — довжини радіусів даних кіл, d_1 і d_2 — відстані від точки, що належить радикальній осі цих кіл, до їх центрів відповідно. Тоді справджується рівність $C_S^A = \overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AE}$, звідки випливає, що $d_1^2 - d_2^2 = r_1^2 - r_2^2$. Вважаючи, що $r_1 > r_2$, приходимо до висновку, що радикальна вісь є ГМТ, різниця квадратів відстаней від кожної з яких до двох даних точок (центрів двох даних кіл), є стале число $r_1^2 - r_2^2$. Як доведено у прикладі 7 з підрозділу 1.3, це ГМТ є прямою, перпендикулярною до лінії центрів заданих кіл.

Таким чином, радикальною віссю двох неконцентричних кіл є пряма, що перпендикулярна до їх лінії центрів.

Теорема 1. *Якщо центри трьох даних кіл не лежать на одній прямій, то існує єдина точка, степені якої відносно кожного з цих кіл рівні.*

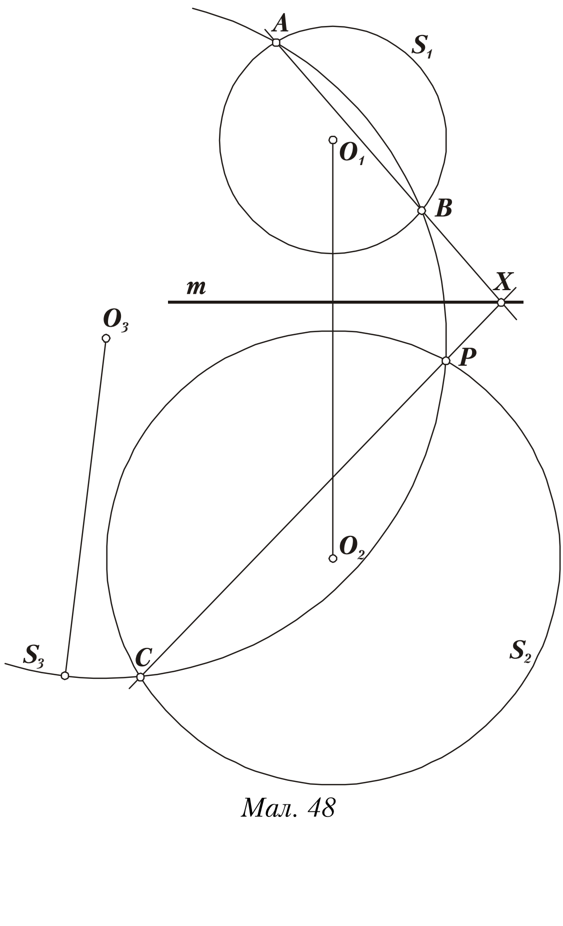
Доведення цього твердження надзвичайно просте. Дійсно, позначимо дані кола через S_1, S_2, S_3, а радикальні осі кіл S_i та $S_j (i, j = 1, 2, 3)$ — через a_{ij} відповідно (зрозуміло, що прямі a_{ij} та a_{ji} співпадають). Оскільки серед даних кіл за умовою теореми немає концентричних, то вказаних радикальних осей є три, причому кожні дві з них перетинаються. Нехай A є точкою перетину радикальних осей a_{12} та a_{23}. З означення радикальної осі випливає, що $C_{S_1}^A = C_{S_2}^A$ і $C_{S_3}^A = C_{S_2}^A$, звідки $C_{S_1}^A = C_{S_3}^A$, тобто точка A належить радикальній осі a_{13}, що й треба було довести. ■

Означення 4. *Точку, степені якої відносно трьох даних кіл, центри яких не лежать на одній прямій, рівні, назвемо радикальним центром цих кіл.*

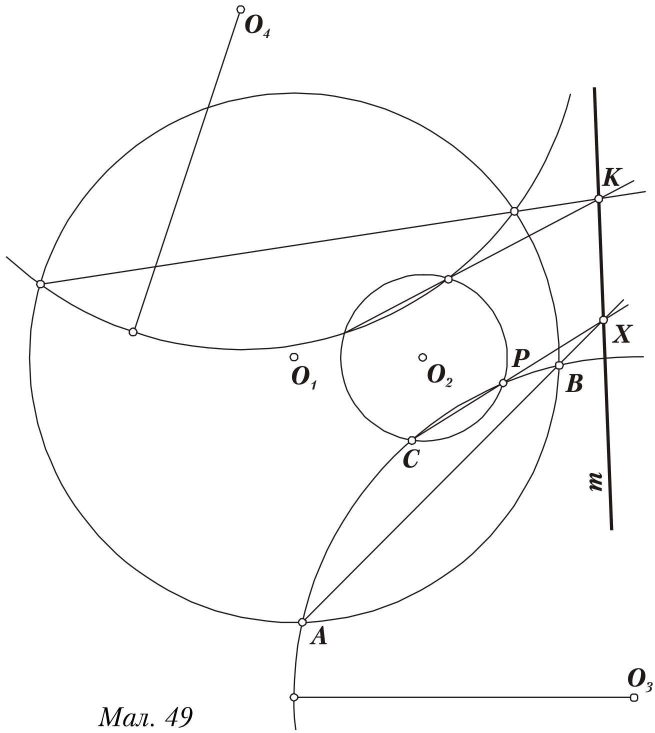
Приклад 1. *Побудувати радикальну вісь двох даних неконцентричних кіл.*

Розв'язання. Очевидно, що для побудови радикальної осі досить побудувати дві довільні її точки. Припустимо спочатку, що дані кола перетинаються в двох точках A і B. Оскільки степінь кожної з них відносно кожного даного кола дорівнює нулеві, то ці точки визначають радикальну вісь (AB). Якщо дані кола дотикаються в точці A, то їх радикальною віссю є спільна дотична цих кіл, що проходить через точку A (зробіть малюнки і поясніть це самостійно).

Нехай задані кола S_1 та S_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно не мають спільних точок. Побудуємо довільне коло S_3 з центром O_3, який не лежить на прямій O_1O_2, яке перетинає коло S_1 у точках A і B, а коло S_2 — у точках C і P (*мал. 48*). Легко бачити, що прямі AB і CP перетинаються в деякій точці X, яка є радикальним центром кіл S_1, S_2, та S_3. Звідси випливає, що точка X належить до радикальної осі заданих кіл S_1 та S_2. Пряма m, що проходить через точку X і є перпендикулярною до лінії центрів O_1O_2, співпадає з шуканою радикальною віссю. Зауважимо, що вказаним способом можна побудувати ще одну точку K, що належить до шуканої радикальної осі. Тоді ця вісь співпаде з прямою KX (*мал. 49*) і пряму, що проходить через точку X і є перпендикулярною до прямої O_1O_2, будувати не потрібно. ■



Мал. 48



Мал. 49

Розглянемо тепер ситуацію, коли центри трьох даних кіл лежать на одній прямій. У цьому разі може трапитись два випадки:

1) радикальні осі трьох пар даних кіл попарно паралельні (не мають спільних точок);
2) радикальні осі трьох пар даних кіл співпадають.

Пропонуємо читачеві самостійно переконатися, що інших випадків взаємного розташування радикальних осей бути не може, і зробити малюнки, що відповідають вказаним випадкам. Найбільший інтерес викликає другий випадок, оскільки він зумовлює введення нового поняття.

Означення 5. *Множину усіх кіл, для якої існує така пряма, що є радикальною віссю одночасно для будь яких двох кіл з цієї множини, назвемо пучком кіл, а вказану пряму радикальною віссю пучка.*

Зрозуміло, що пучок кіл можна визначити двома колами (вони не можуть бути концентричними) або радикальною віссю та колом.

Приклад 2. *Побудувати коло, яке проходить через дану точку P і належить пучку кіл, що визначений двома даними колами.*

Розв'язання. Розглянемо наступні випадки:

1) задані кола S_1 та S_2 з центрами O_1 та O_2 відповідно мають дві спільні точки A і B. Зрозуміло, що радикальною віссю даних кіл, а отже, і радикальною віссю пучка, є пряма AB, причому кожне коло цього пучка зобов'язане проходити через точки A і B (обґрунтуйте це твердження!). Таким чином, якщо точка P належить прямій AB і не співпадає з точкою A або B, то задача не має розв'язку. Якщо точка P співпадає з точкою A або з точкою B, то задача має безліч розв'язків. Якщо точка P належить до одного з даних кіл і не лежить на прямій AB, то шукане коло співпадає з даним колом. Якщо ж точка P не належить прямій AB і не лежить на заданих колах, то єдиним розв'язком задачі є коло, що проходить через три точки A, B і P. Виконайте побудову цього кола самостійно;

2) задані кола S_1 та S_2 мають одну спільну точку A (дотикаються в цій точці). Зрозуміло, що радикальною віссю даних кіл, а отже, і радикальною віссю пучка, є пряма a, що проходить через точку A і є перпендикулярною до лінії центрів даних кіл, причому кожне коло цього пучка зобов'язане проходити через точку A і дотикатися в цій точці до прямої a (обґрунтуйте це твердження!). Таким чином, якщо точка P належить прямій a і не співпадає з точкою A, то задача не має розв'язку. Якщо точка P належить до одного з даних кіл і не співпадає з точкою A, то шукане коло співпадає з даним колом. Якщо ж точка P не належить прямій a і не лежить на заданих колах, то єдиним розв'язком задачі є коло, що проходить через точки A, P і дотикається до прямої a в точці A. Виконайте побудову цього кола самостійно, врахувавши, що його центр належить прямій O_1O_2;

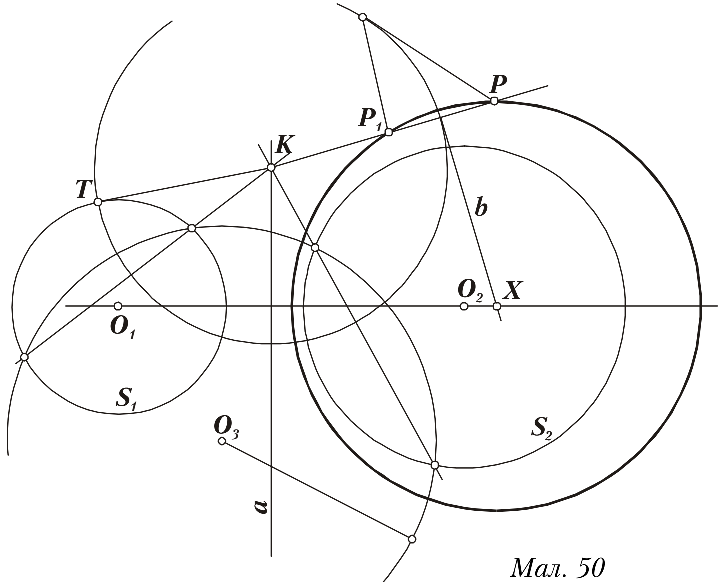
3) задані кола S_1 та S_2 не мають спільних точок і розташовані одне зовні другого. **У цьому разі пропонуємо наступний ланцюжок побудов (*мал. 50*):**

а) будуємо радикальну вісь a даних кіл, як вказано у прикладі 1. Одержана пряма є одночасно радикальною віссю пучка;

б) обираємо на радикальній осі довільну точку K і проводимо через неї пряму, яка дотикається до кола S_1 у точці T;

в) будуємо коло $O(K, KT)$ і точку P_1, інверсну з точкою P відносно цього кола (див. *мал. 19*);

г) будуємо серединний перпендикуляр b до відрізка PP_1. Точка X перетину прямої b з лінією центрів заданих кіл є центром шуканого кола $S(X, XP)$.



Мал. 50

Для **доведення** останнього твердження досить показати, що точка K має однакові степені відносно кіл S_1 та $S(X, XP)$. Легко бачити, що $C_{S_1}^{K} = KT^2$ і $C_S^K = \overrightarrow{KP} \cdot \overrightarrow{KP_1} = KP \cdot KP_1$. Оскільки $KP \cdot KP_1 = KT_1^2$, де T_1 — точка перетину кіл $O(K, KT)$ та $S(X, XP)$, то пряма KT_1 є дотичною до кола $S(X, XP)$. Тоді $C_S^K = KT_1{}^2 =$ $= KT^2 = C_{S_1}^K$, що закінчує доведення.

Якщо точки P і P_1 співпадають (точка P належить колу інверсії), то роль прямої b відіграє дотична до кола інверсії в цій точці. Якщо, нарешті, точка P є спільною точкою кола інверсії та лінії центрів заданих кіл, то шукане коло вироджується в точку P (коло нульового радіуса). ■

Зауважимо, що відповідно до випадків 1, 2, 3 пучок кіл, що визначається даними колами, називають **еліптичним, параболічним** та **гіперболічним.**

Якщо пучок кіл задано його радикальною віссю та одним з кіл, то попередня задача лише спрощується, оскільки радикальну вісь пучка будувати не потрібно.

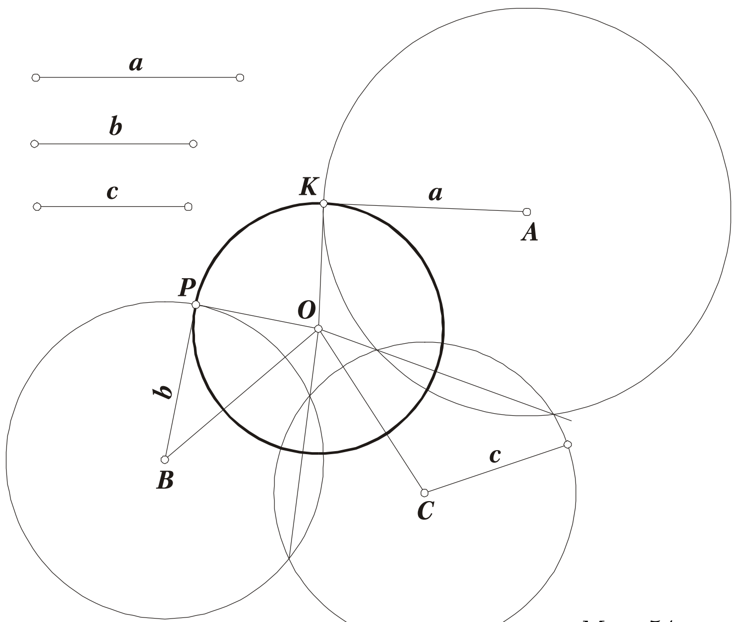
Попробуйте самостійно розглянути приклад 2 і зробити необхідні малюнки у випадку, коли одне з даних кіл знаходиться всередині другого.

Приклад 3. *Побудувати коло, відрізки дотичних до якого, проведених з даних точок A, B і C, з кінцями, що є даними точками і відповідними точками дотику, дорівнюють заданим відрізкам a, b, c.*

Розв'язання. Припустимо, що дані точки не лежать на одній прямій. Позначимо через *O* центр шуканого кола, а через *OK* — його радіус. Неважко переконатися, що відрізок дотичної, проведеної через точку *O* до кола (*A, a*), кінцями якого є точка *O* і точка дотику до цього кола, дорівнює радіусу *OK* (переконайтеся у цьому самостійно). Цю ж властивість точка *O* має відносно кіл (*B, в*) та (*C, c*). Звідси випливає, що точка *O* має однаковий степінь відносно кожного з цих трьох кіл, тобто є їх радикальним центром. Звідси випливає побудова (*мал. 51*):

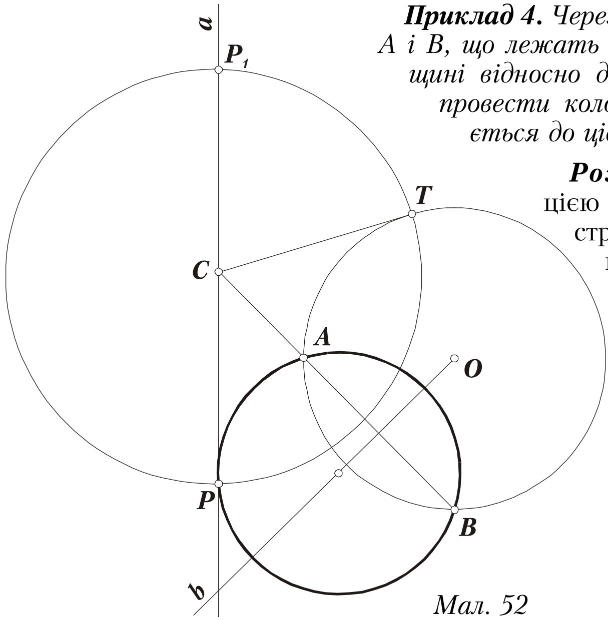
1) будуємо три вказані кола (*A, a*), (*B, в*), (*C, c*) та їх радикальний центр *O*;
2) через точку *O* проводимо дотичну до будь-якого з трьох побудованих кіл, наприклад, до кола (*B, в*). Нехай вона дотикається до цього кола в точці *P*. Коло (*O, OP*) є шуканим.

Пропонуємо читачеві самостійно дослідити випадок, коли три дані точки лежать на одній прямій. ■



Мал. 51

Приклад 4. *Через дві дані точки A і B, що лежать в одній півплощині відносно даної прямої a, провести коло, яке дотикається до цієї прямої.*



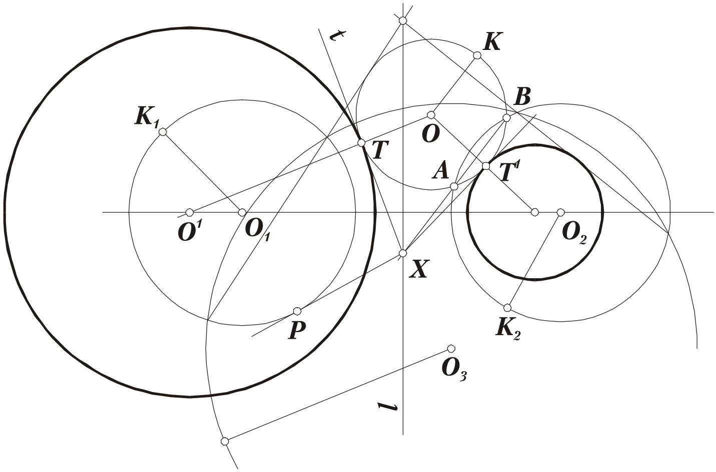
Мал. 52

Розв'язання. З цією задачею ми зустрічалися до цього двічі (див. приклади 2 з **п.1.3** та 4 з **п.1.4**). Наведемо ще один метод її розв'язування у випадку, коли прямі AB і a перетинаються в точці C. Шукане коло належить до еліптичного пучка кіл, що проходять через дані точки. Радикальною віссю цього пучка є пряма AB, центри всіх кіл пучка лежать на серединному перпендикулярі $в$ до відрізка AB. Будуємо довільне коло цього пучка, наприклад, коло (O, OA) (*мал. 52*). Через точку C проводимо дотичну CT до побудованого кола (T – точка дотику). Після цього будуємо коло (C, CT) і знаходимо точку P його перетину з прямою a. Коло, що визначається точками A, B і P, є шуканим. Побудова його центру очевидна. Оскільки коло (C, CT) має з даною прямою a дві спільні точки, то задача має два розв'язки. ■

Приклад 5. *Побудувати коло, що належить заданому гіперболічному пучку кіл і дотикається до даного кола.*

Розв'язання. Припустимо, що гіперболічний пучок задано двома колами $S_1(O_1, O_1K_1)$ та $S_2(O_2, O_2K_2)$, і $S(O, OK)$ – дане коло, центр якого не лежить на прямій O_1O_2 (*мал. 53*). Розглянемо випадок, коли кола $S_2(O_2, O_2K_2)$ та $S(O, OK)$ мають дві спільні точки A і B. Задача зводиться до побудови радикального центру X кіл $S_2(O_2, O_2K_2)$, $S(O, OK)$ та шуканого кола, оскільки спільна дотична t, проведена до даного і шуканого кіл, повинна пройти через точку X. Звідси випливає **ланцюжок побудов:**

1) будуємо радикальну вісь l заданого пучка (див. приклад 1);



Мал. 53

2) будуємо радикальну вісь кіл $S(O,\ OK)$ та $S_2(O_2,\ O_2K_2)$, яка співпадає з прямою AB;
3) точка X є точкою перетину прямих AB і l;
4) через точку X проводимо дотичну XP до кола $S_1(O_1,\ O_1K_1)$, де P — точка дотику;
5) будуємо коло $(X,\ PX)$ і нехай T — точка його перетину з даним колом $S(O,\ OK)$;
6) точка перетину O^1 прямої OT з прямою O_1O_2 є центром шуканого кола. Будуємо коло $(O^1,\ O^1T)$, яке є шуканим.

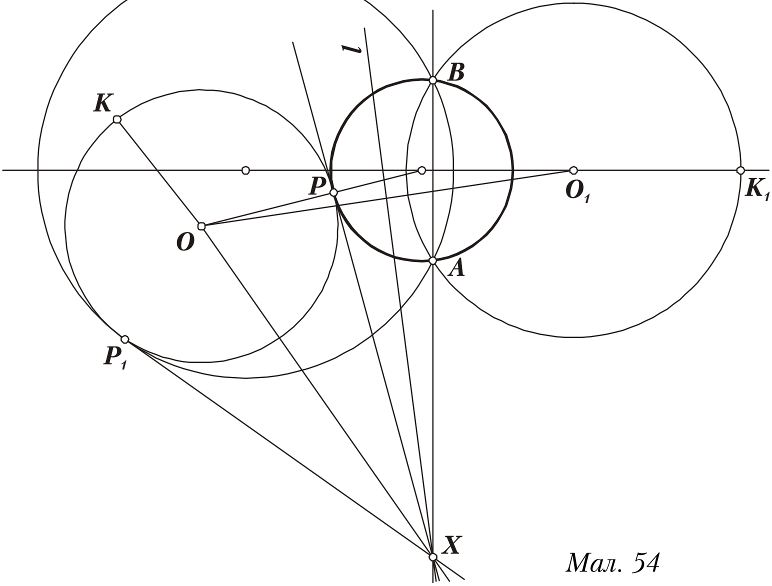
Зауважимо, що точка T, згадана у ланцюжку побудов, не є єдиною, тому задача в розглядуваному випадку має ще один розв'язок, визначений точкою T^1. Пропонуємо читачеві розглянути випадки, коли гіперболічний пучок задано колом $S_2(O_2,\ O_2K_2)$ і радикальною віссю, а задане коло або не перетинається з цим колом, або дотикається до нього. ■

Означення 6. *Пряму, яка визначена центрами двох довільних кіл пучка, назвемо його віссю або лінією центрів.*

Це означення коректне, оскільки центри всіх кіл пучка лежать на одній прямій, що перпендикулярна до його радикальної осі.

Приклад 6. *Побудувати коло, що проходить через дві дані точки і дотикається до даного кола.*

Розв'язання. Спочатку нагадаємо, що ця задача була розв'язана в **п.1.4** (приклад 3) за допомогою методу інверсії. Роз-



Мал. 54

в'яжемо її іншим способом. При цьому вважатимемо, що дані точки A і B лежать поза даним колом $H(O, OK)$. Проведемо через дані точки A і B довільне коло $S_1(O_1, O_1K_1)$. Задача зводиться до побудови радикального центру кіл $H(O, OK)$, $S_1(O_1, O_1K_1)$ та шуканого кола. Побудови виконано на *малюнку 54* за схемою попереднього прикладу:

1) будуємо коло $S_1(O_1, O_1K_1)$, його центр належить серединному перпендикуляру до відрізку AB;
2) будуємо радикальну вісь l даного кола і кола $S_1(O_1, O_1K_1)$;
3) будуємо радикальну вісь шуканого кола і кола $S_1(O_1, O_1K_1)$, яка співпадає з прямою AB;
4) точка X є точкою перетину прямих AB і l;
5) через точку X проводимо дотичну XP до даного кола, де P — точка дотику (таких дотичних можна провести дві, отже, задача матиме два розв'язки);
6) описуємо коло навколо трикутника ABP. Воно є шуканим. ■

Зауваження. При розв'язуванні прикладу 5 вважалося, що центр кола $S(O, OK)$ не належить до осі заданого пучка, а при розв'язуванні прикладу 6 вважалося, що центр кола $H(O, OK)$ не належить до серединного перпендикуляру, проведеного до відрізку AB. Пропонуємо читачеві самостійно дослідити випадки, коли ці умови не виконуються.

Приклад 7. *Побудувати множину центрів всіх кіл, кожне з яких ортогональне до кожного кола даного гіперболічного пучка.*

Розв'язання. Задамо гіперболічний пучок колом $S(O, OK)$ і радикальною віссю l. Очевидно, що ця пряма не має з даним колом жодної спільної точки, бо інакше заданий пучок не був би гіперболічним (поясніть це). З тієї ж причини пряма l не має жодної спільної точки з будь-яким колом даного пучка. Тому кожна точка цієї прямої є зовнішньою для будь-якого кола цього пучка. Оберемо на радикальній осі довільну точку M і проведемо через неї дотичну до кола $S(O, OK)$. Позначимо через T їх точку дотику. Кола $S(O, OK)$ та $H(M, MT)$ ортогональні, оскільки їх радіуси, що проведені в точку T, є взаємно перпендикулярними. Але точка M має однаковий степінь відносно кожного кола пучка, оскільки вона лежить на його радикальній осі і цей степінь дорівнює числу MT^2. Звідси випливає, що для будь-якого кола даного пучка відрізок дотичної, проведеної з точки M до цього кола, який обмежений цією точкою і відповідною точкою дотику, дорівнює відрізку MT. Отже, коло $H(M, MT)$ є ортогональним до кожного кола даного пучка. Таким чином, кожна точка прямої l належить до шуканої множини. Навпаки, якщо точка E належить шуканій множині, то вона є центром деякого кола $\Gamma(E, EP)$, яке ортогональне до всіх кіл даного пучка. З цього випливає, що для кожного кола пучка ця точка є зовнішньою (чому?) і її степінь відносно кожного кола пучка однаковий, тобто, точка E належить радикальній осі даного пучка. Отже, шукана множина співпадає з радикальною віссю, яка є заданою. Будувати нічого не потрібно. ■

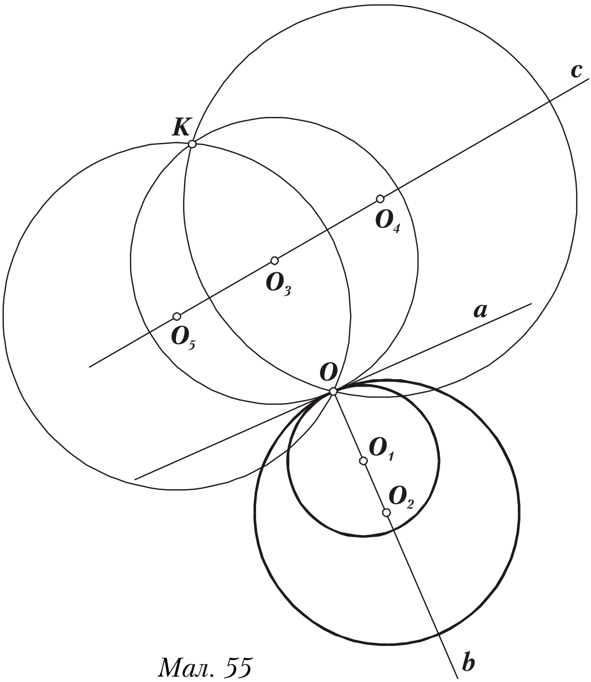
Означення 7. *Множину всіх кіл, для яких існує така точка, що має однаковий степінь відносно кожного з них, називають в'язкою кіл, а вказану точку називають радикальним центром цієї в'язки.*

Безпосередньо з означення випливає, що радикальний центр в'язки кіл є одночасно радикальним центром будь-яких трьох кіл цієї в'язки.

Якщо радикальний центр лежить зовні кожного кола в'язки, то вона називається **гіперболічною**, якщо він належить до кожного кола в'язки, то її називають **параболічною**, і, нарешті, якщо він знаходиться всередині кожного кола в'язки, то її називають **еліптичною** в'язкою. Очевидно, що степінь радикального центра гіперболічної в'язки відносно кожного її кола є додатним числом, степінь радикального центра параболічної в'язки відносно кожного її кола є нулем, а степінь радикального центра еліптичної в'язки відносно кожного її кола є числом від'ємним.

Розглянемо тепер питання про те, якими фігурами можна визначити в'язку кіл. Почнемо з параболічної в'язки. Зрозуміло, що її можна задати радикальним центром, який ми позначимо через *O*. Кожне коло в'язки містить цю точку. Конкретне коло цієї в'язки можна задати двома точками *A* і *B*, що не лежать разом з точкою *O* на одній прямій. Для його побудови досить провести коло через три точки *A*, *B* і *O*.

Приклад 8. *Які пучки кіл може містити в собі параболічна в'язка кіл? Визначити кожний тип таких пучків.*



Мал. 55

Розв'язання. Задамо параболічну в'язку кіл її радикальним центром *O* (*мал. 55*). Проведемо через цю точку довільну пряму *a* і вважатимемо її радикальною віссю параболічного пучка, який належить даній в'язці кіл. Це означає, що цьому пучку належать усі кола, які дотикаються до прямої *a* в точці *O*. Лінією центрів цього пучка є пряма *b*, що проходить через точку *O* і перпендикулярна до прямої *a*. На *малюнку 55* побудовано два представники цього пучка — кола з центрами O_1 і O_2. Зрозуміло, що дана в'язка кіл містить у собі безліч параболічних пучків кіл.

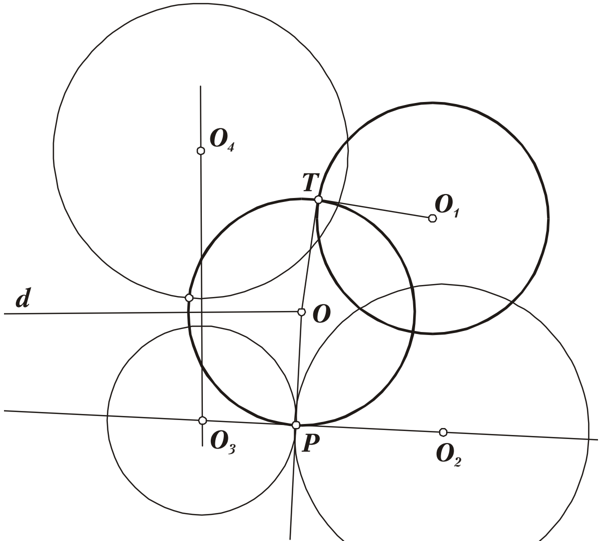
Проведемо тепер через точку *O* довільне коло з центром O_3 і оберемо на ньому довільну точку *K*. Пряму *OK* приймемо за радикальну вісь еліптичного пучка кіл, кожне з яких проходить через точки *O* та *K*, а отже, належить заданій в'язці. Лінією центрів цього пучка є серединний перпендикуляр *c*, проведений до відрізка *OK*. Представниками цього пучка є кола з центрами O_3, O_4, O_5 на *малюнку 55*. Очевидно, що дана в'язка містить у собі безліч еліптичних пучків кіл.

І, нарешті, параболічна в'язка кіл не може містити жодного гіперболічного пучка, оскільки будь-які два кола такого пучка не можуть мати спільної точки. ■

Приклад 9. *Які пучки кіл може містити в собі гіперболічна в'язка кіл? Визначити кожний тип таких пучків.*

Розв'язання. Задамо гіперболічну в'язку кіл її радикальним центром O та колом з центром O_1 (*мал. 56*). Зрозуміло, що для цього кола точка O повинна бути зовнішньою точкою. Проведемо дотичну пряму OT до даного кола, де через T позначено їх точку дотику. Степінь точки O відносно даного кола, а отже, відносно кожного кола в'язки, дорівнює OT^2. Коло $S(O, OT)$, що ортогональне до даного кола і до кожного кола в'язки (див. приклад 2 з **п.1.4**), називають її **базовим колом**. Легко перевірити, що два довільні кола заданої в'язки, що дотикаються в точці, яка належить базовому колу, визначають у цій в'язці параболічний пучок кіл. На *малюнку 56* це кола з центрами, O_2 і O_3 такі, що пряма O_2O_3 дотикається до базового кола в точці P. Кожне з цих двох кіл ортогональне до базового. Цю ж властивість має кожне коло, що належить визначеному ними параболічному пучку кіл. Прямі O_2O_3 та OP є для нього лінією центрів та радикальною віссю відповідно.

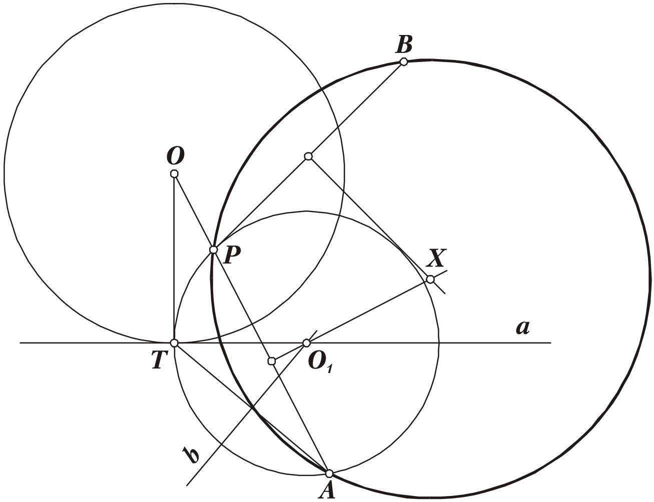
Нехай тепер кола з центрами O_3 та O_4 належать даній в'язці кіл і не мають спільних точок. Вони визначають у в'язці гіперболічний пучок кіл, лінією центрів якого є пряма O_3O_4, а радикальною віссю — пряма d, що проходить через точку O і перпендикулярна до прямої O_3O_4. Не-



Мал. 56

важко переконатися, що довільні два кола даної в'язки, що мають дві спільні точки, визначають у ній еліптичний пучок кіл (переконайтеся в цьому самостійно та накресліть відповідний малюнок). Таким чином, гіперболічна в'язка кіл містить в собі нескінченну кількість пучків кожного з трьох розглянутих типів. ■

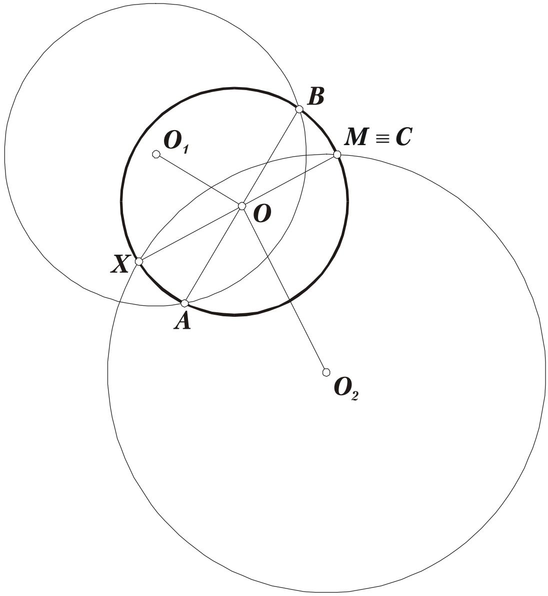
Приклад 10. *Гіперболічну в'язку кіл задано її базовим колом. Побудувати коло цієї в'язки, яке проходить через дві дані точки A і B, якщо пряма AB не містить центру базового кола.*



Мал. 57

Розв'язання. Побудуємо спочатку довільне коло даної в'язки, яке проходить через одну із заданих точок, наприклад, через точку A. Центр базового кола позначимо через O і оберемо на ньому точку T, як вказано на *малюнку 57*. Проведемо пряму a, що є перпендикулярною до прямої OT, і серединний перпендикуляр b до відрізка AT. Коло $S(O_1, O_1T)$, де O_1 — точка перетину прямих a і b, проходить через точку A, ортогональне до базового кола, отже належить даній в'язці. Нехай P — ще одна спільна точка відрізка OA і побудованого кола S. Ця точка належить до будь-якого кола в'язки, яке проходить через точку A, зокрема і до шуканого кола з центром у точці X, оскільки $OA \cdot OP = OT^2 = C_X^O$. Коло, що проведено через точки A, B, і P є шуканим. ■

Розглянемо тепер еліптичну в'язку з центром O і припустимо, що коло S з центром O_1 належить цій в'язці. У цьому разі



Мал. 58

точка O лежить всередині цього кола і її степінь відносно нього від'ємна. Як було показано раніше (див. *мал. 47*), $C_S^O = -OA^2$, де хорда AB містить точку O і перпендикулярна до прямої OO_1 (*мал. 58*). Побудуємо коло $\Pi(O, OA)$ і скажемо, що коло S перетинає коло Π ***діаметрально*** (у точках, симетричних відносно центра O). Коло Π називають ***базовим колом*** еліптичної в'язки. Легко бачити, що довільне коло, яке перетинає базове коло діаметрально, належить до еліптичної в'язки. Покажемо, що і будь-яке коло цієї в'язки перетинає базове коло Π діаметрально. Для цього припустимо, що коло P з центром O_2 належить в'язці і перетинає базове коло в точках X та M. Нехай промінь XO перетинає коло P у точці C. Тоді $C_P^O = -XO \cdot OC = -AO^2$. Але $OX = OA$, звідки випливає, що $OC = OX$, тобто точка C лежить на базовому колі. У цьому разі очевидно, що точки M і C співпадають і є симетричними відносно точки O, що завершує доведення. Таким чином, еліптичну в'язку можна визначити її базовим колом. Оскільки всі кола такої в'язки попарно перетинаються (кожна пара кіл має по дві спільні точки), то еліптична в'язка містить лише еліптичні пучки кіл.

Приклад 11. *Еліптичну в'язку кіл задано її базовим колом. Побудувати коло цієї в'язки, яке проходить через дві дані точки A і B, якщо пряма AB не містить центру базового кола.*

Розв'язування цієї задачі цілком аналогічне до розв'язування прикладу 10, і ми пропонуємо читачеві провести його самостійно. ■

Вправи для самостійного розв'язування

1. Задано два кола, кожне з яких лежить зовні іншого. До них проведено чотири спільні дотичні. Довести, що середини їх відрізків, обмежених точками дотику до цих кіл, лежать на одній прямій.
2. Задано два кола і пряму. На цій прямій побудувати таку точку, щоб відрізки дотичних, проведених через неї до даних кіл, обмежені цією точкою і точками дотику, були рівними.
3. Через дану точку провести коло, що дотикається до даного кола в даній точці.
4. Задано три кола, два з яких мають дві спільні точки, а третє — не має з кожним з них жодної спільної точки. На третьому колі побудувати таку точку, щоб відрізки дотичних, проведених через неї до перших двох даних кіл, обмежені цією точкою і точками дотику, були рівними.
5. Побудувати коло, що належить пучку, який заданий колом і радикальною віссю.
6. Побудувати коло, що проходить через дану точку і належить пучку, який заданий колом і радикальною віссю (двома колами). Накреслити малюнки для випадків еліптичного, параболічного і гіперболічного пучків.
7. Два даних кола не мають спільних точок. Довести, що їх радикальна вісь не має жодної спільної точки з кожним із них.
8. Чи може радикальний центр трьох даних кіл належати кожному з них? Накресліть малюнок.
9. Задано три кола. Побудувати таку точку, щоб відрізки дотичних, проведених через неї до даних кіл, обмежені цією точкою і точками дотику, були рівними.
10. Побудувати коло, що є ортогональним до трьох даних кіл.
11. Накресліть три кола так, щоб їх радикальний центр лежав усередині кожного з них.
12. Доведіть, що центри кіл довільного пучка лежать на одній прямій (лінія центрів пучка).
13. Якщо якесь з кіл пучка не має з його радикальною віссю жодної спільної точки, то будь-яке коло цього пучка теж має цю властивість, причому будь-які два кола пучка не мають спільних точок. Довести.
14. Побудувати коло, яке належить до заданого еліптичного (параболічного) пучка і дотикається до даного кола.

15. Задано два кола, що мають дві спільні точки. Побудувати геометричне місце центрів кіл, ортогональних до кожного з них.
16. Перевірити, чи належить базове коло еліптичної в'язки до цієї в'язки. Відповідь обґрунтувати.

1.7. Розв'язування задач на побудову обмеженими засобами

У попередніх підрозділах до розв'язування задач на побудову фігур у площині залучалося два інструменти: циркуль і лінійка. Але існують задачі, для розв'язування яких достатньо застосувати лише один з цих інструментів. Так, для поділу даного кола на шість рівних частин або на три рівні частини достатньо використати лише циркуль (виконайте самостійно потрібні побудови). Кількість таких задач досить обмежена, оскільки за допомогою лише циркуля не можна побудувати (накреслити) жодної прямої, а за допомогою лише лінійки — жодного кола або його дуги.

Можливості застосування лінійки значно зростають, якщо на площині задано (накреслено) певну допоміжну фігуру. Такими фігурами можуть бути квадрат, коло з вказаним центром, пара паралельних прямих та інші. Розглянемо декілька корисних прикладів.

Приклад 1. *Задано дві паралельні прямі a і b. Поділити відрізок AB, що лежить на прямій a, навпіл, використовуючи лише лінійку.*

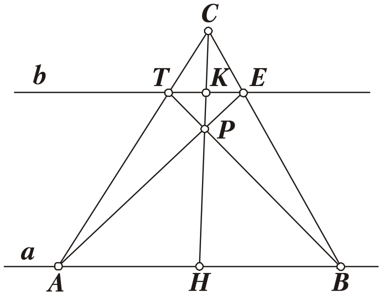
Розв'язання. Оберемо довільну точку C так, як вказано на *малюнку 59*, і з'єднаємо її з точками A і B. Точка P — спільна точка відрізків AE та BT. Точка H, в якій промінь CP перетинає відрізок AB, ділить його навпіл. Доведемо це. Дійсно, з подібності двох пар трикутників AHC і TKC та CHB і CKE випливають рівності

$$\frac{AH}{TK} = \frac{CH}{CK} = \frac{HB}{KE} \Rightarrow AH \cdot KE = TK \cdot HB\,,$$

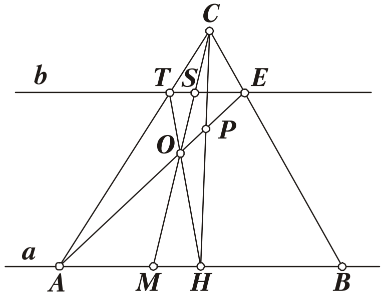
а з подібності двох пар трикутників APH і EPK та HPB і KPT — рівності

$$\frac{AH}{KE} = \frac{HP}{PK} = \frac{HB}{KT} \Rightarrow AH \cdot TK = HB \cdot KE\,.$$

Тоді $AH^2 KE \cdot TK = HB^2 TK \cdot KE$, звідки $AH = HB$, що і потрібно було довести. ■



Мал. 59



Мал. 60

Цей приклад використовується при розв'язуванні багатьох задач на побудову, в яких дозволяється користуватися лише лінійкою.

Приклад 2. *На прямій a задано відрізок AB і точку H, що ділить його навпіл. Через дану точку E, яка не лежить на цій прямій, провести пряму, паралельну до даної прямої, використовуючи лише лінійку.*

Розв'язання. Використаємо *малюнок 59* і міркування, що проведені у попередньому прикладі. Ланцюжок потрібних побудов виглядає так: 1) на промені BE обираємо довільну точку C, що не належить відрізку BE, як вказано на цьому малюнку; 2) будуємо відрізки CA, CH і AE; 3) будуємо промінь BP, де точка P є точкою перетину відрізків CH і AE; 4) будуємо пряму TE, де T — точка перетину променя BP з відрізком AC. Пряма TE є шуканою. Доведення пропонуємо провести читачеві самостійно. ■

Зауважимо, що, використовуючи приклад 1, неважко поділити даний відрізок AB на 2^n рівних частин ($n = 2, 3, 4,...$), якщо задано пряму, яка паралельна до прямої AB.

Приклад 3. *Задано дві паралельні прямі a і b. Поділити відрізок AB, що лежить на прямій a, на три рівні частини, використовуючи лише лінійку.*

Розв'язання. Спочатку будуємо точку H, що ділить відрізок AB навпіл (*мал. 60*), як це було зроблено у прикладі 1. Далі будуємо точку O, що є точкою перетину відрізків TH та AE. І, нарешті, будуємо точку M, у якій промінь CO перетинає пряму a. Доведемо, що $AM = \frac{1}{3}AB$. Позначимо точку перетину променя CO з прямою b через S. З подібності двох пар трикутників TOS і HOM та TOE і HOA випливають наступні рівності:

$$\frac{TS}{MH} = \frac{TO}{OH} = \frac{TE}{AH}, \text{ звідки } \frac{TS}{AH - AM} = \frac{TE}{AH}.$$

Аналогічно, розглянувши пари подібних трикутників TCE і ACB та TCS і ACM, одержуємо рівності $\frac{TE}{AB} = \frac{TC}{AC} = \frac{TS}{AM}$, звідки випливає, що $\frac{TS}{AH - AM} = \frac{2TE}{AB} = \frac{2TS}{AM}$, отже $2AH - 2AM = AM$, або $AM = \frac{2}{3}AH = \frac{1}{3}AB$. Для закінчення побудов досить поділити відрізок MB навпіл. ■

Приклад 4. *Задано паралельні прямі a, b, відрізок AB, що лежить на прямій a, і точку H на цьому відрізку, причому $AH = \frac{AB}{n}$. Використовуючи лише лінійку, побудувати таку точку M на відрізку AH, що $AM = \frac{AB}{n+1}$.*

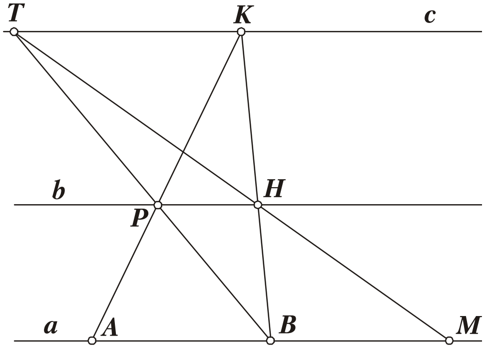
Розв'язання. Для аналізу використаємо *малюнок 60*, припустивши, що точка H задовольняє умові сформульованої задачі. Точки C, T, E, O, M і S будуємо, як і у попередньому прикладі. При цьому точка M виявляється шуканою. Повторюючи попереднє доведення, одержимо рівності

$$\frac{TS}{AH - AM} = \frac{nTE}{AB} = \frac{nTS}{AM},$$

звідки $nAH - nAM = AM$, або $AM = \frac{n}{n+1}AH = \frac{1}{n+1}AB$. Пропонуємо читачеві виконати побудову точки M для випадку $n = 5$. ■

Приклад 5. *Задано паралельні прямі a, b і відрізок AB, що лежить на прямій a. Використовуючи лише лінійку, побудувати таку точку M на промені AB, що $AM = 2AB$.*

Розв'язання. Оберемо довільну точку K так, як вказано на *малюнку 61* (поза даними прямими) і проведемо через неї пряму c, що паралельна до кожної з цих прямих. Для цього можна використати приклади 1 і 2: спочатку поділити даний відрізок навпіл (приклад 1), потім побудувати пряму c (приклад 2). Ці побудови ми тут опускаємо. Далі будуємо відрізки AK і BK та точки їх перетину з прямою b: P і H відповідно. Будуємо точку T, в якій промінь BP перетинає пряму c. Точка M, в якій промінь TH перетинає пряму a, є шуканою точкою. Доведемо це, розгля-



Мал. 61

нувши дві пари подібних трикутників AKB і PKH та BTM і PTH. Через h та g позначимо відстані між прямими a і c та прямими b і c відповідно. Тоді справджуються майже очевидні рівності

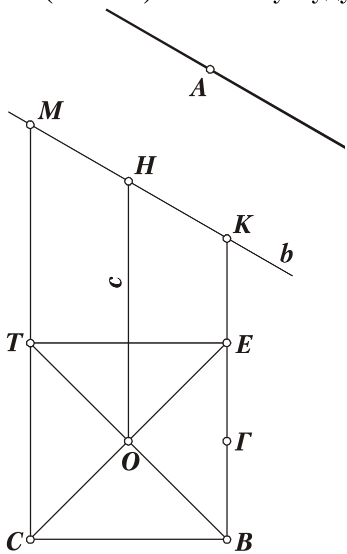
$$\frac{AB}{PH}=\frac{h}{g}=\frac{BM}{PH},$$

з яких випливає, що $AB = BM$, що закінчує доведення. ■

Неважко зрозуміти, що аналогічним способом можна було б побудувати таку точку M, що $AM = nAB$ для довільного цілого числа n.

Приклад 6. *Використовуючи лише лінійку, через дану точку A провести пряму, паралельну до даної прямої b, якщо в площині задано квадрат BCTE.*

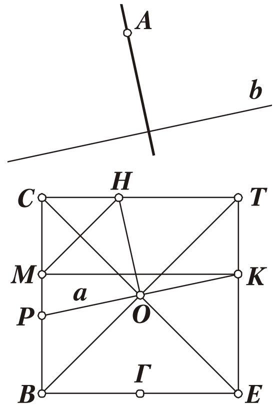
Розв'язання. Нехай задана пряма b не паралельна до прямої TE (*мал. 62*). Спочатку будуємо точки K і M перетину прямих BE і CT з прямою b відповідно. Далі, використовуючи приклад 1, будуємо точку $Г$, що ділить відрізок BE навпіл, і точку O, що є точкою перетину відрізків BT і CE. Після цього, використовуючи приклад 2, через точку O проводимо пряму c, яка паралельна до прямої BE. Очевидно, що точка H перетину прямих b і c є серединою відрізка KM. Застосувавши ще раз приклад 2, через точку A проводимо пряму, паралельну до прямої b. ■



Мал. 62

Приклад 7. *Використовуючи лише лінійку, через дану точку A провести пряму, перпендикулярну до даної прямої b, якщо в площині задано квадрат BCTE.*

Розв'язання. Розглянемо випадок, коли задана пряма не паралельна до жодної з сторін даного квадрата. Будуємо точки *Г* і *О*, як і в попередньому прикладі (*мал. 63*). Після цього, використавши приклад 2, проводимо через точку *О* пряму *а*, паралельну до прямої *b*. Нехай пряма *а* перетинає відрізки *СВ* і *ТЕ* в точках *Р* і *К* відповідно і ці точки не співпадають з вершинами даного квадрата. Використавши приклад 2, через точку *К* проводимо пряму, паралельну до прямої *ВЕ*. Нехай побудована пряма перетинає пряму *ВС* у точці *М*. Будуємо пряму, що проходить через точку *М* і паралельна до прямої *ВТ*, від перетину якої з відрізком *СТ* одержуємо точку *Н*. Пряма *НО* перпендикулярна до прямої *а*, отже, і до прямої *b*. Для доведення останнього твердження досить обґрунтувати рівність трикутників *ОСН* і *ОТК*, звідки випливатиме рівність кутів *НОС* і *ТОК*. Тоді кут *НОК* дорівнює сумі кутів *НОТ* та *НОС*, тобто є прямим кутом. Тепер залишається через точку *А* провести пряму, паралельну до прямої *ОН*, знов використавши приклад 2. Побудована пряма є шуканою. ■



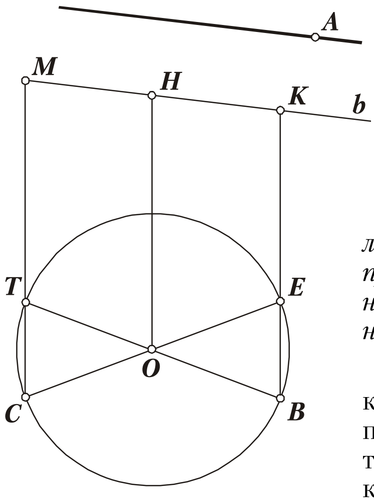
Мал. 63

Зауважимо, що у випадках, коли задана пряма паралельна до сторони даного квадрата, або точки *Р* і *К* співпадають з його вершинами, розв'язування задачі лише спрощується. Рекомендуємо читачеві самостійно розглянути ці випадки.

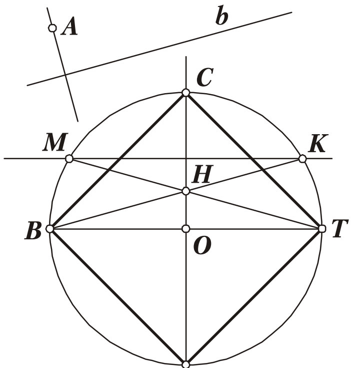
Особливий інтерес викликає розв'язування задач на побудову фігур у площині за допомогою лише лінійки, якщо в цій площині побудовано коло з центром. Розглянемо декілька відповідних прикладів.

Приклад 8. *Використовуючи лише лінійку, через дану точку А провести пряму, паралельну до даної прямої b, якщо в площині задано коло S(О, ОВ).*

Розв'язання. Нехай задана пряма *b* не має спільних точок з колом *S*(*О*, *ОВ*) (*мал. 64*). Спочатку будуємо два довільні діаметри *ВТ* і *СЕ* цього кола. Очевидно, що фігура *СТЕВ* – прямокутник, отже, його протилежні сторони лежать на паралельних прямих. Обираємо пару протилежних сторін побудованого прямокутника, які лежать на прямих, що не паралельні до прямої *b*, наприклад, сторони *ВЕ* і *СТ*. Будуємо точки *К* і *М* перетину прямих *ВЕ* і *СТ* відповідно з прямою *b*. Подальші побудови



Мал. 64



Мал. 65

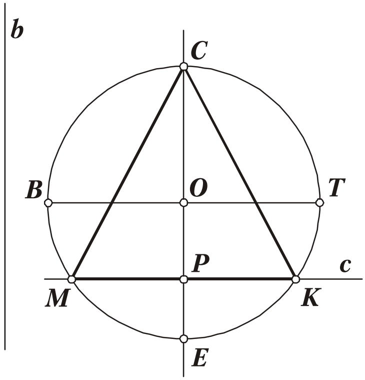
аналогічні до побудов, здійснених у прикладі 6. Рекомендуємо читачеві їх виконати. Випадки, коли пряма b має з даним колом одну або дві спільні точки, пропонуємо розглянути самостійно. ■

Приклад 9. *Використовуючи лише лінійку, через дану точку A провести пряму, що перпендикулярна до даної прямої b, якщо в площині задано коло $S(O, OB)$.*

Розв'язання. Якщо в задане коло вписати довільний квадрат, то подальші побудови можна виконати так, як це було зроблено у прикладі 7. Очевидно, що побудова цього квадрату зводиться до побудови двох взаємно перпендикулярних діаметрів даного кола. Для цього будуємо спочатку діаметр BT і, обравши довільну точку M на даному колі, як вказано на *малюнку 65*, проводимо через неї, використавши приклад 2, пряму a, паралельну до прямої BT. Нехай K — спільна точка прямої a та даного кола, що не співпадає з точкою M. Легко бачити, що фігура $BMKT$ є рівнобічною трапецією. Тоді пряма OH, де через H позначено точку перетину діагоналей цієї трапеції, перпендикулярна до прямої BT. Побудувавши точки C і E перетину прямої OH з даним колом, одержуємо його діаметр CE. Отже, BT і CE — шукані діаметри, тобто, фігура $BCTE$ — квадрат. ■

Приклад 10. *Використовуючи лише лінійку, вписати у задане коло $S(O, OB)$ правильний трикутник.*

Розв'язання. Спочатку (*мал. 66*) будуємо довільну пару взаємно перпендикулярних діаметрів BT і CE даного кола, як це було показано у попередньому прикладі. Потім, використовуючи приклад 2, будуємо довільну пряму b, паралельну до прямої CE, яка містить відрізок CE, серединою якого є точка O. Після цього, використовуючи приклад 1, будуємо точку *P*, яка ділить відрізок *OE* навпіл. Знов, використовуючи приклад 2, будуємо пряму *c*, що проходить через точку *P* і паралельна до прямої *BT*. Позначимо точки перетину прямої *c* з даним колом через *M* і *K*. Трикутник *MCK* – шуканий. Пропонуємо читачеві довести останнє твердження і самостійно виконати всі допоміжні побудови. ■



Мал. 66

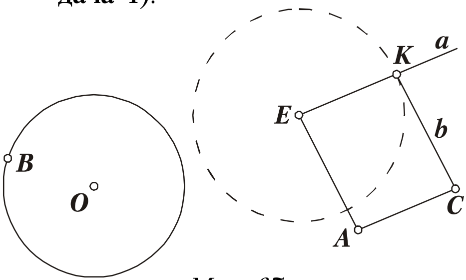
Питання, що пов'язані із застосуванням лише лінійки до розв'язування задач на побудову фігур у площині, зацікавили математиків ще у XVII столітті. Найбільш повні дослідження у цій галузі були проведені швейцарським математиком Я.Штейнером (1796-1863), який навів достатні умови розв'язаності за допомогою лише лінійки будь-якої задачі на побудову, що розв'язується за допомогою лінійки та циркуля. Щоб не вносити змін до аксіоматики, запропонованої у підрозділі 1.1 цієї книжки, результат Штейнера ми сформулюємо у вигляді наступного твердження.

Теорема 1. *Якщо на площині накреслено довільне коло S(O, OB) і його центр, то будь-яка задача на побудову фігури, що складається з скінченої кількості точок, яка розв'язується за допомогою циркуля та лінійки, може бути розв'язана за допомогою лише лінійки.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що задані в умові будь-якої задачі фігури (фігура) згідно з аксіомою 1 підрозділу 1.1 є побудованими, а отже, згідно з аксіомою 7 цього ж підрозділу, накреслені за допомогою циркуля та лінійки. Таким чином, задані фігури (фігура) є об'єднанням скінченої кількості кіл, дуг кіл, прямих, променів, відрізків та скінченої множини точок, які їм не належать. Нагадаємо, що побудова шуканої фігури за допомогою циркуля і лінійки зводиться до скінченої кількості найпростіших побудов а)-ж) з підрозділу 1.1. При цьому побудови б), г), д) за допомогою лише лінійки здійснити неможливо. Тому введемо нове поняття "***відоме коло***". Так називатимемо коло, центр якого і відрізок, що дорівнює радіусу, побудовано. У цьому разі слід показати, що в умовах теореми 1 за допомогою лише лінійки можна побудувати:

1) точку, що належить відомому колу (**задача 1**);

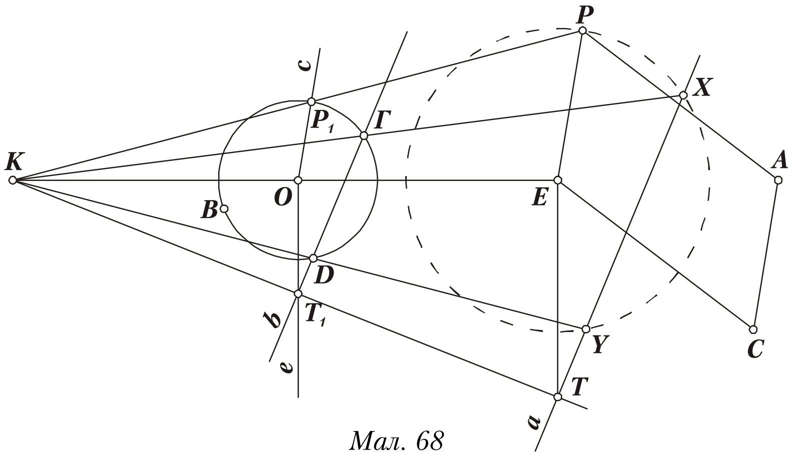
2) точки перетину відомого кола з побудованою прямою, якщо такі точки існують **(задача 2)**;
3) точки перетину двох відомих кіл, якщо такі точки існують **(задача 3)**;
4) точку, що не належить до об'єднання скінченої кількості побудованих точок, побудованих прямих та відомих кіл **(задача 4)**.



Мал. 67

Розпочнемо з *першої задачі*. Нехай відоме коло визначено центром E та відрізком AC, що дорівнює його радіусу (*мал. 67*). Задача зводиться до побудови паралелограма $EACK$, оскільки в цьому разі точка K лежатиме на відомому колі. Проводимо прямі AE та AC, після чого, використовуючи приклад 8, будуємо пряму a, яка проходить через точку E і паралельна до прямої AC, і пряму b, яка проходить через точку C і паралельна до прямої AE. Точка K перетину прямих a і b є шуканою.

Розв'яжемо *другу задачу*. Нехай, як і раніше, відоме коло визначено центром E та відрізком AC, що дорівнює його радіусу (*мал. 68*), і відомо, що побудована пряма a перетинає це коло у двох точках. Побудуємо ці точки в припущенні, що відоме коло та коло $S(O, OB)$ мають зовнішній центр гомотетії. Побудувавши паралелограм $EPAC$ (див. задачу 1), одержуємо точку P на

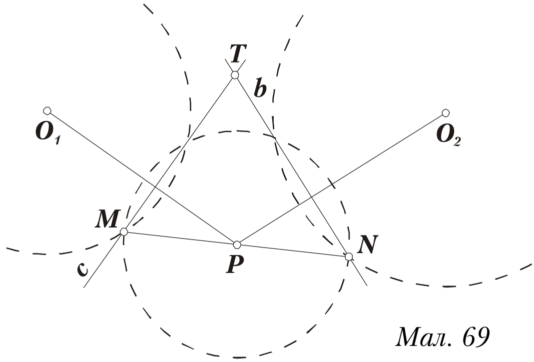


Мал. 68

відомому колі. Маючи паралельні прямі АС і PE та використовуючи приклади 1, 2, проводимо через точку O пряму c, паралельну до прямої PE. Будуємо точку P_1, що належить прямій c та колу $S(O,\ OB)$, гомотетичну з точкою P відносно зовнішнього центру гомотетії розглядуваних кіл. Від перетину прямих OE та PP_1 одержуємо точку K, що є вказаним центром гомотетії. Оберемо довільну точку T на прямій a і проведемо прямі KT і ET. Потім зазначеним вище способом через точку O проведемо пряму e, паралельну до прямої ET. Точка T_1 перетину прямих KT і e є гомотетичною з точкою T. Провівши через точку T_1 пряму b, паралельну до прямої a, одержимо дві гомотетичні прямі a і b. Точки перетину прямої b з колом $S(O,\ OB)$ позначимо через $Г$ та D. Будуємо точки X та Y перетину прямих $KГ$ та KD з прямою a відповідно. Ці точки є шуканими.

Зауважимо, що у випадку відсутності у двох розглядуваних кіл зовнішнього центру гомотетії, слід використати їх внутрішній центр гомотетії. Попробуйте самостійно розглянути випадок, коли точки O і E співпадають.

Задачу 3 зведемо до побудови радикальної осі двох відомих кіл $S_1(O_1,\ O_1M)$ та $S_2(O_2, O_2N)$, припустивши, що точки M та N на цих колах побудовано, принаймні одна з них не лежить на прямій O_1O_2, і що ці кола мають дві спільні точки (*мал. 69*). У підрозділі 1.6 було показано, що радикальна вісь двох кіл, що мають дві спільні точки, проходить через кожну з них і перпендикулярна до лінії центрів цих кіл. Тому, якщо вказана радикальна вісь буде побудована, то задача зведеться до попередньої: побудувати точки перетину відомого кола з побудованою прямою. Цим відомим колом може бути будь-яке з кіл $S_1(O_1,\ O_1M)$, $S_2(O_2,\ O_2N)$. Більше того, досить побудувати лише одну точку вказаної радикальної осі, оскільки, провівши через цю точку перпендикуляр до прямої O_1O_2 (приклад 9), одержимо цю вісь. Побудуємо спочатку точку P, яка ділить відрізок NM навпіл (запропонуйте самостійно для цього ланцюжок побудов). Потім будуємо прямі O_1P та O_2P, після чого, використовуючи приклад 9, через точку M проводимо пряму c, перпендикулярну



Мал. 69

до прямої O_1P, а через точку N — пряму b, перпендикулярну до прямої O_2P. Точка T перетину прямих b і c належить до радикальної осі кіл $S_1(O_1, O_1M)$ та $S_2(O_2, O_2N)$. У цьому легко переконатися, врахувавши, що точка T є радикальним центром цих двох кіл і кола з центром у точці P, радіусом якого є відрізок PM.

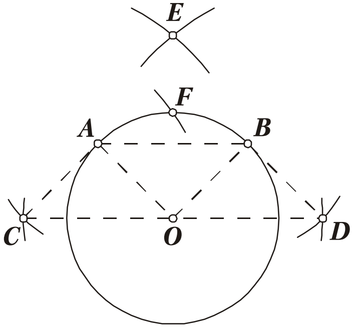
Залишається розв'язати *задачу 4*. Нехай побудовано n прямих, k точок і m кіл є відомими. Оберемо довільно точку A, яка не належить жодній з n побудованих прямих (для цього не потрібно креслярських інструментів), і проведемо через цю точку і довільну точку B пряму a. Зрозуміло, що ця пряма не належить до множини n побудованих прямих. На ній можуть лежати деякі з побудованих k точок і точки перетину з даними прямими. Крім вказаних точок, оберемо на прямій a ще $2m + 1$ точку. Хоч одна з них не лежить на жодному з відомих кіл і задовольняє умову задачі 4. Теорему 1 доведено. ■

Зауважимо, що при розв'язуванні задач на побудову за допомогою лише лінійки не слід розв'язувати їх спочатку за допомогою лінійки і циркуля, а потім кожну елементарну побудову з одержаного ланцюжка побудов намагатися виконати за допомогою лише лінійки. Це не є раціональним шляхом розв'язування задачі, на що вказують приклади 1-10.

Перейдемо тепер до розв'язування задач на побудову з використанням лише циркуля. Розпочнемо з двох важливих прикладів.

Приклад 11. *Використовуючи лише циркуль, побудувати точку, що ділить навпіл дугу AB даного кола $S(O, OB)$.*

Розв'язання. Очевидним чином будуємо точку C, що є вершиною паралелограма $ABOC$, і точку D, що є вершиною паралелограма $ABDO$, як вказано на *малюнку 70*. Одну з точок перетину кіл $\Gamma_1(C, CB)$ і $\Gamma_2(D, AD)$ позначимо через E. Точка F перетину кола $\Gamma(C, OE)$ з даною дугою AB є шуканою точкою. Дійсно, з властивостей паралелограма випливають рівності $2AB^2 + 2AC^2 = AO^2 + CB^2$, $CB^2 = 2AB^2 + r^2$, де r — довжина радіуса даного кола. Оскільки прямі AB і OE взаємно перпендикулярні, то $OE^2 = CB^2 - AB^2 + r^2$. Звідси випливає рівність $CF^2 = OC^2 + OF^2$, тобто, пряма OF перпендикулярна до прямої AB, що завершує доведення.

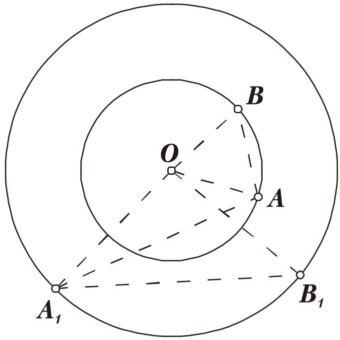


Мал. 70

Спробуйте самостійно розв'язати цю задачу, якщо точки A і B є кінцями діаметра даного кола. ■

Приклад 12. *Використовуючи лише циркуль, побудувати такі точки A і B, щоб справджувалась рівність $a : b = c : AB$, де a, b, c — довжини даних відрізків.*

Розв'язання. Будуємо два концентричні кола S і S_1 (*мал. 71*) з центром O, радіуси яких мають довжини a і b (припустимо, що $a > b$). Якщо припустити, що $a = b$, то задача стає тривіальною. Обираємо довільну точку A_1 на колі S більшого радіуса і будуємо кола $Г(A_1, A_1A)$ та $Ф(A_1, A_1B_1)$, де $A_1B_1 = c$, а відрізок A_1A обирається довільно з тією умовою, що кола $Г$ та S_1 перетинаються в точці A. Точку перетину кіл S та $Ф$ позначимо через B_1. Будуємо коло $G(B_1, AA_1)$ і точку B перетину його з колом S_1. Точки A і B є шуканими. Дійсно, з рівності трикутників AOA_1 і BOB_1 випливає рівність кутів BOB_1 та AOA_1, а отже, кутів A_1OB_1 та AOB. Таким чином, трикутники A_1OB_1 та AOB подібні. Прирівнюючи відношення довжин їх відповідних сторін, одержуємо, що $a : b = c : AB$, що і потрібно було довести. Пропонуємо читачеві самостійно розглянути випадок, коли кола S та $Ф$ не перетинаються. ■



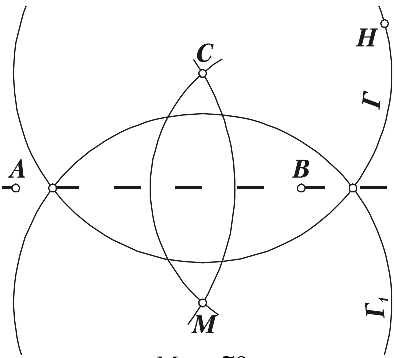
Мал. 71

Датський геометр Георг Мор (1640-1697) та італійський геометр Лоренцо Маскероні (1750-1800) показали, що будь-яку задачу на побудову, яка розв'язується за допомогою циркуля та лінійки, можна розв'язати за допомогою лише циркуля. Сформулюємо наступне твердження, яке називають теоремою Мора-Маскероні.

Теорема 2. *Будь-яка задача на побудову фігури, що складається з скінченої кількості точок, яка розв'язується за допомогою циркуля та лінійки, може бути розв'язана за допомогою лише циркуля.*

Доведення. Зауважимо спочатку, що ідея доведення цієї теореми така ж сама, як ідея доведення теореми 1. Побудови а), в), г) з підрозділу 1.1. за допомогою лише циркуля здійснити неможливо. Тому введемо нове поняття "***відома пряма***". Так називатимемо пряму, дві точки якої побудовано. Відрізок називатимемо "відомим", якщо побудовано його кінці, а промінь — якщо побудовано його початок і ще будь-яку його точку. Для доведення теореми досить показати, що за допомогою лише циркуля можна побудувати:

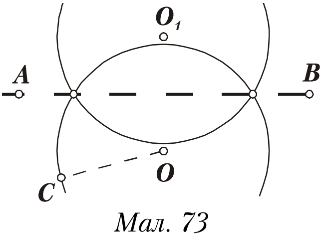
1) точку, що належить відомій прямій (**задача 1**);
2) точки перетину побудованого кола з відомою прямою, якщо такі точки існують (**задача 2**);
3) точку перетину двох відомих прямих, якщо така точка існує (**задача 3**);
4) точку, що не належить до об'єднання скінченої кількості побудованих точок, побудованих кіл та відомих прямих (**задача 4**).



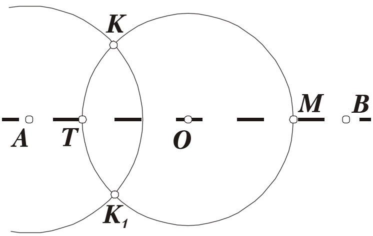
Мал. 72

Розпочнемо з *першої задачі*. Нехай AB є відомою прямою (*мал. 72*). Обираємо на площині довільну точку C. Якщо вона належить прямій AB, то вона є шуканою точкою. Якщо ні, то будуємо точку M, симетричну з точкою C відносно прямої AB. Для цього досить побудувати кола $S(A, AC)$ та $S_1(B, BC)$ і знайти точку їх перетину M, яка не співпадає з точкою C. Після цього будуємо кола $Г(C, CH)$ та $Г_1(M, CH)$, радіуси яких дорівнюють відрізку, довжина якого більша за половину довжини відрізка CM. Легко показати, що точки перетину кіл $Г(C, CH)$ та $Г_1(M, CH)$ належать прямій AB.

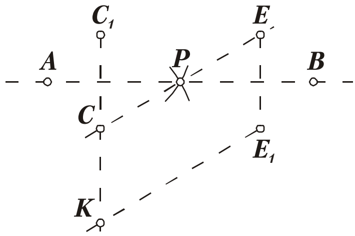
Тепер припустимо, що AB – відома пряма, $Г(O, OC)$ – задане коло, і побудуємо точки їх перетину, тобто розв'яжемо *другу задачу* (*мал. 73*). Для цього спочатку будуємо точку O_1, симетричну з точкою O відносно прямої AB, після чого будуємо коло $Г_1(O_1, OC)$. Легко бачити, що точки перетину кіл $Г(O, OC)$ та $Г_1(O_1, OC)$ (якщо вони існують) є шуканими точками. Якщо точка O належить прямій AB, то виконаємо наступні побудови: оберемо на даному колі довільну точку K і побудуємо коло $S(A, AK)$. Нехай це коло має з даним колом ще одну спільну точку K_1 (*мал. 74*). Використавши приклад 11, будуємо точки T і M, що є серединами двох дуг даного кола з кінцями K та K_1. Легко переконатися, що точки T і M є шуканими точками.



Мал. 73



Мал. 74



Мал. 75

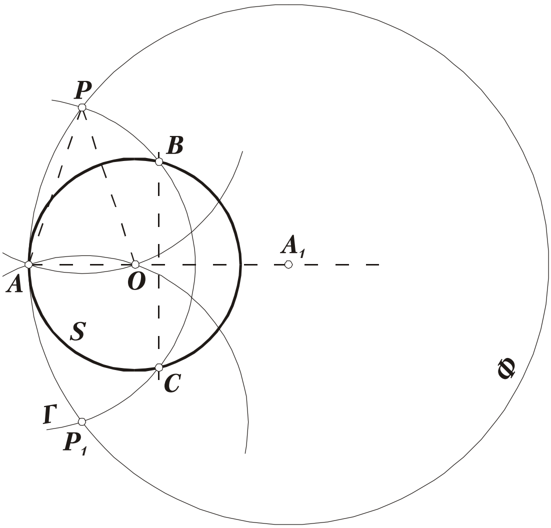
Розв'яжемо тепер *третю задачу*. Нехай AB і CE — відомі прямі. Побудуємо точку їх перетину, якщо така точка існує. Спочатку будуємо точки C_1 і E_1, симетричні з точками C і E відповідно відносно прямої AB (*мал. 75*). Після цього будуємо вершину K паралелограма CEE_1K. Використовуючи приклад 12, будуємо точки C_0, M_0 такі, що $C_1K : KE_1 = CC_1 : C_0M_0$. Шукана точка P будується як точка перетину кіл з центрами в точках C і C_1 радіуси яких дорівнюють відомому відрізку C_0M_0. Доведення одразу випливає з подібності трикутників CC_1P та KC_1E_1. У випадку перпендикулярності прямих AB і CE задача лише спрощується, оскільки в цьому разі точка P ділить відрізок CC_1 навпіл і легко будується.

Залишається розв'язати *задачу 4*. Нехай побудовано n кіл, k точок і m прямих є відомими. Оберемо довільно точку A, яка не належить жодному з n побудованих кіл (для цього не потрібно креслярських інструментів) та довільну точку B. Побудуємо коло $S(B, AB)$ Зрозуміло, що воно не належить до множини вказаних n побудованих кіл. На цьому колі можуть лежати деякі з побудованих k точок і точки перетину з побудованими колами. Крім вказаних точок, оберемо на колі S ще $2m + 1$ точку. Очевидно, що хоч одна з них не належить до жодної з m відомих прямих і задовольняє умову задачі 4. Теорему 2 доведено. ■

Розглянемо ще декілька прикладів.

Приклад 13. *Побудувати центр накресленого кола S, користуючись лише циркулем.*

Розв'язання. Обираємо на колі S довільну точку A і будуємо довільне коло Γ з центром у цій точці, яке перетинає коло S у двох точках B і C. Будуємо точку A_1, симетричну з точкою A відносно відомої прямої BC. Далі проводимо коло $\Phi(A_1, A_1A)$ і будуємо точки P і P_1 перетину його з колом $T(A, AB)$. Нарешті, побудувавши два кола з центрами P і P_1, радіуси яких дорівнюють відрізку AP, відмічаємо точки їх перетину. Однією з них є



Мал. 76

точка A, а другою — точка O, яка і є центром кола S. Легко бачити, що доведення останнього твердження зводиться до доведення рівності $AO = r$, де r — довжина радіуса кола S. Справджуються рівності:

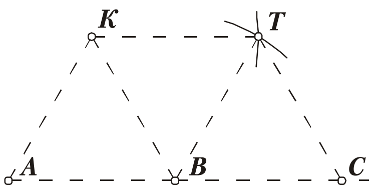
$$AP^2 = 2AA_1 \cdot AK = AA_1 \cdot AO,$$

$$AB^2 = 2rAE,$$

де E — точка перетину відомих відрізків BC та AA_1 (середина кожного з них). Тоді AA_1 x x $AO = 2rAE = rAA_1$, отже, $AO = r$ (див. *мал. 76*). ■

Зауважимо, що розв'язати цю задачу, використовуючи лише лінійку, неможливо.

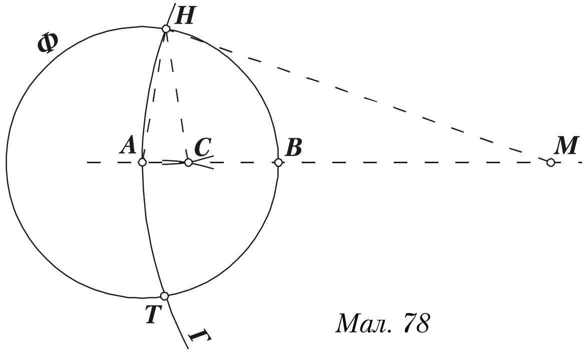
Приклад 14. *На відомій прямій AB побудувати точку C так, щоб $AC = 2AB$, користуючись лише циркулем.*



Мал. 77

Розв'язання. Будуємо довільну точку K, що не лежить на прямій AB. Для цього досить побудувати два довільні кола з центрами у точках A та B, які перетинаються, і через K позначити одну з спільних точок цих кіл. Потім будуємо точку T, що є вершиною паралелограма $AKTB$, і точку C, що є вершиною паралелограма $BKTC$, як показано на *малюнку 77*. Очевидно, що C — шукана точка. Легко бачити, що таким способом неважко побудувати на прямій AB таку точку P, що $AP = n\ AB$, де n — довільне натуральне число, що більше від двох. ■

Приклад 15. *На відомій прямій AB побудувати точку C так, щоб $AC = \frac{1}{3}AB$, користуючись лише циркулем.*

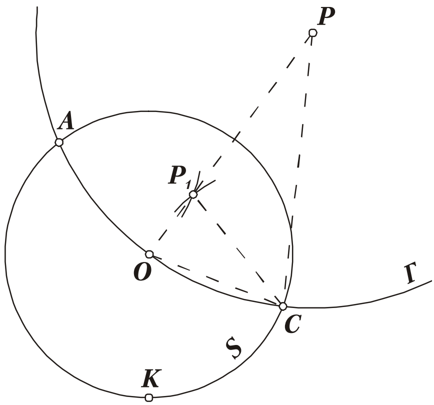


Мал. 78

Розв'язання. Спочатку на прямій AB будуємо таку точку M, що $AM = 3AB$ (дивись попередній приклад). Після цього будуємо коло $Г(M, AM)$ та точки H і T перетину його з колом $Ф(A, AB)$, як показано на *малюнку 78*. Провівши два кола з центрами в точках H і T, радіуси яких дорівнюють відрізку HA, і, побудувавши точку їх перетину (відмінну від A), одержуємо шукану точку C. Доведення випливає з подібності рівнобедрених трикутників AHC і HMA: $\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{AM}$, звідки $AC = \frac{AB^2}{AM} = \frac{AB^2}{3AB} = \frac{AB}{3}$. Легко бачити, що таким способом неважко побудувати на прямій AB таку точку P, що $AP = \frac{1}{n}AB$, де n — довільне натуральне число, що більше від двох. ■

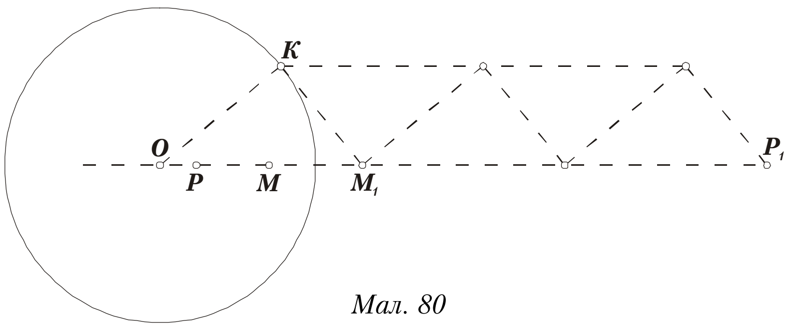
Приклад 16. *Побудувати точку P_1, інверсну з даною точкою P відносно заданого кола інверсії $S(O, OK)$, користуючись лише циркулем.*

Розв'язання. Якщо точка P належить колу інверсії, то вона інверсна самій собі. Нехай точка P лежить поза колом інверсії, як вказано на *малюнку 79*. Будуємо коло $Г(P, OP)$ і точки A та C перетину його з колом $S(O, OK)$. Після цього будуємо два кола з центрами в точках A та C, радіуси яких дорівнюють відрізку OK. Ці кола перетинаються в точках O та P_1, остання з яких є шуканою точкою. Дійсно, точки O, P і P_1 лежать на одній прямій, причому $OP \cdot OP_1 = OK^2$, що одразу випливає з подібності рівнобедрених трикутників OCP і OP_1C. Нехай тепер точка P лежить всередині кола інверсії. Якщо при цьому $OP > \frac{OK}{2}$, то побудови проводяться аналогічно (виконайте їх самостійно). Якщо ж $OP < \frac{OK}{2}$, то вказані побудови провести неможливо (переконайтеся у цьому). У цьому разі ланцюжок елементарних побудов, що



Мал. 79

був запропонований у підрозділі 1.4 для побудови інверсних точок за допомогою циркуля і лінійки, можна здійснити за допомогою лише циркуля. Але можна виконати більш красиві побудови, використовуючи приклад 14. Спочатку будуємо на відомій прямій OP допоміжну точку M таку, що $OM = nOP > \frac{OK}{2}$, де n — деяке натуральне число. Далі будуємо точку M_1, інверсну з точкою M, як це було зроблено вище. Тепер на промені OP будуємо точку P_1, для якої справджується рівність $OP_1 = nOM_1$. Ця точка є шуканою. Дійсно, $OM \cdot OM_1 = OK^2$, звідки $n \cdot OP \frac{OP_1}{n} = OK^2$ або $OP \cdot OP_1 = OK^2$, що завершує доведення. На *малюнку 80* продемонстровано схему побудов для випадку $n = 3$. ■



Мал. 80

Вправи для самостійного розв'язування

1. Задано дві паралельні прямі і точка. Через цю точку провести пряму, паралельну до даних прямих, використовуючи лише лінійку.
2. Задано дві паралельні прямі і на одній з них відрізок AB. Побудувати відрізок AC такий, що $AC = \frac{2}{3}AB$, використовуючи лише лінійку.

3. Задано дві паралельні прямі і відрізки AB та CE на одній з них. Побудувати такі відрізки AK та AT, що $AK = AB + CE$, $AT = AB - CE$ ($AB > CE$), використовуючи лише лінійку.
4. У площині задано паралелограм і трикутник. Побудувати одну з медіан цього трикутника, використовуючи лише лінійку.
5. В одній площині накреслено коло (центр його не вказано) та паралелограм. Використовуючи лише лінійку, побудувати центр цього кола.
6. У дане коло з побудованим центром вписати правильний восьмикутник, використовуючи лише лінійку.
7. У площині задано коло з центром та довільний кут. Побудувати бісектрису цього кута, використовуючи лише лінійку.
8. У площині задано коло з центром і точка. На дану хорду цього кола з даної точки опустити перпендикуляр, використовуючи лише лінійку.
9. Користуючись лише лінійкою, побудувати центр кола, вписаного у даний трикутник, якщо задано центр описаного навколо нього кола.
10. Побудувати дві точки, що лежать на сторонах кута з даною вершиною C, який дорівнює куту, утвореному двома відомими променями з даною вершиною B, використовуючи лише циркуль.
11. За допомогою лише циркуля побудувати точку, симетричну з даною точкою відносно відомої прямої AB.
12. За допомогою лише циркуля побудувати точку A, яка лежить на дотичній, що проходить через дану точку B на даному колі і не співпадає з точкою B.
13. За допомогою лише циркуля побудувати точки A і C так, щоб $AC = \frac{2}{3}AB$, де A і B — дані точки відомої прямої.
14. Побудувати точку дотику дотичної, яка містить точку A, що не лежить на даному колі, до цього кола, використовуючи лише циркуль.
15. Задано три точки, що є вершинами довільного трикутника. Побудувати коло, що проходить через ці точки, використовуючи лише циркуль.
16. Задано точки A і B. Використовуючи лише циркуль, побудувати точки C і E так, щоб справджувалась рівність $CE = \sqrt{2}AB$.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Збірник задач з конструктивної геометрії / упорядкувач В.С. Трохименко. Вінниця : ВДПУ, 2006. 39 с.
2. Методичні вказівки до розв’язування задач на побудову для студентів спеціальності «Математика» / укладачі: В.М. Євладенко, С.Д. Паращук, Ю.В. Яременко. Кіровоград : КДПІ, 1992. 60 с.
3. Проективна геометрія та методи зображень: вибрані питання : навчально-методичний посібник для бакалаврантів спеціальності «014.04 Середня освіта (математика)» педагогічних ЗВО / укладачі: Г.В. Дейниченко, О.А. Жерновникова, В.В. Масич, О.Д. Чібісов. Харків : ХНПУ імені Г.С. Сковороди, 2022. 64 с.
4. Розв’язування геометричних задач методом векторів : методичні рекомендації / укладачі: Тютюн Л.А., Утямишева О.А. Вінниця, 2011. 48 с.
5. Розв’язування геометричних задач методом паралельного перенесення : методичні рекомендації / укладачі: Тютюн Л.А., Хапіцька М.І. Вінниця, 2011. 70 с.
6. Трохименко В.С. Збірник задач з конструктивної геометрії [Електронний ресурс]. Сайт Валентина Степановича Трохименка. URL: https://sites.google.com/site/vstrokhimenko/
7. Martin G.E. The Ruler and Compass. In: *Geometric Constructions. Undergraduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, NY, 1998. PP. 29-51
8. Sutton A. Ruler and Compass: Practical Geometric Constructions (Wooden Books) Bloomsbury USA, 2009. 64 p.

Міністерство освіти і науки України
Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Навчальне електронне видання

ТЕПЛІНСЬКИЙ Юрій Володимирович,
доктор фізико-математичних наук, професор, професор кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

СМОРЖЕВСЬКИЙ Юрій Людвігович,
кандидат педагогічних наук, доцент, завідувач, доцент кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ЗЕЛЕНСЬКИЙ Олексій Віталійович,
кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри математики Кам’янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка

ЗАДАЧІ НА ПОБУДОВУ ФІГУР НА ПЛОЩИНІ

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання

Підписано 7.11.2024. Гарнітура «Times».
Об’єм даних 3,8 Мб. Обл.-вид. арк. 6,9. Зам. № 1135.

Видавець і виготовлювач Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, вул. Огієнка, 61, м. Кам’янець-Подільський, 32300

Свідоцтво про внесення до державного реєстру суб'єктів видавничої справи серії ДК № 3382 від 05.02.2009 р.