Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка

Ю.Л. СМОРЖЕВСЬКИЙ
Л.В. ШЛАПАК

ЕЛЕМЕНТИ КОМБІНАТОРИКИ

Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання

НАВЧАЛЬНО-МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК

Електронне видання

Кам'янець-Подільський
2025

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174я73
С 51

Рекомендувала рада з науково-методичної роботи і забезпечення якості вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка, протокол № 1 від 08 січня 2025 року.

Рецензенти:

Марчук Н.А. – кандидат фізико-математичних наук, доцент, доцент кафедри інформаційних технологій фізико-математичних та безпекових дисциплін Закладу вищої освіти «Подільський державний університет»;

Дудіна Н.В. – викладач математики, спеціаліст першої категорії відокремленого структурного підрозділу «Кам'янець-Подільський фаховий коледж харчової промисловості національного університету харчових технологій»;

Сивак О.Д. – вчитель математики, вчитель методист Кам'янець-Подільського ліцею №5 Кам'янець-Подільської міської ради.

Сморжевський Ю.Л., Шлапак Л.В.
С 51. Елементи комбінаторики. Дидактичні матеріали та тематичні перевірочні роботи для рівневого навчання: навчально-методичний посібник [Електронний ресурс]. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2025. 108 с.

Навчально-методичний посібник присвячений вивченню теми «Елементи комбінаторики» в закладах загальної середньої освіти та в закладах фахової передвищої освіти. Основну увагу сконцентровано саме на розв'язуванні рівневих задач. Для дидактичних матеріалів та тематичних перевірочних робіт подано відповіді та вказівки.

Для вчителів математики, студентів математичних спеціальностей, учнів спеціалізованих закладів загальної середньої освіти з поглибленим вивчення математики, здобувачів фахової передвищої освіти.

УДК 519.1(075.8)
ББК 22.174я73

Електронна версія посібника доступна за покликанням:

URL:

ЗМІСТ

ПЕРЕДМОВА

Комбінаторика – розділ математики, присвячений розв'язанню задач про вибір та розміщення елементів скінченної множини згідно із заданими правилами. Вивчення елементів комбінаторики в закладах освіти є дуже цікавою і захоплюючою темою.

Із задачами, що отримали назву комбінаторних, люди зіштовхнулись в глибокій давнині. Декілька тисячоліть тому в Стародавньому Китаї захоплювалися складанням магічних квадратів, в яких задані числа розподіляли так, що їх сума по всім горизонталям і вертикалям та головним діагоналям була однією і тою ж. В Стародавній Греції підраховували число різних комбінацій довгих і коротких складів в віршових розмірах, займалися теорією фігурних чисел, вивчали фігури, які можна скласти з частин певним чином розрізаного квадрата, і т. д.

Комбінаторні задачі виникали і в зв'язку з такими іграми, як шашки, шахи, доміно і т.д. Наприклад, задача про розміщення восьми ферзів на шаховій дошці так, щоб жоден з них не опинився під боєм, про обхід шахової дошки шаховим конем і т. д.

Комбінаторика стала наукою лише в XVIII столітті в період, коли виникла теорія ймовірностей. На перший погляд математика, яка відома достовірністю своїх висновків, ніяк не може бути застосована до випадкового. Але саме цією наукою створена числова міра випадковості – ймовірність, яка дає можливість вивчати процеси, що відбуваються випадково. А комбінаторика – це математичний апарат для вивчення початків теорії ймовірностей. Тему "Елементи комбінаторики" включено до програми у зв'язку з тим, що ймовірнісні поняття та методи широко використовуються в сучасному природознавстві як теоретична основа для обробки результатів спостережень у фізиці, механіці, астрономії, геодезії, біології, обчислювальній математиці та інших галузях.

Щоб розв'язувати теоретично – ймовірнісні задачі, треба було вміти підраховувати число різних комбінацій, підлеглим тим чи іншим умовам. Після перших робіт, виконаних в XVI столітті італійськими вченими Дж. Кардано, Н. Тарталья і Г. Галілеєм, такі задачі вивчали французькі математики Б. Паскаль і П. Ферма. Першим розглядав комбінаторику як самостійну гілку науки німецький філософ і математик Г. Лейбніц, який опублікував у 1666 році роботу “Про мистецтво комбінаторики”, в якій вперше появляється термін “комбінаторний”. Чудові відкриття в області комбінаторики належать Л. Ейлеру. До комбінаторних задач мали інтерес і математики, що займалися складанням і розгадуванням шифрів, вивчанням стародавніх письменностей. Зараз комбінаторика застосовується в багатьох областях науки.

Експерти, вивчаючи тенденції розвитку сучасної математики, стверджують, що в математиці XXI століття з великою вірогідністю чільне місце посідатиме комбінаторика. Це пояснюється як потребами багатьох прикладних наук – користувачів математики, так і тією обставиною, що вже тепер комбінаторні проблеми виникають майже у всіх математичних предметах. Особливо плідними зараз є зв’язки між комбінаторикою та алгеброю. В останні десятиріччя найглибші комбінаторні результати досягнуто саме в рамках сучасної алгебри. Широко відомі зв’язки з геометрією, математичною логікою та теорією ймовірностей, у тісній „співдружності” з якою комбінаторика свого часу (XVII ст.) зародилася як наука.

З комбінаторикою мають справу хіміки при вивченні різних можливих типів зв'язків атомів у молекулах; біологи, наприклад, у процесі знаходження послідовностей амінокислот у білкових сполуках; кібернетики при розв'язанні задач кодування й побудові обчислювальних пристроїв, математики — при розв'язанні багатьох різних задач, особливо в теорії ймовірності. Також комбінаторику використовують у своїх моделях фізики, архітектори, економісти й представники багатьох інших наук.

І в своєму повсякденному житті, і в промисловій діяльності (техніці), і в сільському господарстві, і в процесі пізнання природи кожна людина зіштовхується з задачами, які відносяться до комбінаторних. Нерідко приходиться знаходити вихід із ситуацій, коли на практиці постає задача:

скількома способами можна розподілити гроші для купівлі продуктів чи скількома способами можна здійснити поїздку з одного міста чи села в інше?...

Тому проблема вивчення комбінаторики в курсі математики є дуже важливою, невід'ємною і разом з тим досить цікавою. Важливо, щоб кожен учень чи здобувач освіти мав належну підготовку, добре володів навчальним матеріалом та навичками розв'язування задач, зміст яких пов'язаний з даною темою.

Алгебраїчні задачі на обчислення кількості способів відіграють важливу роль у підготовці учнів і здобувачів освіти. В них істотно розширюються уявлення про множини, формуються знання про явища і процеси в оточуючому світі, розвивається логічне мислення, уява, пам'ять та творчі здібності.

Комбінаторні задачі можна сформулювати на дуже вузькій понятійній базі. Більше того, значну їх кількість можна подати у привабливому сюжетному оформленні. Крім того, навіть найабстрактніші і найскладніші з них, як правило піддаються адаптації і розумінню.

З даної теми проводиться значна робота, нагромаджено певний досвід. Відомо, що у вивченні курсу математики використання тестових завдань, які містять в собі варійовані за рівнем знань завдання, відкриває широке поле діяльності вчителя і викладача для реалізації цієї проблеми. Вправи, що складають рівневі завдання, є інструментом формування математичних понять, розвитку мислення учнів і здобувачів освіти, їх самостійності, засобом контролю якості та глибини засвоєння предмету. Вони сприяють зменшенню формалізму в знаннях вихованців.

Відомо, що кожному етапу засвоєння знань відповідає певний вид навчальної діяльності. Тому вчитель і викладач мають знати, які завдання слід розв'язувати на різних етапах засвоєння навчального матеріалу. Ось чому постає необхідність виділення рівнів, через які повинен пройти кожен учень в процесі формування знань з комбінаторики.

У даному посібнику підібрано відповідні рівневі дидактичні завдання з комбінаторики. Адже у математиці задачі відіграють важливу роль. Історія свідчить, що математика як наука виникла і розвивається в основному для розв'язування задач. Найдавніші єгипетські математичні папіруси – це збірки задач. У них не має яких-небудь загальних правил, а є тільки розв'язання деяких задач на обчислення. Задачі стимулювали не лише виникнення, а й подальший розвиток математичної науки. Основну роль, звичайно, відігравали задачі, поставленні життям. Як відомо, комбінаторні поняття та методи широко використовуються в сучасному природознавстві як теоретична основа для обробки результатів спостережень у фізиці, механіці, астрономії, геодезії, біології, обчислювальній математиці та інших галузях.

Розробленні дидактичні матеріали допоможуть вчителям і викладачам математики успішно здійснювати рівневе навчання учнів і здобувачів освіти, розглядаючи комбінаторику і при цьому користуватися критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів з математики за 12-бальною шкалою.

При розробці дидактичних рівневих завдань за основу брали розділ „Елементи комбінаторики" діючих підручників. У відповідності до цього розділу запропоновано задачі по певних параграфах.

До кожного параграфа ми підібрали значну кількість завдань чотирьох рівнів складності. При підборі задач ми користувалися критеріями оцінювання навчальних досягнень учнів з математики, розробленими Міністерством освіти і науки України. Згідно з цими критеріями на **початковому** рівні учень може:

— розпізнати один із кількох запропонованих математичних об'єктів (символів, виразів, геометричних фігур тощо), виділивши його серед інших;

— прочитати і записати числа, переписати даний математичний вираз, формулу;

— зобразити найпростіші геометричні фігури (намалювати ескіз);

— виконати однокрокові дії з числами, найпростішими математичними виразами;

— впізнати окремі математичні об'єкти і пояснити свій вибір;

— співвіднести дані або словесно описані математичні об'єкти і пояснити свій вибір;

— з допомогою вчителя виконати елементарні завдання.

Підібрані нами завдання для цього рівня дають можливість учню проявити вище названі якості. Наприклад, розв'язавши задачу *"Нехай А – множина коренів рівняння х – 2 = 0. Які з поданих нижче записів вірні:*

а) -3 $\in A$;

б) -4 $\notin A$;

в) 2 $\in A$;

г) 5 $\in A$?", учень показує, що він може розв'язати просте лінійне рівняння з однією змінною на один крок і знає позначення належності чи неналежності елемента множині, зокрема із чотирьох запропонованих варіантів може вибрати вірні.

Завдання **другого (середнього)** рівня складені з урахуванням того, що навчаючись на цьому рівні учень може:

— відтворити означення математичних понять і формулювання тверджень;

— назвати елементи математичних об'єктів;

— виконати за зразком елементарні завдання;

— відтворювати інформацію, операцію, дію в тому вигляді і в тій послідовності, як вони подавались у процесі навчання, а також в процесі відповіді він може допускати окремі видозміни навчальної інформації, наводити власні приклади;

— записати математичний вираз, формулу за словесним формулюванням і навпаки.

Вміючи розв'язати задачу №1 §1."Наведіть приклади множин, які:

а) задані за допомогою характеристичної властивості;

б) переліком елементів.", учень демонструє свої знання про способи задання множин, вміння записати множину у відповідності до цього, самостійно навести приклади.

Завдання для **третього** рівня підібрані таким чином, щоб при їх розв'язанні учень міг показати:

— вміння застосовувати означення математичних понять та їх властивості для розв'язання завдань в знайомих або змінених ситуаціях;

— знання залежності між елементами математичних об'єктів;

— вільно володіє визначеним навчальною програмою матеріалом;

— аргументує, обґрунтовує з достатнім поясненням математичні твердження.

Наприклад, розв'язуючи задачу *"Скільки тризначних чисел можна скласти з цифр 0,1,2,3,4,5, якщо:*

а) жодна цифра не повторюється більше одного разу;

б) цифри можуть повторюватись;

в) числа повинні бути непарними (цифри можуть повторюватись)?", учень показує своє вміння застосувати правило множення в різних ситуаціях, аргументуючи все поясненням.

В **четвертий (високий)** рівень включено задачі, умови яких безпосередньо не відповідають означенням і теоремам. Для розв'язання цих задач потрібні: глибокий аналіз, виведення наслідків з умов, обрання найбільш раціонального способу розв'язання.

При підборі задач високого рівня ми враховували те, що на цьому рівні учень може:

— усвідомити нові для нього математичні факти, ідеї, використовувати набуті знання і вміння в незнайомих для нього ситуаціях;

— виявити варіативність мислення і раціональність у виборі способу розв'язання математичної проблеми у межах вимог навчальної проблеми;

— розв'язувати нестандартні задачі у межах вимог навчальної програми.

Розв'язавши задачу *„Скільки чисел серед першої сотні натуральних чисел не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 4?"***,** учень показує, що він вміє виділити множину чисел, що не більші віл 100 і діляться на 2; 3; 4; 2 і 3; 3 і 4; 2 і 4; 2, 3 і 4. Користуючись правилом добутку, підрахувати кількість чисел в цих множинах, а також застосовувати правило додавання для трьох множин, при умові, що вони мають спільні елементи.

Підготовленні нами завдання класифіковані по рівнях складності, охоплюють весь теоретичний матеріал, деякі із задач складаються з декількох пунктів і вчитель (викладач) може, в залежності від математичної підготовки класу (групи) в цілому, вибирати потрібні задачі для розв'язання.

Для учнів, які прагнуть вивчити комбінаторику на поглибленому рівні ми підготували задачі на перестановки, розміщення комбінації з повтореннями елементів.

У закладах фахової передвищої освіти продовжують вивчати, передбачений програмою, навчальний матеріал з математики для 10-11 кл., то відповідно до цього засвоєння навчального матеріалу і навчальна діяльність мають різнорівневий характер. Об'єктом оцінювання залишаються знання, уміння та навички, досвід творчої діяльності здобувачів освіти. На **початковому** рівні здобувач освіти в результаті вивчення навчального матеріалу може назвати математичні об'єкти, але тільки в тому випадку, коли цей об'єкт запропоновано йому безпосередньо. Він може:

1) впізнати і ствердно відповісти на запитання, чи є пред'явлений йому об'єкт тим, про який йдеться;
2) розпізнати з-поміж інших математичних об'єктів чи формул ті, про які йдеться у запитанні чи у завданні;
3) співвіднести показані математичні об'єкти за їх характеристиками або властивостями.

Здобувач освіти, який навчається на **середньому** рівні, може відтворити інформацію, операцію, дію, засвоєні ним в процесі навчання. На цьому рівні розрізняють відтворення:

1) буквальне, коли відтворює інформацію, операцію, дію в тому вигляді і в тій послідовності, як вони були представленні в процесі навчання;
2) реконструктивне, коли в процесі відповіді допускає окремі видозміни

навчальної інформації, наводить власні приклади.

На **достатньому** рівні здобувач повинен вміти виконувати математичні операції, загальна методика і послідовність яких йому знайомі, але зміст та умови виконання змінені.

Високий рівень передбачає наявність творчості, коли здобувач освіти здатний самостійно орієнтуватися в нових, незнайомих для нього ситуаціях, складати план дій і виконувати його, пропонувати нові способи розв'язання, тобто його навчальна діяльність носить дослідницький характер.

Подані задачі і вправи можуть бути включені також у тематичні перевірочні роботи, домашні завдання та використовуватися при опитуванні. Умови задач і вправ підібрані так, що кожен учень (здобувач освіти), який працює на даному рівні, впорається з ними. Запропонований нами навчально-методичний посібник дає змогу вчителям і викладачам математики об'єктивно оцінити навчальні досягнення кожного учня чи здобувача освіти за 12-ти бальною шкалою і швидко підібрати дидактичний матеріал для занять математики.

I. ДИДАКТИЧНІ РІВНЕВІ ЗАВДАННЯ

Завдання для учнів навчальних закладів загальної середньої освіти рівня стандарту

Тема 1. Поняття множини. Операції над множинами

I рівень

1. Наведіть приклади множин з навколишнього середовища.

2. Наведіть приклади числових множин.

3. Наведіть приклади множин геометричних фігур.

4. Як називають множину:

   а) квітів, які стоять у вазі;

   б) учнів, які навчаються разом;

   в) коней, що пасуться на галявині?

5. Як позначають множини:

   а) $\alpha, \beta, \gamma, \psi, \ldots$;

   б) $A, B, C, \ldots$;

   в) $a, в, c, \ldots$?

6. Яким словом можна замінити слово „множина" ?

7. Назвіть будь-яких два, три елементи множини:

   а) учнів вашого класу;

   б) місяців року;

   в) міст нашої країни.

8. Визначте, які з наведених множин нескінченні:

   а) множина учнів вашої школи;

   б) множина міст земної кулі;

   в) множина міст України;

   г) множина натуральних чисел;

   д) множина днів у квітні;

   е) множина непарних чисел.

9. Виберіть із запропонованих нижче множин скінченні множини:

   а) $A = \{5; 4\}$;

   б) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

в) N – множина натуральних чисел.

10. Запишіть всі підмножини множини E = {5, 13, 17}.

11. Проілюструйте множини $C = A \cup B$, $E = A \cap B$, $H = A \setminus B$ за допомогою схем Ейлера-Вена.

12. Вкажіть серед вказаних нижче множин порожню множину:

а) множина коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$;

б) множина трикутників, площа яких дорівнює 10;

в) множина коренів рівняння $x = x + 1{,}3$.

II рівень

1. Наведіть приклади множин, які:

а) задані за допомогою характеристичної властивості;

б) переліком елементів.

2. Зобразіть за допомогою схем Ейлера-Вена наступні включення:

$N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

3. Задано множини:

а) C – множина учнів вашої школи;

б) A – множина учнів України;

в) B – множина учнів вашого класу;

г) K – множина учнів країн земної кулі.

Випишіть літери, що позначають вказані множини, в такому порядку, що кожна наступна літера позначає підмножину попередньої множини.

4. Чи є рівними множини A = {-1, 0, 1} і $B = \{x \mid 3x(x-1)(x+1) = 0\}$?

5. Нехай A – множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$. Які із поданих нижче записів вірні:

а) $-5 \in A$;

б) $6 \notin A$;

в) $2 \in A$;

г) $3 \notin A$?

6. Запишіть декілька елементів кожної множини:

а) $A = \{x \mid 0 \le x \le 1\}$;

б) $B = \{x \mid x = 3k^2 + 1$, де k – ціле число$\}$;

в) P – множина простих чисел.

7. Вкажіть серед вказаних нижче множин порожню множину:

а) множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$;

б) множина коренів рівняння $x^2 + 4x + 6 = 0$;

в) множина кіл, в яких діаметр менший від радіуса.

III рівень

1. Запишіть множини, перелічивши їх елементи:

а) розв'язки рівняння $f'(x) + 3 = x$, де $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$;

б) розв'язки рівняння $\dfrac{x-2}{x+2} = \dfrac{7}{2x-7}$;

в) $M = \{x \mid \dfrac{x^2 - 5x + 6}{25(x-2)} = 0\}$.

2. Запишіть всі підмножини множини $M = \{a, b, c, 1, 0\}$.

3. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 3, B – множина парних чисел і C – множина чисел, більших за 50. Які з чисел -6; -3; 12; 27; -39; -48; 54; -51; 61; 63; 0 входять у множину $(A \cap B) \setminus C$?

4. Задано множини:

а) множина A всіх трапецій;

б) множина B всіх прямокутників;

в) множина C всіх чотирикутників;

г) множина D всіх квадратів;

д) множина H всіх паралелограмів;

е) множина F всіх многокутників.

Запишіть за допомогою знаку $\subset$ ці множини в такому порядку, що кожна наступна множина була б підмножиною попередньої.

5. Доведіть, якщо $B \subset A$, то $A \cap B = B$ і $A \cup B = A$.

6. Для даних множин A, B, C знайдіть $A \cap B \cap C$ та $A \cup B \cup C$:

а) $A=[-2; 2]$, $B=(-\infty; 0)$, $C=[0; 5)$;

б) $A=(2; 10)$, $B=(3; 9)$, $C=(4; 8)$;

в) $A=(-5; 8)$, $B=(-2; 10)$, $C=(0; 13)$;

г) $A=(-\infty; 4]$, $B=[4; +\infty)$, $C=(0; 4)$.

IV рівень

1. Основна формула, яку використовують при знаходженні кількості елементів суми двох множин, така: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, де $N(A)$ і $N(B)$ – кількість елементів множин A і B відповідно. Використовуючи дану формулу, знайдіть $N(A \cup B \cup C)$.
2. В класі 35 учнів. Із них 20 учнів відвідують математичний гурток, 11 учнів – фізичний гурток, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують і математичний, і фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують тільки математичний гурток?
3. Із 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, всі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?
4. Нехай U – множина учнів 9 класу ($n(U)=40$), A – множина учнів, які займаються в математичному гуртку ($n(A)=32$), B – множина учнів, які займаються в спортивній секції ($n(B)=21$), $A \cap B$ – множина учнів, які займаються в математичному гуртку і в спортивній секції ($n(A \cap B)=15$). Зобразіть кожну із множин за допомогою діаграм Ейлера-Вена. Кожній із утворених діаграм поставте у відповідність число – кількість елементів множини, зображеної діаграмою.
5. Знайдіть множину всіх доданків, які можна одержати після розкриття дужок у виразі: (a+1) (b+1) (c+1) (d+1) (t+1).

Тема 2. Перестановки, розміщення, комбінації без повторень елементів
І рівень

1. Чи рівні множини A={1, 2, 7} і B={2, 7,1}, якщо вони:

   а) не впорядковані;

   б) впорядковані ?

2. Продовжіть висловлення „Факторіал – це ...”

   а) сума послідовних натуральних чисел;

   б) добуток послідовних натуральних чисел;

   в) різниця послідовних натуральних чисел.

3. Випишіть усі перестановки, які можна утворити з множини A={1, 2, 3}.

4. Обчисліть $n!$, якщо n =1, 2, 3, 4, 5.

5. Скількома способами можна розмістити 4 книжки на полиці ?

6. Скількома способами читач у бібліотеці може вибрати 3 книги із 5 запропонованих ?

7. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 3, 5, 7 таких, що кожна з цифр повторюється не більше ніж один раз?

8. Як позначається кількість усіх можливих перестановок п’яти елементів:

   а) P_5;

   б) A_5;

   в) C_5?

9. Як позначається кількість усіх можливих розміщень з 3 елементів по 7 елементів:

   а) A_3^7;

   б) C_7^3;

   в) A_7^3;

   г) P_7?

10. Як позначається кількість усіх можливих комбінацій з 2 елементів по 8 елементів:

   а) A_8^2;

   б) C_8^2;

в) C_2^8;

г) A_2^8?

11. Порівняйте числа:

а) 3! і 2!;

б) 5! і 6!;

в) 0! і 1!;

г) 8! і 8!;

д) 7! і 15!.

12. Запишіть формули для обчислення:

а) P_8;

б) A_5^2;

в) C_6^4.

13. Як позначається:

а) перестановка з n елементів;

б) розміщення з n елементів по m;

в) комбінація з m елементів по n?

14. Запишіть вирази за допомогою знака факторіала:

а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$;

б) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7$;

г) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10$.

15. Які з рівностей правильні:

а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$;

б) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$;

г) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$;

д) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$?

16. Поставте замість * множник:

а) $1 \cdot 2 \cdot * \cdot 4 = 4!$;

б) $3 \cdot 2 \cdot * = 3!$;

в) $*\cdot 2\cdot 3\cdot *\cdot 5=5!$;

г) $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot *=6!$.

II рівень

1. Скількома способами можна скласти прапор, який містив би три горизонтальні смуги різних кольорів з п’ять різних кольорів?
2. Скількома способами можна скласти чотирьохкольоровий прапор із вертикальних смуг, маючи чотири різних кольори?
3. Скількома способами можна вибрати з 12 осіб делегацію в складі 4 осіб?
4. Скількома способами можна призначити 4 вартових із 30 солдатів?
5. Обчисліть:

   а) $\frac{102!}{100!}$;

   б) $\frac{5!-3!}{2!}$;

   в) 10!-7!;

   г) 3!+4!;

   д) 5!-25.
6. Порівняйте числа:

   а) 4!-3! і 4;

   б) 2!+3! і 5;

   в) 8!+1! і 9!;

   г) 1!-3! і 0;

   д) 3! і 2!+2.
7. Спростіть:

   а) $\frac{5!}{3!}$;

   б) $\frac{101!}{1!}$;

   в) $\frac{2+3!}{2}$;

   г) $8+\frac{6!}{5!}$;

д) $4!+\frac{4!}{2!}$.

8. Чи можна ділити на 0! ?

9. Скільки треба взяти елементів, щоб число всіх перестановок, утворюваних з них, дорівнювало 24?

10. Які з рівностей правильні:

а) $2\cdot3\cdot4\cdot5=5!$;

б) $8\cdot4\cdot5=5!$;

в) $5\cdot4\cdot6\cdot1=5!$;

г) $2\cdot4\cdot3\cdot1\cdot5=5!$;

д) $5\cdot4\cdot3\cdot1=5!$?

III рівень

1. Розв’яжіть рівняння:

а) $A_x^{x-3}=xP_{x-2}$;

б) $\frac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43$;

в) $A_7^x=4A_7^{x-1}$;

г) $A_x^2=42$ (де x – натуральне число, яке не менше 2);

д) $C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15(x-1)$;

е) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

є) $C_{x+2}^4=x^2-1$;

ж) $\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{12x!}{(x-2)!}$.

2. 7 книг різних авторів і трьохтомник одного з них розташовані на книжковій полиці. Скількома способами можна розставити на полиці ці 10 книжок так, щоб книги автора трьохтомника стояли поруч?

3. У одного чоловіка є 11 книжок, а у другого – 15 книжок з математики. Скількома способами вони можуть вибрати по три книжки для обміну? Скількома способами можна здійснити цей обмін?

4. На зборах мають виступити 5 чоловік: *А*, *Б*, *В*, *Г*, *Д*. Скількома способами їх можна розташувати у списку промовців, якщо:

   а) *Б* не повинен виступати перед *А*;

   б) *Б* мусить виступати відразу за *А*?

5. Скільки шестизначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,...,9, якщо кожне число повинно складатися з трьох парних та трьох непарних цифр, причому ніякі дві цифри у ньому не повторюються?

6. В кімнаті 12 лампочок. Скільки всього різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно 5 лампочок? Скільки всього може бути різних способів освітлення кімнати?

7. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні і непарні?

8. Спростіть вирази:

   а) $\frac{7!}{5!}+\frac{(n+1)!}{n!}$;

   б) $\frac{12!}{10!}-\frac{n!}{(n-2)!}$;

   в) $\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{5!}{6!}$;

   г) $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}$;

   д) $\frac{(n-2)!}{n!}$.

IV рівень

1. У кошику 15 слив і 12 груш. Іван вибирає або сливу, або грушу, після чого Валентина вибирає з фруктів, що залишилися, і сливу, і грушу. Скільки можливостей таких виборів? За якого вибору Івана Валентина має більше можливостей вибору?

2. Для премій на міській олімпіаді виділено 5 примірників однієї книги, 3 примірники другої книги та 7 примірників третьої книги. Скількома способами можна розділити ці премії між 25 учасниками , якщо кожному вручають не більше однієї книги?

3. Скільки чисел серед першої сотні натуральних чисел не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 4?
4. В 11 класі спортивної школи є група гімнастів, що складається з 9 чоловік і група акробатів на батуті, що складається з 4 чоловік. Для змагання із іншою школою потрібно скласти команду з 5 чоловік, в яку б входив хоч би один акробат на батуті. Скількома способами це можна зробити?
5. Учень має по одній монеті в 1 коп., 2 коп., 5 коп., 10 коп., 25 коп. Скількома способами він може ці монети розкласти в 2 кишені?
6. Розв'яжіть рівняння: $\frac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$.

Тема 3. Біном Ньютона
І рівень

1. Запишіть формулу для обчислення $(a+b)^2$ і $(a+b)^3$, використовуючи біном Ньютона.
2. Скільки доданків міститься в розкладі $(a+b)^n$?
3. Чи вірне твердження: „Сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^n у розкладі $(a+b)^n$ ”?
4. Чи вірне твердження: „В розкладі $(a+b)^n$ сума показників степенів a і b в кожному члені стала і дорівнює 2^n”?
5. Зобразіть трикутник Паскаля, який складається з 6 рядків.
6. Обчисліть суму членів 1, 2, 3, 4, 5, 6 рядків трикутника Паскаля.
7. Що ви можете сказати про коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу в трикутнику Паскаля?
8. Використовуючи трикутник Паскаля, запишіть розклад:

   а) $(2+y)^4$;

   б) $(1+x)^5$.
9. Використовуючи формулу загального члена розкладу $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ степеня бінома $(1+x)^4$, знайдіть:

   а) T_1;

б) T_4;

в) T_8.

10. Розв’яжіть рівняння: $C_x^8 = C_x^2$.

11. Обчисліть $(3+y)^5 + (2+y)^4$.

12. Знайдіть суму біноміальних коефіцієнтів $C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k$, якщо k=2, 3, 4.

II рівень

1. Піднесіть до четвертого степеня двочлен $(x-2y)$.

2. Знайдіть 7-й член розкладу бінома $\left(\sqrt[4]{3} + \sqrt{2}\right)^{10}$.

3. Розкладіть вираз $\left(1+\sqrt{3}\right)^4$ за формулою бінома Ньютона і спростіть його.

4. Знайдіть номер члена розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x} + \frac{1}{x}\right)^{16}$, який не містить x.

5. Знайдіть наближене значення степеня $0{,}97^4$, скориставшись тим, що $0{,}97 = 1 - 0{,}03$.

6. Зобразіть трикутник Паскаля, який складається з 9 рядків.

7. Розв’яжіть рівняння:

а) $C_x^{10} = C_x^2$;

б) $C_{14}^x = C_{14}^6$.

III рівень

1. Знайдіть показник степеня бінома $(a+b)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу дорівнює 120.

2. Знайдіть значення показника n у розкладі бінома $(x+y)^n$, якщо біноміальні коефіцієнти п’ятого і дев’ятого членів рівні між собою.

3. У розкладі степеня бінома $\left(x^2y + xy^2\right)^8$ знайдіть доданок, що містить:

а) $x^{11}y^{13}$;

б) $x^{15}y^9$.

4. У розкладі $\left(2x^2 - \frac{a}{2x^3}\right)^{10}$ знайдіть член, який не містить x.

5. Знайдіть сьомий член розкладу бінома $\left(a^2\sqrt{a}+\frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу дорівнює 36.

6. У розкладі бінома $\left(\sqrt[3]{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$ п’ятий член розкладу не залежить від x. Знайдіть n.

IV рівень

1. Розв’яжіть рівняння: $\frac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\frac{24}{23}$.

2. Що більше $99^{50}+100^{50}$ чи 101^{50} ?

3. У розкладі бінома $\left(a\sqrt[3]{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^m$ знайдіть член, який після спрощення має a^6, якщо різниця коефіцієнтів третього і другого членів дорівнює 35.

4. Коефіцієнт третього члена від кінця в розкладі бінома $\left(\sqrt[4]{z-1}+\sqrt[3]{z^2}\right)^n$ дорівнює 45. Знайдіть член цього розкладу, що містить z^4.

5. Знайдіть всі раціональні члени розкладу $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{10}$.

Завдання для учнів ліцеїв з поглибленим вивченням математики

Тема 1. Основні поняття теорії множин

І рівень

1. Наведіть приклади числових множин, множин геометричних фігур і множин з навколишнього середовища.
2. Наведіть приклади множин, які:
   а) задані за допомогою характеристичної властивості;
   б) переліком елементів.
3. Назвіть будь-яких чотири елементи множини:
   а) раціональних чисел;
   б) ірраціональних чисел.
4. Визначте, які з наведених множин нескінченні:
   а) множина зірок на небі;
   б) множина річок на земній кулі;
   в) множина натуральних чисел;
   г) множина коренів рівняння $x^2 - 25 = 0$;
   д) множина непарних чисел.
5. Запишіть всі підмножини множини $A = \{2, 4, 6, 8\}$.
6. Відомо, що $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 8, 10\}$. Які із поданих нижче записів вірні:
   а) $A \setminus B=\{2, 4, 6, 1, 3, 5\}$;
   б) $A \setminus B=\{1, 3, 5\}$;
   в) $A \setminus B=\{2, 4, 6\}$;
   г) $A \setminus B=\{8, 10\}$?
7. Відомо, що $A = \{2, 4, 6, 8, 10\}$, $B = \{1, 3, 5, 8, 10\}$. Які із поданих нижче записів вірні:
   а) $A \cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10\}$;
   б) $A \cup B=\{1, 3, 5\}$;
   в) $A \cup B=\{2, 4, 6\}$;
   г) $A \cup B=\{8, 10\}$?

8. Відомо, що A = {2, 4, 6, 8, 10}, B = {1, 3, 5, 8, 10}. Які із поданих нижче записів вірні:

а) $A \cap B$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10};

б) $A \cap B$={1, 3, 5};

в) $A \cap B$={2, 4, 6};

г) $A \cap B$={8, 10}?

9. Нехай A – множина коренів рівняння $x^3 - x = 0$. Які із поданих нижче записів вірні:

а) -3 $\in A$;

б) -1 $\notin A$;

в) 0 $\in A$;

г) 1 $\in A$?

10. Зобразіть за допомогою схем Ейлера-Вена наступні включення:

$N \subset Z$, $Z \subset Q$, $Q \subset R$.

11. Вкажіть серед вказаних нижче множин порожню множину:

а) множина коренів рівняння $x^2 - 5x + 6 = 0$;

б) множина коренів рівняння $x^2 + 4x - 6 = 0$;

в) множина кіл, в яких діаметр менший від радіуса.

12. Чи є рівними множини A = {-1, 0, 1} і B = { x | $3x(x^2 - 1) = 0$ }?

ІІ рівень

1. Чи вірне твердження: „Порожня множина є підмножиною будь-якої множини"?

2. Запишіть всі підмножини множини M = {a, b, c, 1, 0}.

3. Задано множини:

а) множина A всіх трапецій;

б) множина B всіх прямокутників;

в) множина C всіх чотирикутників;

г) множина D всіх квадратів;

д) множина H всіх паралелограмів;

е) множина F всіх многокутників.

Запишіть за допомогою знаку $\subset$ ці множини в такому порядку, що кожна наступна множина була б підмножиною попередньої.

4. Нехай A – множина коренів рівняння $x^4 - 5x^2 + 6 = 0$. Які із поданих нижче записів вірні:

а) $\sqrt{2} \in A$;

б) $-\sqrt{2} \notin A$;

в) $2 \in A$;

г) $3 \notin A$?

5. Запишіть декілька елементів кожної множини:

а) $A = \{x \mid 0 \le x \le \pi\}$;

б) $B = \{x \mid x = 4k^2 - 2$, де k – ціле число$\}$;

в) P – множина простих чисел більших за 4 і менших за 50.

6. Для даних множин A, B, C знайдіть $A \cap B \cap C$ та $A \cup B \cup C$:

а) $A=[-2; 2]$, $B=(-\infty; 0)$, $C=[0; 5)$;

б) $A=(2; 10)$, $B=(3; 9)$, $C=(4; 8)$;

в) $A=(-5; 8)$, $B=(-2; 10)$, $C=(0; 13)$;

г) $A=(-\infty; 4]$, $B=[4; +\infty)$, $C=(0; 4)$.

7. Доведіть:

а) $A \setminus A = \varnothing$;

б) $A \setminus \varnothing = A$.

III рівень

1. Запишіть множини, перелічивши їх елементи:

а) розв’язки рівняння $f'(x) + 3 = x$, де $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$;

б) $M = \{x \mid |x-1|+|x-2| > x+3\}$.

2. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 3, B – множина парних чисел і C – множина чисел, більших за 50. Які з чисел -6; -3; 12; 27; -39; -48; 54; -51; 61; 63; 0 входять у множину $(A \cap B) \setminus C$?

3. Нехай A – множина коренів рівняння $\sqrt{5x-1}-\sqrt{3x-2}=\sqrt{2x+1}$, B – множина коренів рівняння $x^2-3x+2=0$, C – множина коренів рівняння $2x-x^2=0$. Знайдіть елементи множини H, де:

   а) $H=A\cup B\cup C$;

   б) $H=(A\cup B)\setminus C$;

   в) $H=(B\cap C)\cup A$.

4. Нехай U – множина учнів 11 класу ($n(U)=40$), A – множина учнів, які займаються в математичному гуртку ($n(A)=32$), B – множина учнів, які займаються в спортивній секції ($n(B)=21$), $A\cap B$ – множина учнів, які займаються в математичному гуртку і в спортивній секції ($n(A\cap B)=15$). Зобразіть кожну із множин за допомогою діаграм Ейлера-Вена. Кожній із утворених діаграм поставте у відповідність число – кількість елементів множини, зображеної діаграмою.

5. В класі 35 учнів. Із них 20 учнів відвідують математичний гурток, 11 учнів – фізичний гурток, 10 учнів не відвідують жодного з цих гуртків. Скільки учнів відвідують і математичний, і фізичний гуртки? Скільки учнів відвідують тільки математичний гурток?

6. Із 100 студентів англійську мову знають 28 студентів, німецьку – 30, французьку – 42, англійську і німецьку – 8, англійську і французьку – 10, німецьку і французьку – 5, всі три мови знають 3 студенти. Скільки студентів не знають жодної з трьох мов?

IV рівень

1. Основна формула, яку використовують при знаходженні кількості елементів суми двох множин, така: $N(A \cup B) = N(A) + N(B) - N(A \cap B)$, де $N(A)$ і

N(B) – кількість елементів множин A і B відповідно. Використовуючи дану формулу, знайдіть N($A\cap B\cap C$).

2. Кожний студент групи вивчав принаймні одну з іноземних мов – англійську, німецьку, французьку (*А*, *Н*, *Ф*). Варіанти кількостей осіб, що вивчали *А*, *Н*, *Ф*, *А* і *Н*, *А* і *Ф*, *Н* і *Ф*, а також всі три мови, подано таблицею. Обчислити кількість:

- студентів групи;
- тих, хто вивчав лише *А*;
- тих, хто вивчав лише *Н*;
- тих, хто вивчав лише *Ф*;
- тих, хто вивчав рівно одну мову.

Варіант, №	***А***	***Н***	***Ф***	***А* і *Н***	***А* і *Ф***	***Н і Ф***	***А* , *Н* і *Ф***
1	15	12	10	7	6	5	3
2	14	13	12	6	5	4	2
3	14	11	13	8	5	4	3
4	13	14	12	7	4	2	1
5	15	14	13	8	5	5	2
6	17	15	13	7	6	4	1
7	16	16	15	6	7	5	2
8	12	14	11	7	4	6	1
9	16	12	10	8	7	6	3
10	17	11	7	7	6	3	2
11	15	13	14	6	4	4	1
12	14	12	13	7	5	5	2
13	16	15	14	9	7	5	3
14	16	13	10	7	6	3	1
15	15	15	11	10	6	3	2

3. У групі 25 студентів, які під час попереднього навчання у школі вивчали мови програмування – Паскаль, Сі, Бейсік (*П*, *С*, *Б*). Варіанти кількостей осіб, що вивчали *П*, *С*, *Б*, *П* і *С*, *П* і *Б*, *С* і *Б*, а також всі три мови, подано таблицею. Обчислити кількість студентів, що:

   - не вивчали жодної з мов;
   - вивчали рівно одну мову.

Варіант, №	***П***	***С***	***Б***	***П* і *С***	***П* і *Б***	***С* і *Б***	***П*, *С* і *Б***
1	15	12	10	7	6	5	3
2	14	12	10	6	5	4	2
3	14	11	13	8	5	4	1
4	10	9	8	5	4	2	3
5	12	10	11	7	5	4	4
6	13	11	9	5	6	4	2
7	11	11	10	5	6	4	3
8	12	14	11	7	4	6	3
9	16	12	10	8	5	3	3
10	13	10	7	7	5	4	3
11	12	9	10	6	4	4	4
12	14	12	13	7	5	5	1
13	16	15	14	9	7	5	1
14	14	13	9	7	6	3	4
15	15	15	9	10	6	3	3

4. Знайдіть множину всіх доданків, які можна одержати після розкриття дужок у виразі: (a+1) (b+1) (c+1) (d+1) (t+1).
5. Нехай A – множина коренів рівняння $x^4 - 2x^3 + x^2 = 0$, B – множина дійсних коренів рівняння $5x^4 + 9x^3 - 2x^2 - 4x - 8 = 0$. Знайдіть елементи, що належать множинам $A \backslash B$, $A \cup B$, $A \cap B$.

Тема 2. Основні правила комбінаторики
І рівень

1. Чи вірно записано правило суми в тому випадку, коли множини не мають спільних елементів:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$, де $n(A)$ – кількість елементів множини A

$n(B)$ – кількість елементів множини B?

2. Множини A і B мають спільні елементи. Використовуючи для цих множин правило суми, вкажіть вірний запис цього правила:

   а) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) + n(A \cup B)$;

   б) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cup B)$;

   в) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

3. Дано твердження: „Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b – n способами, то вибір пари a і b можна здійснити $(m \cdot n)$ способами ”. Для якого правила сформульоване це твердження :

   а) правила суми;

   б) правила добутку;

   в) жоден з варіантів не підходить?

4. Якщо елемент a можна вибрати m способами, а елемент b – n способами, то скількома способами можна здійснити вибір a або b:

   а) $(m - n)$ способами;

   б) $(m \cdot n)$ способами;

   в) $(m + n)$ способами?

5. У двох учнів Олі та Миколи виникла потреба поділити між собою 2 книжки. Скількома різними способами вони можуть це з робити:

   а) 1;

   б) 2;

   в) 3 ?

6. Скількома способами можна розмістити 4 спортсменів на лаві перед гімнастичним снарядом:

   а) 24;

б) 25;

в) 26 ?

7. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3:

а) 6;

б) 8;

в) 9 ?

8. Скільки двоцифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3 таких, що кожна з цифр повторюється не більше ніж один раз:

а) 6;

б) 5;

в) 4 ?

9. Нехай нам треба виконати одну за одною 4 дії. Якщо першу дію можна виконати 2 способами, другу дію – 3 способами, третю дію – 4 способами, четверту дію – 1 способом, то скількома способами можна виконати всі дії?

10. Множина A містить 2 елементи, а множина B – 4 елементи і множини не мають між собою спільних елементів. Знайдіть кількість елементів, що належать об'єднанню множин $A \cup B$.

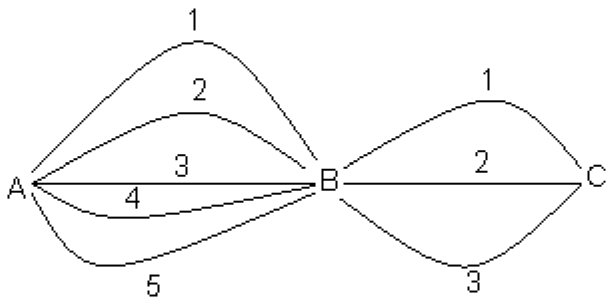
11. У класі 10 хлопців і 5 дівчат. Скількома способами можна вибрати одного учня цього класу?

12. У шкільній бібліотеці є 10 томів творів Т. Шевченка і 8 томів творів Л.Українки. Позначимо A - множина томів творів Т. Шевченка, $n(A)=10$; B – множина томів творів Л.Українки, $n(B)=8$. Чи можна стверджувати, що $A \cap B = \varnothing$? Поясніть свою відповідь.

II рівень

1. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5, якщо кожну з цифр можна використовувати не більше ніж один раз?
2. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 5?
3. Скількома способами можуть бути розподілені золота і срібна медалі між 6 командами?

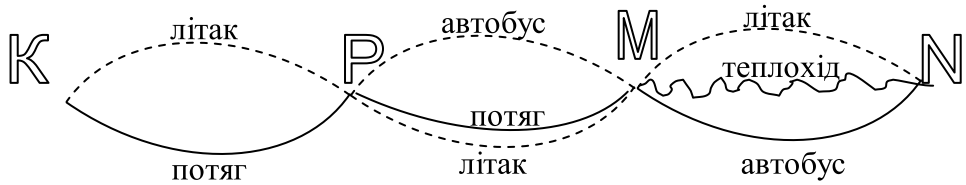
4. Припустимо, що потрібно сформувати команду космічного корабля з трьох осіб: командира, інженера та лікаря. На місце командира є 4 кандидати, на місце інженера – 3 кандидати, а на місце лікаря – 5 кандидатів. Скількома способами може бути сформована команда корабля ?
5. З міста *A* до *B* ведуть п'ять доріг, а з міста *B* до *C* – три. Скільки доріг, які проходять через *B*, ведуть з *A* до *C* ?



6. Для написання рефератів з математики вчитель запропонував учням 10 тем з геометрії і 15 тем з алгебри. Скількома способами перший учень може вибрати тему реферату ?
7. Скількома способами з літер слова „число" можна вибрати дві літери, одна з яких голосна, а друга – приголосна ?

III рівень

1. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні і непарні?
2. Скільки всього шестизначних парних чисел можна скласти із цифр 1, 3, 4, 5, 7, 9, якщо в кожному із цих чисел жодна цифра не повторюється ? Скільки непарних чисел можна скласти ?
3. Скількома способами можна здійснити подорож із пункту *K* до пункту *N* через пункти *P* і *M*?



4. В Англії прийнято давати дітям декілька різних імен. Скількома способами можна назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен, а загальне число імен дорівнює 300?
5. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 складено всі можливі п’ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, які:
   а) починаються цифрою 5;
   б) не починаються з цифри 3;
   в) починаються з 53;
   г) не починаються з 543 ?
6. Скільки є чотиризначних чисел, які діляться на 5?

IV рівень

1. Автомобільні номери складаються з однієї, двох або трьох літер і чотирьох цифр. Знайдіть число таких номерів, використовуючи 33 літери українського алфавіту.
2. З пункту A до пункту B є n доріг, з A до C є s доріг, з B до H – m доріг, з C до $Д$ – r доріг, з H до C – l доріг. Скількома способами можна потрапити з A в $Д$?
3. У кошику 12 яблук і 10 апельсинів. Іван вибирає або яблуко, або апельсин, після чого Надійка вибирає з фруктів, що залишилися, і яблуко, і апельсин. Скільки можливостей таких виборів? За якого вибору Івана Надійка має більше можливостей вибору?
4. Скільки чисел серед першої сотні натуральних чисел не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 4?
5. Про охоплення учнів гімназії спортивними секціями маємо такі відомості: всього учнів 600, з них відвідують секцію футболу 110 учнів, волейбольну секцію – 320 учнів, секцію легкої атлетики – 420 осіб; відвідують секцію волейболу і футболу – 120 учнів; футболу і легкої атлетики – 90 осіб;

волейболу і легкої атлетики – 140 вихованців, у трьох секціях займається 70 учнів. Знайдіть відсоток охоплення учнів гімназії спортивними секціями.

Тема 3. Перестановки, розміщення, комбінації без повторень елементів
І рівень

1. Випишіть усі перестановки, які можна утворити з елементів числової множини $B=\{2, 3, 4\}$.
2. Випишіть усі розміщення, які можна утворити з елементів числової множини $B=\{2, 3, 4\}$ по 2.
3. Випишіть усі комбінації, які можна утворити з елементів числової множини $B=\{2, 3, 4\}$ по 2.
4. Обчисліть $n!+1$, $2n!-2$ якщо $n=1, 2, 3, 4, 5$.
5. Скількома способами можна розподілити 7 значків між туристами (кожний турист одержує 1 значок)?
6. Скількома способами можна вибрати з 12 учнів класу чергових в складі 4 осіб?
7. На конкурс прислали 12 оповідань. Скількома способами за ці оповідання можна присудити три премії: 1-шу, 2-гу і 3-тю?
8. Чи може $n!$ приймати від'ємне значення?
9. Чи вірне твердження $0!=0$?
10. Спростіть:

а) $\frac{5!}{2!+3!}$;

б) $\frac{101!}{1!}$;

в) $\frac{2+3!}{2}$;

г) $11-\frac{9!}{8!}$;

д) $4!+\frac{4!}{2!}$.

11. Скільки треба взяти елементів, щоб число всіх перестановок, утворюваних з них, дорівнювало 120?

12. Обчисліть:

а) $P_6 - A_6^3$;

б) $A_3^2 + A_4^2$;

в) $P_3 \cdot P_2$;

г) $\frac{A_5^2}{P_2} + \frac{A_{10}^5}{7P_5}$.

13. Порівняйте числа:

а) 5!+8 і 6! – 3;

б) 7!+1! і 8!;

в) 0! і 1!;

г) 3!+2! і 2!+3;

д) $\frac{5!}{3!}$ і $\frac{6!}{4!}$.

14. Запишіть вирази за допомогою знака факторіала:

а) $3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4 \cdot 5$;

б) $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 9$;

в) $7 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 6 \cdot 1$;

г) $1 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 9 \cdot 2 \cdot 8 \cdot 6 \cdot 10$.

15. Поставте замість * множник:

а) $1 \cdot * \cdot * \cdot 4 = 4!$;

б) $3 \cdot 2 \cdot * = 3!$;

в) $* \cdot 2 \cdot 3 \cdot * \cdot 5 \cdot 6 = 6!$;

г) $1 \cdot 2 \cdot * \cdot 4 \cdot 5 \cdot * \cdot 7 = 7!$.

16. Які з рівностей правильні:

а) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$;

б) $8 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$;

в) $5 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 1 = 5!$;

г) $2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 5!$;

д) $5\cdot4\cdot3\cdot1=5!$?

II рівень

1. Скількома способами можна із 10 осіб назначити:

   а) двох чергових з однаковими обов’язками;

   б) двох чергових, один із яких старший?

2. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 3, 7, 8, 9 таких, що кожна з цифр повторюється не більше ніж один раз?

3. Спростіть вирази:

   а) $\frac{7!}{5!}+\frac{(n+1)!}{n!}$;

   б) $\frac{12!}{10!}-\frac{n!}{(n-2)!}$;

   в) $\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{5!}{6!}$;

   г) $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}$;

   д) $\frac{(n-2)!}{n!}$.

4. Доведіть рівність: $C_6^0+C_6^1+C_6^2=C_6^4+C_6^5+C_6^6$.

5. Знайдіть всі натуральні числа *n*, які задовольняють умови:

   а) $C_n^{n-2}+2n=9$;

   б) $3C_{n+1}^2-2A_n^2=n$;

   в) $C_{n+1}^{n-1}=6$;

   г) $C_{n-1}^{n-2}=n^2-13$.

6. Обчисліть:

   а) $P_1\cdot A_2^1+P_2\cdot A_3^2+P_3\cdot A_4^3+P_4\cdot A_5^4-P_1\cdot P_2\cdot P_3\cdot P_4$;

   б) $\left(\frac{P_5}{A_5^4}+\frac{P_4}{A_5^3}+\frac{P_3}{A_5^2}+\frac{P_2}{A_5^1}\right)\cdot A_5^2$;

   в) $\frac{A_5^3-A_5^2}{P_2}+\frac{P_5}{P_2}$;

г) $\dfrac{\frac{1}{3}C_6^2-\frac{1}{28}C_8^3-\frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3\cdot A_5^3}$.

7. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні і парні?

8. З цифр 5,6,7,8,9 складено всі можливі п'ятизначні числа без повторення цифр. Скільки серед них таких, які:

   а) починаються цифрою 7;

   б) не починаються з цифри 9;

   в) починаються з 56;

   г) не починаються з 987 ?

9. Скількома способами можна вишикувати в колону по одному 6 учнів *А, Б, В, Г, Д, Е* так, щоб:

   а) колона починалася з учня *Д*;

   б) учень *В* мусить стояти відразу за *Б*?

10. В кімнаті 10 лампочок. Скільки всього різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно 6 лампочок? Скільки всього може бути різних способів освітлення кімнати?

III рівень

1. Розв'яжіть рівняння:

   а) $A_x^{x-3}=xP_{x-2}$;

   б) $\dfrac{A_x^5+A_x^3}{A_x^3}=43$;

   в) $A_7^x=4A_7^{x-1}$;

   г) $A_x^2=42$ (де x – натуральне число, яке не менше 2);

   д) $C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15(x-1)$;

   е) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

   є) $C_{x+2}^4=x^2-1$;

ж) $\dfrac{x!}{(x-4)!}=\dfrac{12x!}{(x-2)!}$.

2. Обчисліть: $\mathrm{F}=\dfrac{\mathrm{A}_{49}^{12}+A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}-\dfrac{\mathrm{A}_{17}^{10}+A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$.

3. Спростіть:

а) $\dfrac{P_{n+2}}{A_n^k\cdot P_{n-k}}+\dfrac{C_{15}^8+2C_{15}^9+C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}}$;

б) $\dfrac{n!}{(n-3)!A_n^2}-\dfrac{P_{n+1}}{(n+2)!}$;

в) $\dfrac{1}{n+2}\left(C_{n+3}^2-2C_{n+2}^3+C_{n+2}^2\right)+\dfrac{n^2-5n}{6}$.

4. Обчисліть суму $C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5$.

5. У одній автоколоні є 8 вантажних автомобілів, а у другій – 13 автобусів. Скількома способами вони можуть вибрати по чотири авто для обміну? Скількома способами можна здійснити цей обмін?
6. Скільки п'ятизначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,...,9, якщо кожне число повинно складатися з трьох парних та двох непарних цифр, причому ніякі дві цифри у ньому не повторюються?
7. Збори з 15 осіб обирають голову, заступника та секретаря, а також трьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?
8. Збори з 30 осіб обирають голову, секретаря та п'ятьох членів редакційної комісії. Скількома способами це можна зробити?

IV рівень

1. Для премій на міській олімпіаді виділено 5 примірників однієї книги, 3 примірники другої книги та 7 примірників третьої книги. Скількома способами можна розділити ці премії між 25 учасниками , якщо кожному вручають не більше однієї книги?
2. Скільки різних натуральних чисел можна утворити з цифр 0,2,4,6,8, якщо кожне число містить кожну з даних цифр не більше одного разу?

3. Із 7 бігунів і 3 стрибунів треба скласти команду з 5 чоловік, в яку б входив хоч би один стрибун. Скількома способами це можна зробити?

4. Скільки існує дільників числа 210?

5. У деякому царстві немає двох людей, які б мали однаковий набір зубів. Скільки людей мешкає там, якщо кількість зубів у мешканців утворює всю множину можливих варіантів?

6. Спростіть: $\dfrac{C_n^3 C_n^1}{(C_n^2)^2} + \dfrac{P_n P_{n+1}(n^2-n)^2}{4(C_n^2)^2(n!)^2}$.

Тема 4. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями елементів
І рівень

1. Дайте означення таким поняттям: розміщення, перестановки та комбінації з повторенням елементів.

2.Запишіть формули, які використовують для обчислення розміщень, перестановок та комбінацій з повторенням елементів.

3. Запишіть позначення розміщень з повтореннями елементів:

   а) з 4 по 6 ;

   б) з 3 по 2 ;

   в) з 8 по 5 ;

   г) з 10 по 7.

4. Запишіть позначення перестановок з повтореннями з елементів 2, 4, 6, в яких ці елементи зустрічаються відповідно 1, 3, 5 разів.

5. Запишіть позначення комбінацій з повтореннями елементів:

   а) з 10 по 20;

   б) з 16 по 4;

   в) з 8 по 12.

6. Виберіть із запропонованих нижче записів розміщення з повторенням з 5 елементів по 4:

   а) AA_5^4;

   б) CC_5^4;

в) AA_4^5;

г) PP_4^5

7. Виберіть із запропонованих нижче записів комбінації з повторенням з 4 елементів по 8:

а) C_4^8;

б) C_8^4;

в) CC_4^8;

г) CC_8^4.

8. Чи вірно проведено обчислення:

а) $AA_3^2 = 3^2 = 9$;

б) $AA_5^3 = 3^5 = 27$;

в) $CC_4^2 = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = \frac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$;

г) $CC_3^1 = C_4^1 = \frac{4!}{3!\cdot 1!} = 4$?

9. Випишіть декілька розміщень з повтореннями з елементів множини M={2, 4, 8} по 2.

10. Випишіть декілька комбінацій з повтореннями з елементів множини M={2, 4, 8} по 2.

11. Чи рівні числа 0! і AA_1^1?

12. Поставте замість зірочки число:

а) $PP_*(2,3) = \frac{5!}{2!\cdot 3!}$;

б) $CC_8^4 = C_{*+4-1}^4$;

в) $AA_5^4 = 5^*$.

II рівень

1.Обчисліть:

а) AA_3^2;

б) AA_3^3;

в) AA_4^2.

2.Обчисліть:

а) $PP_5(3,2)$;

б) $PP_6(1,1,4)$;

в) $PP_7(3,4)$.

3.Обчисліть:

а) CC_8^5;

б) CC_6^4;

в) CC_3^7.

4. Порівняйте:

а) AA_4^1 і AA_1^4;

б) CC_2^3 і CC_3^2;

в) PP_5 (2,3) і $PP_5(3,2)$.

5. Обчисліть значення виразу при n = 2, 3, 4 , m = 5.

а) AA_n^m;

б) CC_m^n;

в) $PP_m(2,2,1)$.

6. Поясніть відмінність між поняттям „кортеж” і „множина”.

7. Чи рівні числа:

а) 5! і AA_5^3;

б) 5!+5 і AA_5^3;

в) $PP_3(1,2)$ і 3!-3 ;

г) CC_3^4 і CC_4^3;

д) $PP_4(1,1,2)$ і AA_3^2;

е) $PP_5(2,1,2)$ і CC_8^3?

III рівень

1. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери в наступних словах (змістовність слів не враховувати):

а) „математика”;

б) „комбінаторика”;

в) „Міссісіпі”;

г) „абракадабра”?

2. Скількома способами можна вибрати 5 однакових або різних тістечок в кондитерській, де є 14 різних сортів тістечок?
3. Маємо набір з 16 карток. На чотирьох написано літеру *А*, на чотирьох – літеру *Б*, на чотирьох – *В*, на чотирьох – *Г*. Скільки різних наборів можна отримати, вибираючи з набору 4 картки і розташовуючи їх підряд?
4. Скількома способами можна розташувати в ряд дві зелені і чотири червоні лампочки ?
5. Скількома способами можна вибрати 4 монети з 4 п’ятикопійкових монет та з 4 двокопійкових монет ?
6. Скільки різних тризначних чисел можна скласти з цифр 1, 2, 3, 4, 6, 8 ?

IV рівень

1. Скільки двоцифрових чисел, в яких цифри можуть повторюватись, можна скласти з цифр 1, 3, 5, 0, 4, 6 ?
2. Скільки є семизначних чисел, у кожного з яких цифра 6 трапляється три, а цифра 5 – чотири рази ?
3. Для премій на математичній олімпіаді виділено 3 примірники однієї, 4 примірники другої та 8 примірників третьої книжки. Скількома способами можна розділити ці премії між 30 учасниками, якщо кожному вручають не більше однієї книги ?
4. Скільки існує різних телефонних номерів, якщо вважати, що кожен номер містить не менше п’яти цифр і не більше, ніж сім цифр (телефонний номер може починатися з нуля) ?
5. Скільки є двоцифрових чисел, у десятковому записі яких немає цифр 0, 1, 3, 5, 6, 8, 9 і в кожному з яких цифри розташовані у неспадному порядку? Знайдіть суму всіх таких чисел.

Тема 5. Формула Ньютона
І рівень

1. Запишіть формулу для обчислення $(a+b)^3$ і $(a+b)^4$, використовуючи біном Ньютона.
2. Скільки доданків міститься в розкладі $(a+b)^n$?
3. Зобразіть трикутник Паскаля, який складається з 9 рядків. Обчисліть суму членів 1, 2, 3, 4, 5, 6 рядків трикутника Паскаля.
4. Що ви можете сказати про коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу в трикутнику Паскаля?
5. Напишіть розклад за формулою бінома Ньютона і спростіть його $(a-2b)^5$.
6. Використовуючи формулу загального члена розкладу $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$ степеня бінома $(1+x)^4$, знайдіть:

   а) T_2;

   б) T_4;

   в) T_7.
7. Розв'яжіть рівняння:

   а) $C_x^2 = 21$;

   б) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

   в) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$.
8. Обчисліть $(2+y)^5 + (5-y)^4$.
9. Знайдіть 9-й член розкладу бінома $\left(\sqrt[4]{5}+\sqrt{6}\right)^{10}$.
10. Піднесіть до п'ятого степеня двочлен $(3x+2y)$.
11. Знайдіть наближене значення степеня $0{,}95^4$, скориставшись тим, що $0{,}95^4 = 1-0{,}05$.
12. Знайдіть суму біноміальних коефіцієнтів $C_k^0 + C_k^1 + ... + C_k^k$, якщо k=3, 5, 7.

ІІ рівень

1. Знайдіть показник степеня бінома $(x+y)^k$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу дорівнює 120.

2. Розкладіть вираз $\left(1+\sqrt{3}\right)^4$ за формулою бінома Ньютона і спростіть його .

3. Знайдіть член розкладу бінома $\left(x+\dfrac{1}{x^4}\right)^{10}$, який не містить x.

4. Знайдіть суму біноміальних коефіцієнтів, якщо степінь бінома дорівнює 10.

5. Знайдіть суму біноміальних коефіцієнтів 7 рядка трикутника Паскаля.

6. Спростіть:

а) $\dfrac{C_{10}^1+C_{10}^3+C_{10}^5+C_{10}^7+C_{10}^9}{2(C_6^0+C_6^2+C_6^4+C_6^6)}$;

б) $\dfrac{3(C_7^0+C_7^2+C_7^4+C_7^6)}{C_9^1+C_9^3+C_9^5+C_9^7+C_9^9}$.

7. Знайдіть член розкладу $\left(\sqrt{c^{-3}}+c^2\right)^{11}$, що містить c в першому степені.

III рівень

1. Спростіть:

а) $\dfrac{C_{2n}^0+C_{2n}^1+\ldots+C_{2n}^{2n}}{C_k^1+C_k^3+C_k^5+\ldots}$;

б) $\dfrac{C_{2m}^0+C_{2m}^2+C_{2m}^4+\ldots}{C_{3n}^1+C_{3n}^3+C_{3n}^5+\ldots}$.

2. Третій доданок розкладу $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^m$ не містить x. При яких x цей доданок дорівнює другому доданку розкладу $(1+x^3)^{30}$?

3. У розкладі $\left(2x^2-\dfrac{a}{2x^3}\right)^{10}$ знайдіть член, який не містить x.

4. Що більше $99^{50}+100^{50}$ чи 101^{50} ?

5. Коефіцієнт третього члена від кінця в розкладі бінома $\left(\sqrt[4]{z-1}+\sqrt[3]{z^2}\right)^n$ дорівнює 45. Знайдіть член цього розкладу, що містить z у четвертому степені.

6. Знайдіть сьомий член розкладу $\left(\sqrt{y}+\sqrt[3]{x}\right)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього від кінця члена дорівнює 45.

IV рівень

1. Доведіть рівність: $nC_n^0 + (n-1)C_n^1 + ... + C_n^{n-1} = n \cdot 2^{n-1}$.

2. Знайдіть всі члени розкладу $\left(\sqrt{2} + \sqrt[3]{3}\right)^5$, які не містять ірраціональності.

3. Знайдіть алгебраїчну суму коефіцієнтів многочлена відносно x, які одержуються в розкладі бінома $(3x-4)^{17}$.

4. Знайдіть п'ятий член розкладу бінома $\left(\sqrt{a} + \frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^n$, якщо відношення біноміального коефіцієнта четвертого члена до біноміального коефіцієнта третього члена дорівнює $\frac{10}{3}$.

5. Знайдіть суму біноміальних коефіцієнтів, які стоять на непарних місцях в розкладі бінома $(x+y)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт третього члена на 9 більше біноміального коефіцієнта другого члена.

ІІ. ЗАВДАННЯ, ЯКІ МОЖНА ВИКОРИСТАТИ ДЛЯ ТЕМАТИЧНОГО ОЦІНЮВАННЯ, САМОСТІЙНОЇ ТА ДОМАШНЬОЇ РОБІТ

Завдання для учнів навчальних закладів загальної середньої освіти рівня стандарту

І рівень

<u>І - варіант</u>

1. Запишіть $A \backslash B$, якщо:

    а) $A=\{3, 7, 6\}$, $B=\{3\}$;

    б) $A=\{3, 7, 6\}$, $B=\{3, 7\}$.

2. Запишіть всі підмножини множини $\{0, 4, 15\}$.

3. Наведіть приклад нескінченної множини.

4. Скільки елементів містить множина непарних цифр десяткової системи числення?

5. Скільки елементів містить множина $C = A \cup B$, якщо $A=\{3, 8, 0\}$, $B=\{1, 2, 3\}$?

6. Скількома способами можна розмістити 4 різних книги на полиці:

    а) 24;

    б) 25;

    в) 20?

7. В магазині продають канцтовари. Відомо, що зошит можна вибрати 16 способами, а ручку – 3 способами. Скільки є можливостей вибору для покупки зошита чи ручки?

8. Обчисліть значення A_{10}^{3} .

9. Обчисліть кількість перестановок цифр у числі 2576, щоб одержати нові чотирицифрові числа.

10. Обчисліть біноміальний коефіцієнт п’ятого члена розкладу бінома $(x+a)^6$, тобто C_6^4.

ІІ рівень

1. Дано $A=\{1, 2, 4, 6, 8\}$, $B=\{2, 8, 0, 5\}$. Знайдіть:

    а) $A \cap B$;

    б) $A \backslash C$;

в) $A \cup B \cup C$;

г) $A \cap B \cap C$.

Чи є серед них рівні множини?

2. На тарілці лежать 8 яблук і 6 груш. Скількома способами можна вибрати один із фруктів?
3. Скільки можна утворити різних двоцифрових чисел із чотирьох цифр 1, 3, 7, 9, не повторюючи їх?
4. Скількома способами можна розмістити за круглим столом лицарів короля Артура, якщо прийшли на раду 8 лицарів?
5. Скількома способами можна призначити 3 чергових для шкільної їдальні, якщо у класі 18 учнів?
6. Піднесіть до степеня $(1-x)^5$, застосувавши формулу бінома Ньютона.

III рівень

1. Пасажир залишив речі в автоматичній камері схову, а коли прийшов одержувати речі, то виявилось, що він забув номер. Він лише пам'ятає, що номер розпочинався цифрою 2 і всі цифри в ньому були різними. Щоб відкрити камеру, треба правильно набрати тризначний номер. Яку найбільшу кількість номерів треба перебрати, щоб відкрити камеру?
2. 10 книг різних авторів і чотирьохтомник одного автора розташовані на книжковій полиці. Скількома способами можна розставити на полиці ці 14 книжок так, щоб книги автора чотирьохтомника стояли поруч?
3. В кімнаті 14 лампочок. Скільки всього різних способів освітлення кімнати, при яких горить рівно 8 лампочок? Скільки всього може бути способів освітлення кімнати?
4. Скільки можна утворити різних трицифрових додатних цілих чисел у десятковій системі числення, не повторюючи цифри у запису числа?
5. Подайте у вигляді многочлена:

а) $(x-2a)^3$; б) $\left(\frac{1}{3}a+3b\right)^4$.

IV рівень

1. Скільки п’ятизначних чисел можна скласти з цифр 1,2,3,...,9, якщо кожне число повинно складатися з трьох парних та двох непарних цифр, причому ніякі дві цифри у ньому не повторюються?
2. У чотирьох одинадцятих класах 100 учнів. З них займаються у секції футболу – 45, волейболу – 65, і футболу, і волейболу – 25 учнів. Скільки учнів займається:

   а) хоча б в одній секції;

   б) тільки в одній секції;

   в) тільки у секції футболу;

   г) тільки у секції волейболу?

   Скільки учнів не відвідують жодну із секцій?
3. Розв’яжіть рівняння $\frac{A_{x+1}^{4}+A_{x+2}^{3}}{A_{x+2}^{2}}=25$.
4. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)^{20}$, який містить x^{7}.

II – варіант

I рівень

1. Запишіть переріз та об’єднання множин A і B, якщо A={5, 11, 17, 23, 29}, B={5, 17, 29, 4}. Яка множина є різницею множин $A\backslash B$?
2. Запишіть всі підмножини множини C={0, е, р}.
3. Наведіть приклад порожньої множини.
4. Скільки елементів містить множина парних цифр десяткової системи числення?
5. Скільки елементів містить множина $C = A\cap B$, якщо A={5, 10, 15}, B={5, 15, 25}?
6. Скількома способами можна вибрати 2 книги із 4 різних книг:

   а) 16;

   б) 12;

   в) 8?

7. Із корзини з фруктами яблуко можна вибрати 5 способами, а грушу – 3 способами. Скількома способами можна вибрати хоча б один із фруктів?
8. Обчислити значення A_8^4 .
9. Обчисліть кількість перестановок цифр у числі 159, щоб одержати нові трицифрові числа. Випишіть ці числа.
10. Обчисліть біноміальний коефіцієнт п’ятого члена розкладу бінома $(x+a)^7$, тобто C_7^4.

ІІ рівень

1. Дано A={16, 2, 4, 10, 5}, B={2, 4, 6}. Знайдіть:
   а) $A \cap B$;
   б) $A \setminus B$;
   в) $A \cup C$;
   г) $B \cap C \cap A$.

   Чи є серед них порожня множина?
2. Скільки варіантів контрольної роботи з математики можна скласти, маючи 6 задач з алгебри та 5 задач з геометрії? (У кожному варіанті по одній задачі з кожного розділу).
3. Скільки п’ятицифрових чисел можна утворити за допомогою п’яти різних цифр, відмінних від нуля, не повторюючи цифри у запису числа?
4. Скількома способами можна вибрати навмання 3 лотерейних білети з 11 запропонованих?
5. Скількома способами вчитель фізичної культури може вибрати 2 учнів із 15 учнів класу для змагань, одного учня – для бігу, іншого учня – для стрибка?
6. Піднесіть до степеня $(2-x)^4$, застосувавши формулу бінома Ньютона.

ІІІ рівень

1. Скількома способами можна здійснити подорож за маршрутом Київ – Чернігів – Новгород-Сіверський, якщо з Києва до Чернігова можна дістатись

пароплавом, поїздом, автобусом, літаком; з Чернігова до Новгород-Сіверська – пароплавом і автобусом?

2. Скількома способами можна вишикувати в колону по одному 6 учнів *А, Б, В, Г, Д, Е* так, щоб:

   а) колона починалася з учня *Д*;

   б) учень *В* мусить стояти відразу за *Б*?

3. Скільки існує двоцифрових чисел, в яких цифра десятків і цифра одиниць різні і парні?

4. Відомо, що 3 учнів для чергування у шкільній їдальні можна вибрати 2300 різними способами. Скільки учнів у класі?

5. Подайте у вигляді многочлена:

   а) $(x+2a)^3$;

   б) $\left(\frac{1}{2}a+2b\right)^4$.

IV рівень

1. Для проведення шахового турніру необхідно відібрати 8 шахістів з 12 членів шахової секції і 2 суддів (головного і помічника) з 5 осіб, які мають суддівську кваліфікацію. Скількома способами можна це зробити?

2. У класі навчаються 42 учні. Із них 16 відвідують секцію з легкої атлетики, 24 – футбольну, 16 – шахову, 11 – з легкої атлетики і футболу одночасно, 8 – шахову і з легкої атлетики, 12 – футбольну і шахову, а 6 – усі три секції. Решта учнів займаються лише туризмом. Скільки учнів займаються лише туризмом?

3. Розв’яжіть нерівність $\frac{(n+2)!}{(n+1)\cdot(n+2)}<1000$.

4. Знайдіть член розкладу бінома $\left(\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2}+\frac{2}{3}\sqrt{x}\right)^{12}$, який містить x^7.

Завдання для учнів ліцеїв з поглибленим вивченням математики

I – варіант

I рівень

1. Використовуючи рис 1., запишіть множину C=... .

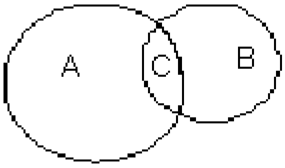


Рис 1.

2. Чи вірне твердження „$A \subset B$" ? (рис. 2.)

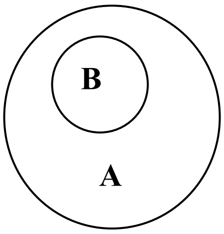


Рис 2.

3. Наведіть приклад порожньої множини.
4. Обчисліть P_4+P_8.
5. Обчисліть $A_9^7+C_{10}^2$.
6. Скількома способами можуть бути розподілені два різних квитки на концерт між 12 особами?
7. Скільки чотирицифрових чисел можна утворити за допомогою цифр 2, 4, 6, 8, не повторюючи цифри у запису числа?
8. Скількома способами можна вибрати 3 лотерейних білети з 12 запропонованих?
9. Випишіть усі розміщення з повтореннями з трьох елементів по два AA_3^2 з множини $\{1, 2, 3\}$.
10. Обчисліть біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу бінома $(x+4)^6$.

II рівень

1. Скільки трицифрових чисел можна скласти з цифр 2, 4, 6, 8, якщо:

а) цифри не повторюються;

б) цифри можуть повторюватися?

2. Спростіть вираз $\frac{(n-4)!}{(n-2)!}$.

3. Обчисліть $C_9^3 + P_3 + A_{10}^7$.

4. Розв’яжіть нерівність $C_{10}^{x-1} > 2C_{10}^x$.

5. Обчисліть:

а) $PP_6\ (1,2,3)$;

б) AA_4^3.

6. Обчисліть біноміальний коефіцієнт четвертого члена розкладу бінома $(x+3)^6$. Що про нього можна сказати?

III рівень

1. Скількома способами в літній табір відпочинку з 30 чоловік можна вибрати 5 чоловік: голову ради, його заступника і п’ять ланкових?
2. У турнірі брали участь 12 шахістів і кожні два шахісти зустрілись один раз. Скільки матчів було зіграно в турнірі?
3. Скільки різних слів можна утворити, переставляючи літери слова “метаморфоза”? (змістовність слова не брати до уваги).
4. Розв’яжіть рівняння $C_{x+8}^{x+3} = 5A_{x+6}^3$.
5. Запишіть восьмий член розкладу $(x-y)^{12}$.

IV рівень

1. У деякому царстві немає двох людей, які б мали однаковий набір зубів. Скільки людей мешкає там, якщо кількість зубів у мешканців утворює всю множину можливих варіантів?
2. Скільки різних натуральних чисел можна утворити з цифр 0, 2, 4, 6, 8, якщо кожне число містить кожну з даних цифр не більше одного разу?
3. Скількома способами з 20 чоловік можна вибрати двох людей, які знають місцевість і п’ять учасників туризму?
4. Знайдіть середній член розкладу $\left(\frac{1}{x^2} - x\sqrt{x}\right)^{12}$.

<u>II – варіант</u>

I рівень

1. Користуючись діаграмами Ейлера-Вена запишіть:

   а) $A \backslash B$;

   б) $C = A \cup B$.

2. Чи вірне твердження „Якщо $A \subset B \subset C$, то $A \subset C$”? Відповідь поясніть.
3. Знайдіть множину розв’язків рівняння $x^2 + 16 = 0$.
4. Обчисліть $P_4 + A_6^3$.
5. Обчисліть $C_4^3 + C_{10}^2$.
6. Скількома способами у бібліотеці можна вибрати 3 книги з 5 для прочитання?
7. Скільки існує способів розміщення 5 осіб на 12 стільцях?
8. Скільки різних слів (змістовність слова не береться до уваги) можна утворити із слова „алгебра”?
9. Випишіть усі комбінації з повтореннями з трьох елементів по два CC_3^2 з множини $\{1, 2, 3\}$.
10. Обчисліть біноміальний коефіцієнт п’ятого члена розкладу бінома $(x+4)^7$.

II рівень

1. Скільки варіантів контрольної роботи з математики можна скласти, маючи 6 задач з алгебри та 5 задач з геометрії? (У кожному варіанті по одній задачі з кожного розділу).
2. Спростіть вираз $\dfrac{(m+1)!}{(m-1)!}$.
3. Обчисліть $C_{12}^3 + P_4 + A_8^6$.
4. Розв’яжіть нерівність $8C_{105}^x < 3C_{105}^{x+1}$.
5. Обчисліть:

   а) AA_5^3;

   б) CC_4^3.

6. Скільки членів містить розклад $(x+2)^6$? Обчисліть біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу бінома.

III рівень

1. З пункту *А* до пункту *В* є m доріг, а з *А* до *Е* є r доріг, з *В* до *С* – n доріг, з *Е* до *Н* – s доріг, з *С* до *Д* – p доріг, з *Н* до *Д* – l доріг. Скількома способами можна потрапити з *А* в *Д*?
2. Скількома способами з 15 чоловік можна вибрати суддю і 6 учасників волейбольного матчу?
3. Скількома способами можна вибрати 6 однакових або різних тістечок в кондитерській, де є 11 різних сортів тістечок?
4. Розв'яжіть рівняння $\frac{A_x^3}{C_{x-2}^{x-4}} = \frac{84}{x-3}$.
5. Знайдіть показник степеня бінома $(a+b)^n$, якщо біноміальний коефіцієнт четвертого члена розкладу дорівнює 120.

IV рівень

1. Скільки чисел серед першої сотні натуральних чисел не діляться ні на 2, ні на 3, ні на 5?
2. Маємо набір з 12 карток. На трьох написано літеру *А*, на трьох – *Б*, на трьох – *В*, на трьох – *Г*. Скільки різних наборів можна отримати, вибираючи з набору 4 картки і розташовуючи їх підряд?
3. Групу з 16 чоловік треба розділити на три бригади: з 4, 5 і 7 чоловік. Скількома способами це можна з робити?
4. Запишіть середній член розкладу $\left(x\sqrt{x}-1\right)^{14}$.

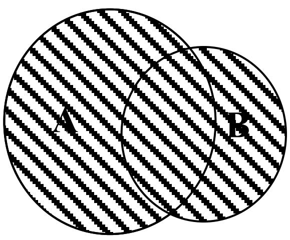
III. ВІДПОВІДІ І ВКАЗІВКИ

Відповіді на завдання для учнів навчальних закладів загальної середньої освіти рівня стандарту

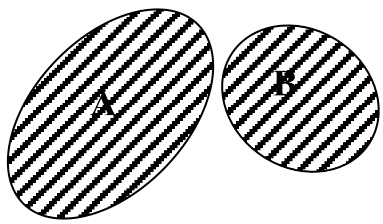
Тема 1. Поняття множини. Операції над множинами

I рівень

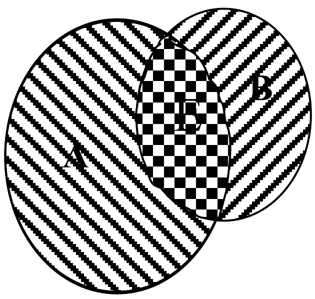
1. Множина дерев у лісі, множина будинків, множина автомобілів.
2. Множина чисел першої сотні, множина парних чисел, множина від'ємних чисел.
3. Множина рівнобедрених трикутників, множина квадратів, довжини сторін яких парні числа менші 10, множина кругів.
4. а) букет; б) клас; в) табун.
5. б) A, B, C,...
6. Сукупність.
7. а) Петренко Олексій, Ковальська Олена; б) квітень, червень, серпень; в) Київ, Кам'янець-Подільський, Тернопіль.
8. г) множина натуральних чисел; е) множина непарних чисел.
9. а) $A = \{5; 4\}$; б) $B = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
10. $\varnothing$, $\{5\}$, $\{13\}$, $\{17\}$, $\{5, 13\}$, $\{5, 17\}$, $\{13, 17\}$, $\{5, 13, 17\}$.
11.



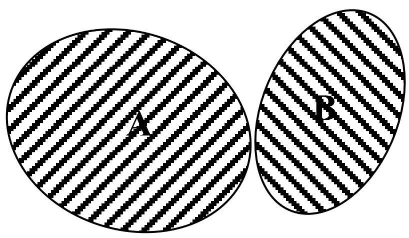
C=A∪B



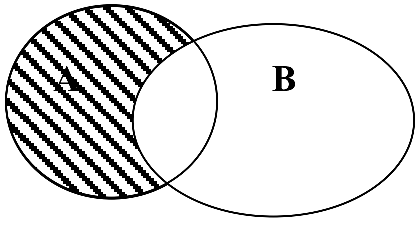
C=A∪B



E=A∩B



E=A∩B=∅



H=A\B

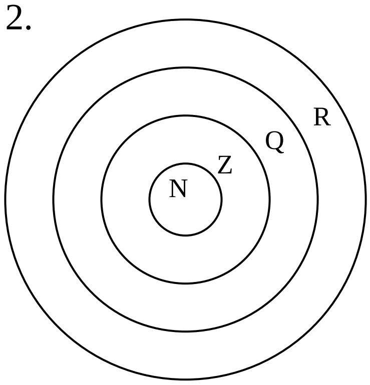
12. а) множина коренів рівняння $x^2 + 1 = 0$;

II рівень

1. а) множина коренів рівняння *sin t =1*, множина всіх районів Хмельницької області, множина непарних чисел першої сотні чисел;

   б) {1, 3, 5, 7, 9}, {-2, -1, 0, 1, 2}, {□, ◊, ∇}.

2.



3. $B \subset C \subset A \subset K$.

4. $A = B$.

5. б) 6 $\notin A$; в) 2 $\in A$.

6. а) 0; 0,5; 0,08; 1; б) 1; 28; 7; в) 3; 7; 11; 19.

7. б) множина коренів рівняння $x^2 + 4x + 6 = 0$;

   в) множина кіл, в яких діаметр менший від радіуса.

III рівень

1. а) Оскільки $f(x) = 4x^2 - 8x + 1 =$, то $f'(x) = 8x - 8$. Тоді рівняння $f'(x) + 3 = x$ запишемо наступним чином $8x - 8 + 3 = x$. Розв'яжемо це рівняння:

   $8x - 8 + 3 = x$

   $7x = 5$

   $x = \frac{5}{7}$.

   Отже, шукана множина буде складатися з одного елемента $\{\frac{5}{7}\}$;

б) розв’яжемо спочатку рівняння $\frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}$.

$$\begin{cases} \frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}, \\ x+2\neq 0, \\ 2x-7\neq 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{x-2}{x+2}=\frac{7}{2x-7}, \\ x\neq -2, \\ x\neq \frac{7}{2}; \end{cases}$$

$(x-2)(2x-7)=7(x+2)$;

$2x^2-11x+14=7x+14$;

$2x^2-18x=0$;

$2x(x-9)=0$;

$x_1 = 0$, $x_2 = 9$.

Отже, шукана множина буде складатися з двох елементів $\{0, 9\}$;

в) знайдемо розв’язки системи рівнянь: $\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ 25(x-2)\neq 0. \end{cases}$

$$\begin{cases} x^2-5x+6=0, \\ x\neq 2; \end{cases}$$

За т. Вієта знайдемо корені рівняння $x^2-5x+6=0$, $x_1 = 2$, $x_2 = 3$. Отже, отримуємо один розв’язок системи рівнянь $x = 3$. Шукана множина буде складатися з одного елемента $\{3\}$;

2. $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {1}, {0}, {a, b}, {a, c}, {a, 1}, {a, 0}, {b, c}, {b, 1}, {b, 0}, {c, 1}, {c, 0}, {1, 0}, {a, b, c}, {a, c, 1}, {a, 1, 0}, {a, b, 1}, {a, b, 0}, {b, c, 1}, {b, c, 0}, {c, 1, 0}, {b, 1, 0}, {a, c, 0}, {a, b, c, 1}, {a, b, c, 0}, {a, b, 1, 0}, {b, c, 1, 0}, {a, c, 1, 0}, {a, b, c, 1, 0}.
3. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 3, B – множина парних чисел і C – множина чисел, більших за 50, тоді $A \cap B$ – це множина парних цілих чисел, що діляться на 3, $(A \cap B) \setminus C$ – це множина парних цілих чисел, менших 50, що діляться на 3. Цій множині будуть належати такі числа: -6, 12, -48, 54.
4. $D \subset B \subset H \subset A \subset C \subset F$.
5. Якщо $B \subset A$, то це означає, що кожен елемент множини B є елементом множини A. За означенням: перерізом двох множин A і B ($A \cap B$)

називається множина C, що складається з усіх тих і лише тих елементів, які одночасно належать і множині A, і множині B, тобто $C = A \cap B = \{y \mid y \in A$ і $y \in B\}$, звідси $C = A \cap B = B$. Об'єднанням двох множин A і B ($A \cup B$) називається множина C, що складається з усіх елементів множин A і B, і лише з них, тобто $C = A \cup B = \{y \mid y \in A$ або $y \in B\}$, а оскільки кожен елемент множини B є елементом множини A, то $C = A \cup B = A$.

6. а) якщо A=[-2; 2], B=(-∞; 0), C=[0; 5), то $A \cap B \cap C = \varnothing$ і $A \cup B \cup C$=(-∞; 5);

   б) якщо A=(2; 10), B=(3; 9), C=(4; 8), то $A \cap B \cap C$ = (4; 8) і $A \cup B \cup C$=(2; 10);

   в) якщо A=(-5; 8), B=(-2; 10), C=(0; 13), то $A \cap B \cap C$=(0; 8) і $A \cup B \cup C$=(-5; 13);

   г) якщо A=(-∞; 4], B=[4; +∞), C=(0; 4), то $A \cap B \cap C$ = (0; 4) і $A \cup B \cup C$=(-∞;+∞).

IV рівень

1. $N(A \cup B \cup C)=N(A \cup (B \cup C))=N(A)+N(B \cup C)-N((A \cap B) \cup (A \cap C))=$

   $=N(A)+N(B)+N(C)–N(B \cap C)-N(A \cap B)-N(A \cap C)+N((A \cap B) \cap (A \cap C))=$

   $=N(A)+N(B)+N(C)–N(A \cap B)-N(A \cap C)-N(B \cap C)+N(A \cap B \cap C)$.

2. Позначимо через A – множину учнів, які відвідують математичний гурток, через B – множину учнів, які відвідують фізичний гурток. Оскільки 10 учнів не відвідують жодного з гуртків, а у класі 35 учнів, то 25 учнів зайняті гуртковою діяльністю, з них 20 у математичному і 11 у фізичному гуртках. Використовуючи формулу $N(A \cup B) = N(A) + N(B) – N(A \cap B)$, знаходимо $N(A \cap B)$, тобто кількість учнів, які відвідують і математичний, і фізичний гуртки: $N(A \cap B) = N(A) + N(B) – N(A \cup B) = 20 + 11 – 25 =$
   $= 31 – 25 = 6$.

   Щоб обчислити кількість учнів, які відвідують тільки математичний гурток, треба знайти кількість елементів, що належать множині А і не належать множині В, тобто $N(A \backslash B)$.

   Доведемо формулу $N(A \backslash B)=N(A) – N(A \cap B)$, тобто $A \backslash B=A \backslash (A \cap B)$. За означеннями різниці множин маємо $A \backslash B \overset{озн.}{\Leftrightarrow} \{x \mid x \in A \ і \ x \notin B\}$, перетину множин

$A \cap B \overset{озн.}{\Leftrightarrow} \{x | x \in A \text{ і } x \in B\}$, звідси випливає, що в множину $A \setminus (A \cap B)$ будуть входити ті і тільки ті елементи, які належать множині A і не належать множині $A \cap B$. Це і будуть елементи множини $A \setminus B$. Формула доведена.

Використовуючи доведену формулу, обчислимо

$N(A \setminus B) = N(A) - (A \cap B) = 20 - 6 = 14$.

Отже, 6 учнів відвідують математичний і фізичний гуртки, а 14 учнів тільки математичний гурток.

3. Позначимо:

A – множина студентів, які знають англійську мову;

B – множина студентів, які знають німецьку мову;

C– множина студентів, які знають французьку мову;

$A \cap B$ – множина студентів, які знають англійську і німецьку мови;

$A \cap C$ – множина студентів, які знають англійську і французьку мови;

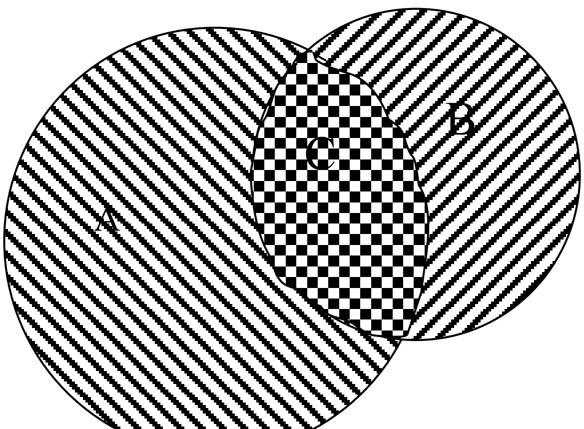
$B \cap C$ – множина студентів, які знають англійську і французьку мови;

$A \cap B \cap C$– множина студентів, які знають всі три мови.

Кількість студентів, які знають хоча б одну мову, буде обчислюватися за формулою:

$N(A \cup B \cup C) = N(A) + N(B) + N(C) - N(A \cap B) - N(A \cap C) - N(B \cap C) + N(A \cap B \cap C) =$
$= 28 + 30 + 42 - 8 - 10 - 5 + 3 = 80$. А кількість студентів, які не знають жодної мови, буде $N = 100 - 80 = 20$.

4.



$C = A \cap B$, $U = A \cup B$

$N(A) = 32$

$N(B) = 21$

$N(C) = 15$

$N(U) = 40$.

5. Розкриваємо дужки у виразі:

(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(t+1)=(ab+a+b+1)(cd+c+d+1)(t+1)=(abcd+abc+abd+ab+acd+ +ac+ad+a+bcd+bc+bd+b+cd+c+d+1)(t+1)=abcdt+abct+abdt+abt+acdt+act+adt+ +at+bcdt+bct+bdt+bt+cdt+ct+dt+t+abcd+abc+abd+ab+acd+ac+ad+a+bcd+bc+bd+b+ +cd+c+d+1.

Множина доданків буде такою: {abcdt, abct, abdt, abcd, bcdt, acdt, bct, bdt, cdt, abc, abt, act, adt, abd, acd, bcd, ac, ad, bc, bt, at, bd, ab, ct, dt, cd, a, b, c, d, t, 1}.

Тема 2. Перестановки, розміщення, комбінації без повторень без повторень елементів

І рівень

1. а) рівні;

   б) не рівні.

2. б) добуток послідовних натуральних чисел;

3. {1, 2, 3}, {1, 3, 2},{2, 3, 1},{2, 1, 3},{3, 2, 1},{3, 1, 2}.

4. 1!=1, 2!=2, 3!=6, 4!=24, 5!=120.

5. 24 способами.

6. 10 способами.

7. 6 двоцифрових чисел.

8. а) P_5.

9. в) A_7^3.

10. б) C_8^2.

11. а) 3! > 2!;

    б) 5! < 6!;

    в) 0! = 1!;

    г) 8! = 8!;

    д) 7! < 15!.

12. а) $P_8=8\cdot7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1$;

    б) $A_5^2=5\cdot4$;

    в) $C_6^4=\frac{6!}{4!\cdot2!}$.

13. а) P_n;

б) A_m^n;

в) C_n^m.

14. а) 5!;

б) 9!;

в) 7!;

г) 10!.

15. а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!$;

б) $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$;

г) $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5!$.

16. а) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 4!$;

б) $3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$;

в) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 5!$;

г) $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 = 6!$.

II рівень

1. $A_5^3 = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ способами.

2. $P_4 = 4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$ способами.

3. $C_{12}^4 = \frac{12!}{4! \cdot 8!} = 495$ способами.

4. $C_{30}^4 = \frac{30!}{4! \cdot 26!} = 27405$ способами.

5. а) $\frac{102!}{100!} = 101 \cdot 102 = 10302$;

б) $\frac{5! - 3!}{2!} = \frac{120 - 6}{2} = 57$;

в)10!-7!=7!·(10·9·8-1)=7! ·719=5040·719=3623760;

г)3!+4!=6+24=30;

д) 5!-25=120-25=95.

6. а) 4!-3! > 4;

б) 2!+3! < 5;

в) 8!+1! < 9!;

г) 1!-3! < 0;

д) $3! > 2!+2$.

7. а) $\frac{5!}{3!} = \frac{3!\cdot 4\cdot 5}{3!} = 4\cdot 5 = 20$;

б) $\frac{101!}{1!}$=10 ;

в) $\frac{2+3!}{2} = \frac{2+6}{2} = 4$;

г) $8+\frac{6!}{5!} = 8+\frac{5!\cdot 6}{5!} = 8+6 = 14$;

д) $4!+\frac{4!}{2!} = 24+\frac{2!\cdot 3\cdot 4}{2!} = 24+12 = 36$.

8. Оскільки 0!=1, то на 0! можна ділити.

9. Потрібно взяти 4 елемента, бо $P_4 = 4! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4 = 24$.

10. а) $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5 = 5!$;

г) $2\cdot 4\cdot 3\cdot 1\cdot 5 = 5!$.

III рівень

1. а) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;

$x(x-1)(x-2)...5\cdot 4 = x(x-2)!$;

$x(x-1)(x-2)\cdot ...\cdot 5\cdot 4 = x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (x-2)$;

$x-1 = 6$;

$x = 7$.

Відповідь. 7.

б) $\frac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

$\frac{A_x^5}{A_x^3} + 1 = 43$;

$\frac{A_x^5}{A_x^3} = 42$;

$\frac{x\cdot (x-1)\cdot (x-2)\cdot (x-3)\cdot (x-4)}{x\cdot (x-1)\cdot (x-2)} = 42$;

$(x-3)\cdot (x-4) = 42$;

$x^2 - 7x + 12 = 42$;

$x^2-7x-30=0$, звідси за т. Вієта x_1=-3, x_2=10. Оскільки x_1=-3<0 не задовольняє означення розміщення, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 10.

в) $A_7^x=4A_7^{x-1}$;

$$\frac{A_7^x}{A_7^{x-1}}=4;$$

$$\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot \ldots\cdot(9-x)\cdot(8-x)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot \ldots\cdot(9-x)}=4;$$

$8-x=4$;

x=4.

Відповідь. 4.

г) $A_x^2=42$ (де x – натуральне число, яке не менше 2);

$x\cdot(x-1)=42$;

$x^2-x-42=0$, звідси за т. Вієта x_1=-6, x_2=7. Оскільки x_1=-6<2 не задовольняє умову рівняння, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 7.

д) $C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15(x-1)$;

$$\frac{x!}{(x-3)!\cdot 3!}+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-3)!\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x}{(x-3)!3!}+\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!2!}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot x}{6}+\frac{(x-1)\cdot x}{2}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot x+3x\cdot(x-1)}{6}=15(x-1);$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2+3)}{6}=15(x-1);$$

$$\frac{x\cdot(x+1)}{6}=15;$$

$x^2+x-90=0$, звідси за т. Вієта x_1=-10, x_2=9. Оскільки x_1=-10<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 9.

е) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=101;$$

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!\cdot 2}=101;$$

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{(x-1)\cdot x}{2}=101;$$

$$\frac{2(x-2)\cdot(x-3)+x\cdot(x-1)}{2}=101;$$

$$\frac{2(x^2-5x+6)+x^2-x}{2}=101;$$

$$2x^2-10x+12+x^2-x=202;$$

$$3x^2-11x-190=0;$$

$$D=b^2-4ac=121+2280=2401;$$

$x_1=\frac{11-49}{6}=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}$ - сторонній корінь;

$$x_2=\frac{11+49}{6}=10.$$

Відповідь. 10.

є) $C_{x+2}^4=x^2-1;$

$$\frac{(x+2)!}{4!\cdot(x-2)!}=x^2-1;$$

$$\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{24(x-2)!}=(x-1)(x+1);$$

$$\frac{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{24}=(x-1)(x+1);$$

$$\frac{x\cdot(x+2)}{24}=1;$$

$x^2+2x-24=0$, звідси за т. Вієта x_1=-6, x_2=4. Оскільки x_1=-6<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 4.

ж) $\frac{x!}{(x-4)!}=\frac{12x!}{(x-2)!};$

$$\frac{(x-4)!\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot x}{(x-4)!}=\frac{12(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!};$$

$$(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x=12x\cdot(x-1);$$

$(x-3)\cdot(x-2)=12$;

$x^2-5x+6=12$;

$x^2-5x-6=0$, звідси за т. Вієта x_1=-1, x_2=6. Оскільки x_1=-1<0, а -1! не існує, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 6.

2. Будемо вважати трьохтомник одним цілим. Множину, яка складається з 8 книг (7 книг різних авторів і трьохтомник) можна впорядкувати P_8=8! способами. Три книги, що входять в трьохтомник, можна впорядкувати P_3=3! способами. За правилом множення дістанемо $P_8\cdot P_3$=8!·3!=241920 способів розташування книг, при яких книги трьохтомника стоять поруч.
3. Для кожної з C_{11}^3 вибірок трійки книжок для обміну першим чоловіком другий може запропонувати C_{15}^3 варіантів вибору своєї трійки книжок. За правилом добутку n=$C_{11}^3\,C_{15}^3$ =75075 способів, щоб здійснити обмін.
4. Загальна кількість можливих списків промовців P_5=5!=120. З них у половині списків *Б* виступає за *А*. Тому: а) n_1=60. Якщо ж *Б* повинен виступати відразу за *А*, то, вважаючи пару (*А*,*Б*) співпромовцями однієї доповіді, дістанемо що б) n_2=P_4=4!=24 – кількість списків, коли *Б* виступає відразу за *А*.
5. Три парні з 4 та три непарні з 5 цифр можна вибрати $C_4^3\cdot C_5^3$способами. Кожну з таких вибірок можна розмістити по 6 місцях P_6 способами. Звідси $n=P_6\cdot C_4^3\cdot C_5^3=28800$.
6. Кількість різних способів освітлення, при яких горить 5 лампочок з 12 буде рівна числу $C_{12}^{\ 5}=\dfrac{12!}{5!7!}=\dfrac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}=11\cdot 9\cdot 8=792$. Всього способів освітлення може бути: 2^{12}–1=4096–1=4095.
7. Непарних цифр всього є п’ять: 1,3,5,7,9. З множини даних п’яти цифр можна вибрати двохелементну впорядковану множину $A_5^2=5\cdot 4=20$ способами.
8. а) $\dfrac{7!}{5!}+\dfrac{(n+1)!}{n!}=\dfrac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!}+\dfrac{n!\cdot(n+1)}{n!}=42+n+1=43+n$;

   б) $\dfrac{12!}{10!}-\dfrac{n!}{(n-2)!}=\dfrac{10!\cdot 11\cdot 12}{10!}-\dfrac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{(n-2)!}=132-n\cdot(n-1)=132-n^2+1=133-n^2$;

в) $\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{5!}{6!}=\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot n}+\frac{5!}{5!\cdot 6}=\frac{1}{n}+\frac{1}{6}=\frac{6+n}{6n}$;

г) $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}=\frac{1}{k!\cdot(k+1)}+\frac{1}{k!}=\frac{1+k+1}{k!\cdot(k+1)}=\frac{2+k}{(k+1)!}$;

д) $\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{(n-2)!}{(n-2)!\cdot(n-1)!\cdot n}=\frac{1}{n^2-n}$.

IV рівень

1. Якщо Іван вибрав сливу, що він може зробити 15 способами, то Валентина пару слива-груша для кожного з виборів Івана може вибрати за правилом добутку $14\cdot 12$ способами. Якщо ж Іван одним з 12 можливих способів вибрав грушу, то Валентина вибрати пару фруктів може $15\cdot 11$ способами. За правилом добутку множина $B_1=\{(C_I, C_{B,}\Gamma_B)\}$ складається з $15\cdot 14\cdot 12$ елементів, а множина $B_2=\{(\Gamma_I, C_{B,}\Gamma_B)\}$ – з $12\cdot 15\cdot 11$ елементів. Отже, коли Іван вибере сливу, Валентина має більше можливостей вибору. За правилом суми загальна кількість виборів $n=n(B_1\cup B_2)=n(B_1)+n(B_2)=15\cdot 14\cdot 12+12\cdot 15\cdot 11=4500$.
2. Вибрати 15 чоловік з 25 для нагороди книгами можна C_{25}^{15} способами. Для кожного з обраних складів призерів книги можна розподілити, PP_{15} (5,3,7) способами. Звідси $n= C_{25}^{15}\cdot PP_{15}(5,3,7)=\frac{25!}{15!10!}\cdot\frac{15!}{5!3!7!}=\frac{25!}{10!\cdot 5!3!7!}$.
3. Позначимо:

A_2 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2;

A_3 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 3;

A_4 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 4;

A_2A_3 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2 і 3;

$A_3 A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 3 і 4;

$A_2 A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2 і 4;

$A_2 A_3A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2, 3 і 4.

Кількість чисел $n(A_к)$, у кожній з множин $A_к$, к=2,3,5, легко знайти, скориставшись простим і майже очевидним правилом: добуток $к \cdot n\ (A_к)$ є найбільшим з натуральних чисел 1,2,...,100, що діляться на $к$. Звідси $n(A_2)=50$, $n(A_3)=33$, $n(A_4)=25$. Аналогічно, $n(A_2A_3)=16$, тому що $2 \cdot 3 \cdot 16=96$ – найбільше серед першої сотні натуральних чисел, що діляться на 6; $n(A_2A_4)=12$; $n(A_3A_4)=8$; $n(A_2A_3\,A_4)=4$, бо $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4=96$. Тоді кількість чисел, що діляться або на 2, або на 3, або на 4 дорівнює: $n(A_2+A_3+A_4)=n(A_2)+n(A_3)+n(A_4)–n(A_2A_4)–n(A_3A_4)–n(A_2A_3)+n(A_2A_3A_4)=$

$= 50+33+25–12–8–16+4=76.$

А кількість чисел, жодне з яких не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 4, $n=100 – 76=24$.

4. Обрати 5чоловік із 9 гімнастів і 4 акробатів, щоб серед них обов’язково був би хоч один акробат можна таким чином: $C_9^4 \cdot C_4^1$ або $C_9^3 \cdot C_4^2$, або$C_9^2 \cdot C_4^3$, або $C_9^1 \cdot C_4^4$. За правилом додавання загальна кількість способів дорівнює:

$$C_9^4 \cdot C_4^1 + C_9^3 \cdot C_4^2 + C_9^2 \cdot C_4^3 + C_9^1 \cdot C_4^4 = \frac{9!4!}{4!5!3!} + \frac{9!}{3!6!} \cdot \frac{4!}{2!2!} + \frac{9!}{2!7!} \cdot \frac{4!}{3!} + \frac{9!}{8!} = 1161.$$

5. Треба знайти число всіх підмножин множини {1, 2, 5, 10, 25}. Воно буде рівне $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 2^5 = 32.$

6. $\dfrac{A_x^5}{C_{x-2}^{x-5}} = 336$;

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{\dfrac{(x-2)!}{(x-5)! \cdot (x-2-(x-5))!}} = 336;$$

$$\frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{\dfrac{(x-5)! \cdot (x-4) \cdot (x-3) \cdot (x-2)}{(x-5)! \cdot 3!}} = 336;$$

$6x \cdot (x-1) = 336$;

$6x^2 - 6x - 336 = 0$;

$x^2 - x - 56 = 0$, звідси за т. Вієта $x_1=-7$, $x_2=8$. Оскільки $x_1=-7<0$, то цей корінь – сторонній. Відповідь. 8.

Тема 3. Біном Ньютона
І рівень

1. $(a+b)^2 = C_2^0 a^2 + C_2^1 ab + C_2^2 b^2 = a^2 + 2ab + b^2$;

   $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$.

2. Розклад включає всі степені b від 0 до n, тому число доданків дорівнює (n+1).

3. Дійсно сума біноміальних коефіцієнтів у розкладі $(a+b)^n$ дорівнює 2^n.

4. Дане твердження не вірне, а вірне таке твердження „В розкладі $(a+b)^n$ сума показників степенів a і b в кожному члені стала і дорівнює n".

5. Трикутник Паскаля часто записують у вигляді рівнобедреного трикутника.

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \\
 & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \\
1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1
\end{array}
$$

6. Сума членів першого рядка трикутника Паскаля дорівнює 2, другого рядка – 4, третього рядка – 8, четвертого рядка – 16, п'ятого рядка – 32, шостого рядка – 64.

7. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу в трикутнику Паскаля однакові.

8. а) $(2+y)^4 = 1\cdot 2^4 + 4\cdot 2^3\cdot y^1 + 6\cdot 2^2\cdot y^2 + 4\cdot 2^1\cdot y^3 + 1\cdot y^4 = 16 + 8y + 24y^2 + 8y^3 + y^4$;

   б) $(1+x)^5 = 1\cdot 1^5 + 5\cdot 1^4\cdot x + 10\cdot 1^3\cdot x^2 + 10\cdot 1^2\cdot x^3 + 5\cdot 1^1\cdot x^4 + 1\cdot x^5 =$

   $= 1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5$.

9. а) $T_1 = T_{0+1} = C_4^0\cdot 1^4\cdot x^0 = 1$;

   б) $T_4 = T_{3+1} = C_4^3\cdot 1^1\cdot x^3 = 4x^3$;

   в) Восьмого члена розкладу не існує, оскільки всього у розклад входять 5 доданків..

10. Використовуючи першу властивість комбінацій (властивість індексів $C_m^n = C_m^{m-n}$) дістанемо: x–2=8, звідси x=10.

11. $(3+\text{y})^5+(2+\text{y})^4 = C_5^0\cdot 3^5 + C_5^1\cdot 3^4\cdot y^1 + C_5^2\cdot 3^3\cdot y^2 + C_5^3\cdot 3^2\cdot y^3 + C_5^4\cdot 3^1\cdot y^4 + C_5^5\cdot y^5 +$

$+C_4^0\cdot 2^4 + C_4^1\cdot 2^3\cdot y^1 + C_4^2\cdot 2^2\cdot y^2 + C_4^3\cdot 2^1\cdot y^3 + C_4^4\cdot y^4 =$

$= 243+405y+270y^2+90y^3+15y^4+y^5+16+32y+24y^2+8y^3+y^4 =$

$= 259+437y+294y^2+98y^3+16y^4+y^5.$

12. Якщо k=2, то $C_2^0+C_2^1+C_2^2=4$;

k=3, то $C_3^0+C_3^1+C_3^2+C_3^3=8$;

k=4, то $C_4^0+C_4^1+C_4^2+C_4^3+C_4^4=16$

II рівень

1.

$$(x-2y)^4=(x+(-2y))^4=C_4^0\cdot x^4+C_4^1\cdot x^3\cdot(-2y)+C_4^2\cdot x^2\cdot(-2y)^2+C_4^3\cdot x\cdot(-2y)^3+C_4^4\cdot(-2y)^4=$$
$$=x^4-8x^3y+24x^2y^2-32xy^3+16y^4$$

2. $T_7=T_{6+1}=C_{10}^6\cdot(\sqrt[4]{3})^4\cdot(\sqrt{2})^6=\dfrac{10!}{6!4!}\cdot 3\cdot\left((\sqrt{2})^2\right)^3=210\cdot 3\cdot 8=5040$.

3. $\left(1+\sqrt{3}\right)^4=C_4^1\cdot 1^4+C_4^1\cdot 1^3\cdot(\sqrt{3})^1+C_4^2\cdot 1^2\cdot(\sqrt{3})^2+C_4^3\cdot 1^1\cdot(\sqrt{3})^3+C_4^4\cdot(\sqrt{3})^4=$

$=1+4\sqrt{3}+18+4\sqrt{3}+9=28+8\sqrt{3}$

4. Запишемо (k+1)-й член розкладу:

$T_{k+1}=C_{16}^k\cdot(\sqrt[3]{x})^{16-k}\cdot\left(\dfrac{1}{x}\right)^k=C_{16}^k\cdot x^{\frac{16-k}{3}}\cdot(x)^{-k}=C_{16}^k\cdot x^{\frac{16-k}{3}-k}$. Щоб значення T_{k+1} не залежало від x, необхідно і достатньо, щоб $\dfrac{16-k}{3}-k=0$, тобто k=4. Отже, п’ятий член розкладу не містить x.

5. $(1-0{,}03)^4=(1+(-0{,}03))^4=C_4^0\cdot 1^4+C_4^1\cdot 1^3\cdot(-0{,}03)+C_4^2\cdot 1^2\cdot(-0{,}03)^2+C_4^3\cdot 1^1\cdot(-0{,}03)^3+$

$+C_4^4\cdot(-0{,}03)^4=1+4\cdot(-0{,}03)+6\cdot(-0{,}03)^2+4\cdot(-0{,}03)^3+(-0{,}03)^4=0{,}88529281.$

6.

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&\\
&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&\\
&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&\\
&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&\\
&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&\\
1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1
\end{array}$$

7. а) $C_x^{10} = C_x^2$. Використовуючи першу властивість комбінацій (властивість індексів $C_m^n = C_m^{m-n}$) дістанемо: x–2=10, звідси x=12.

б) $C_{14}^x = C_{14}^6$. Використовуючи першу властивість комбінацій (властивість індексів $C_m^n = C_m^{m-n}$) дістанемо: x=14–6, звідси x=8.

III рівень

1. $\mathrm{T}_3 = T_{2+1} = C_n^2 \cdot a^{n-2} \cdot b^2$. За умовою задачі $C_n^2 = \dfrac{n!}{(n-2)!2!} = 120$. Розв'яжемо це рівняння:

$\dfrac{(n-1)\cdot n}{2} = 120$;

$n^2 - n = 240$;

$n^2 - n - 240 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 1 + 960 = 961$;

$n_1 = \dfrac{1-31}{2} = -15 < 0$ – не задовольняє означення комбінації;

$n_2 = \dfrac{1+31}{2} = 16$.

Відповідь. 16.

2. Запишемо формули загальних членів розкладів бінома $(x+y)^n$ для п'ятого і дев'ятого членів:

$\mathrm{T}_5 = T_{4+1} = C_n^4 \cdot x^{n-24} \cdot y^4$, $\mathrm{T}_9 = T_{8+1} = C_n^8 \cdot x^{n-8} \cdot y^8$. Порівняємо біноміальні коефіцієнти цих членів: $C_n^4 = C_n^8$. Використовуючи першу властивість індексів дістанемо n=8+4=12.

Відповідь. 12.

3. а) $T_{k+1} = C_8^k \cdot (x^2 y)^{8-k} \cdot (xy^2)^k = C_8^k \cdot x^{16-2k} \cdot y^{8-k} \cdot x^k \cdot y^{2^k} = C_8^k \cdot x^{16-k} \cdot y^{8+k}$. Прирівнюємо:

$x^{16-k} \cdot y^{8+k} = x^{11} \cdot y^{13}$, отримаємо таку систему рівнянь $\begin{cases} 16 - k = 11, \\ 8 + k = 13; \end{cases}$, звідси k=5.

Доданок, що містить $x^{11}y^{13}$ буде $T_6 = C_8^5 \cdot x^{11} \cdot y^{13} = 56x^{11} \cdot y^{13}$

б) Прирівнюємо: $x^{16-k}\cdot y^{8+k}=x^{15}\cdot y^{9}$, отримаємо таку систему рівнянь $\begin{cases}16-k=15,\\ 8+k=9;\end{cases}$, звідси k=1. Доданок, що містить $x^{15}y^{9}$ буде $T_2=C_8^1\cdot x^{15}\cdot y^9=x^{15}\cdot y^9$.

4. Запишемо формулу загального члена розкладу для бінома $\left(2x^2-\dfrac{a}{2x^3}\right)^{10}$:

$$T_{k+1}=C_{10}^k\cdot(2x^2)^{10-k}\cdot\left(-\frac{a}{2x^3}\right)^k=(-1)^k\cdot C_{10}^k\cdot 2^{10-k}\cdot x^{20-2k}\cdot a^k\cdot(2x^3)^{-k}=(-1)^k\cdot C_{10}^k\cdot 2^{10-2k}\cdot a^k\cdot x^{20-5k}$$

Щоб значення T_{k+1} не залежало від x, необхідно і достатньо, щоб $20-5k=0$, тобто k=4. Отже, п’ятий член розкладу не містить x.

5. Біноміальний коефіцієнт третього члена розкладу $C_n^2=\dfrac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=36$, звідси знаходимо n:

$\dfrac{n!}{(n-1)!\cdot 2!}=36$;

$\dfrac{n\cdot(n-1)}{2}=36$;

$n^2-n-72=0$, звідси за т. Вієта n_1=-8, n_2=9. Оскільки n_1=-8, <0, то цей корінь – сторонній. Знайдемо сьомий член розкладу бінома $\left(a^2\sqrt{a}+\dfrac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^9$:

$$T_7=T_{6+1}=C_9^6\cdot(a^2\sqrt{a})^3\cdot\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{a}\right)^6=84\cdot a^6\cdot a^{\frac{3}{2}}\cdot a^2\cdot a^{-6}=84a^{\frac{7}{2}}=84\sqrt{a^7}.$$

6. Знайдемо п’ятий член розкладу бінома $\left(\sqrt[3]{x}+\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^n$:

$T_5=T_{4+1}=C_n^4\cdot(\sqrt[3]{x})^{n-4}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}}\right)^4=C_n^4\cdot x^{\frac{n-4}{3}}\cdot x^{-2}=C_n^4\cdot x^{\frac{n-4}{3}-2}=C_n^4\cdot x^{\frac{n-10}{3}}$. Оскільки п’ятий член розкладу не залежить від x, то $\dfrac{n-10}{3}=0$. Звідси n=10.

IV рівень

1. $\dfrac{A_x^4}{A_{x+1}^3-C_x^{x-4}}=\dfrac{24}{23}$;

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)x(x-1)-\dfrac{x!}{(x-4)!4!}}=\frac{24}{23};$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)x(x-1)-\dfrac{(x-4)!(x-3)(x-2)(x-1)x}{(x-4)!24}}=\frac{24}{23};$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(x+1)x(x-1)-\dfrac{(x-3)(x-2)(x-1)x}{24}}=\frac{24}{23};$$

$$\frac{24x(x-1)(x-2)(x-3)}{24(x+1)x(x-1)-(x-3)(x-2)(x-1)x}=\frac{24}{23};$$

$$\frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{x(x-1)(24(x+1)-(x-3)(x-2))}=\frac{1}{23};$$

$$\frac{(x-2)(x-3)}{24(x+1)-(x-3)(x-2)}=\frac{1}{23};$$

$$\frac{x^2-5x+6}{24x+24-x^2+5x-6}=\frac{1}{23};$$

$23x^2-115x+138=-x^2+29x+18;$

$24x^2-144x+120=0;$

$x^2-6x+5=0$ $n^2-n-72=0$, звідси за т. Вієта x_1=1, x_2=5. Оскільки x_1=<4, то цей корінь сторонній.

Відповідь. 5.

2. Розпишемо ці вирази, використовуючи однакову основу степеня:

$99^{50}+100^{50}=(100-1)^{50}+100^{50}=C_{50}^0100^{50}-C_{50}^1100^{49}+C_{50}^2100^{48}-...-C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}+100^{50};$

$101^{50}=(100+1)^{50}+100^{50}=C_{50}^0100^{50}+C_{50}^1100^{49}+C_{50}^2100^{48}+...+C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}.$

Припустимо, що $101^{50}>99^{50}+100^{50}$, тоді вірною повинна бути така нерівність:

$101^{50}-(99^{50}+100^{50})>0;$

$C_{50}^0100^{50}+C_{50}^1100^{49}+C_{50}^2100^{48}+...+C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}-C_{50}^0100^{50}+C_{50}^1100^{49}-C_{50}^2100^{48}+...+C_{50}^{49}100-$
$-C_{50}^{50}+100^{50}=2C_{50}^1100^{49}+2C_{50}^3100^{47}+2C_{50}^5100^{45}+...+2C_{50}^{49}100-100^{50}=$

$=2\cdot 50\cdot 100^{49}+2C_{50}^3100^{47}+2C_{50}^5100^{45}+...+2C_{50}^{49}100-100^{50}=100^{50}+2C_{50}^3100^{47}+2C_{50}^5100^{45}+...+$
$+2C_{50}^{49}100-100^{50}=2C_{50}^3100^{47}+2C_{50}^5100^{45}+...+2C_{50}^{49}100>0$. Отже, наше припущення вірне і $101^{50}>99^{50}+100^{50}$.

3. Знайдемо другий і третій член, використовуючи формулу загального члена розкладу степеня бінома:

$T_2 = T_{1+1} = C_m^1 \cdot (a\sqrt[3]{a})^{m-1} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)$, $T_3 = T_{2+1} = C_m^2 \cdot (a\sqrt[3]{a})^{m-2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2$. За умовою задачі різниця третього і другого членів дорівнює 35, тобто $C_m^2 - C_m^1 = 35$.Звідси

$\frac{m!}{2!\cdot(m-2)!} - \frac{m!}{(m-1)!} = 35$;

$\frac{m\cdot(m-1)}{2} - m = 35$;

$\frac{m^2 - m}{2} - m = 35$;

$\frac{m^2 - m - 2m}{2} = 35$;

$m^2 - 3m - 70 = 0$, звідси за т. Вієта знаходимо корені рівняння: $m_1 = -7 < 0$, $m_2 = 10$. Отже, m=10.

$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot (a\sqrt[3]{a})^{10-k} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^k = C_{10}^k \cdot a^{10-k} \cdot a^{\frac{10-k}{3}} \cdot a^{-\frac{k}{2}} = C_{10}^k \cdot a^{\frac{80-11k}{6}}$. Потрібно знайти член, який після спрощення містить a^6. Отже, $\frac{80-11k}{6} = 6$, звідси k=4,

$T_5 = T_{4+1} = C_{10}^4 \cdot a^6 = 210 \cdot a^6$.

4. Коефіцієнт третього члена від кінця в розкладі бінома $C_n^{n-2} = 45$, звідси

$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!} = 45$;

$\frac{n\cdot(n-1)}{2} = 45$;

$n^2 - n - 90 = 0$. За т. Вієта знаходимо корені рівняння: $n_1 = -9 < 0$, $n_2 = 10$.

Використовуємо формулу загального члена розкладу степеня бінома $\left(\sqrt[4]{z-1} + \sqrt[3]{z^2}\right)^{10}$: $T_{k+1} = C_{10}^k \cdot (\sqrt[4]{z-1})^{10-k} \cdot (\sqrt[3]{z^2})^k = C_{10}^k \cdot (\sqrt[4]{z-1})^{10-k} \cdot z^{\frac{2k}{3}}$. Потрібно знайти член, який після спрощення містить z^4. Отже, $\frac{2k}{3} = 4$, звідси k=6,

$T_7 = T_{6+1} = C_{10}^6 \cdot (\sqrt[4]{z-1})^4 \cdot z^4 = 210 \cdot (z-1) \cdot z^4$.

5. $(\sqrt{2} + \sqrt[4]{3})^{10} = C_{10}^0 \cdot (\sqrt{2})^{10} + C_{10}^1 \cdot (\sqrt{2})^9 \cdot \sqrt[4]{3} + C_{10}^2 \cdot (\sqrt{2})^8 \cdot (\sqrt[4]{3})^2 + C_{10}^3 \cdot (\sqrt{2})^7 \cdot (\sqrt[4]{3})^3 +$

$+ C_{10}^4 \cdot (\sqrt{2})^6 \cdot (\sqrt[4]{3})^4 + C_{10}^5 \cdot (\sqrt{2})^5 \cdot (\sqrt[4]{3})^5 + C_{10}^6 \cdot (\sqrt{2})^4 \cdot (\sqrt[4]{3})^6 + C_{10}^7 \cdot (\sqrt{2})^3 \cdot (\sqrt[4]{3})^7 + C_{10}^8 \cdot (\sqrt{2})^2 \cdot (\sqrt[4]{3})^8 +$

$+C_{10}^{9}\cdot(\sqrt{2})\cdot(\sqrt[4]{3})^{9}+C_{10}^{10}\cdot(\sqrt[4]{3})^{10}=2^{5}+10\cdot(\sqrt{2})^{9}\cdot\sqrt[4]{3}+45\cdot 2^{4}\cdot(\sqrt[4]{3})^{2}+120\cdot(\sqrt{2})^{7}\cdot(\sqrt[4]{3})^{3}+$

$+210\cdot 2^{3}\cdot 3+252\cdot(\sqrt{2})^{5}\cdot(\sqrt[4]{3})^{5}+210\cdot 2^{2}\cdot(\sqrt[4]{3})^{6}+120\cdot(\sqrt{2})^{3}\cdot(\sqrt[4]{3})^{7}+45\cdot 2\cdot 3^{2}+10\cdot\sqrt{2}\cdot(\sqrt[4]{3})^{9}+(\sqrt[4]{3})^{9}$

Раціональні члени розкладу $\left(\sqrt{2}+\sqrt[4]{3}\right)^{10}$: 2^{5}, $210\cdot 2^{3}\cdot 3$, $45\cdot 2\cdot 3^{2}$.

Відповіді на завдання для учнів ліцеїв з поглибленим вивченням математики

Тема 1. Основні поняття теорії множин

І рівень

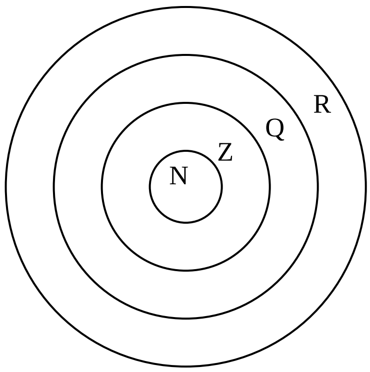
1. Множина чисел першої сотні, множина парних чисел, множина від'ємних чисел.; множина рівнобедрених трикутників, множина квадратів, довжини сторін яких парні числа менші 10, множина кругів; множина дерев у лісі, множина будинків, множина автомобілів.
2. а) множина натуральних чисел, множина непарних чисел менших 20, множина коренів рівняння $x^3-27=0$;

   б) квітень, червень, серпень, A = {5}, B = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

3. а) $\frac{7}{10}$, $\sqrt{25}$, 0,001, -1, 632;

   б) $\sqrt{2}$, $-\frac{1}{\sqrt{2}}$, π, 0, 123456…

4. в) множина натуральних чисел; д) множина непарних чисел.
5. ∅, {2}, {4}, {6}, {8}, {2, 4}, {2, 6}, {2, 8}, {4, 6}, {4, 8}, {6, 8}, {2, 4, 6}, {4, 6, 8}, {2, 4, 8}, {2, 6, 8}, {2, 4, 6}, {2, 4, 6, 8}.
6. в) $A \setminus B$={2, 4, 6}.
7. а) $A \cup B$={1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 10}.
8. г) $A \cap B$={8, 10}.
9. в) 0 $\in A$; г) 1 $\in A$.
10.



11. в) множина кіл, в яких діаметр менший від радіуса.
12. A=B, оскільки A = {-1, 0, 1} і B = {0, 1, -1}.

ІІ рівень

1. Дійсно порожня множина є підмножиною будь-якої множини.
2. $\varnothing$, {a}, {b}, {c}, {1}, {0}, {a, b}, {a, c}, {a, 1}, {a, 0}, {b, c}, {b, 1}, {b, 0}, {c, 1}, {c, 0}, {1, 0}, {a, b, c}, {a, c, 1}, {a, 1, 0}, {a, b, 1}, {a, b, 0}, {b, c, 1}, {b, c, 0}, {c, 1, 0}, {b, 1, 0}, {a, c, 0}, {a, b, c, 1}, {a, b, c, 0}, {a, b, 1, 0}, {b, c, 1, 0}, {a, c, 1, 0}, {a, b, c, 1, 0}.
3. $D \subset B \subset H \subset A \subset C \subset F$.
4. а) $\sqrt{2} \in A$; г) $3 \notin$ A.
5. а) A = { 0, 3, π};

   б) B = {-2, 2, 14};

   в) P = {5, 7, 11, 13} .
6. а) якщо A=[-2; 2], B=(-∞; 0), C=[0; 5), то $A \cap B \cap C = \varnothing$ і $A \cup B \cup C$=(-∞; 5);

   б) якщо A=(2; 10), B=(3; 9), C=(4; 8), то $A \cap B \cap C$ = (4; 8) і $A \cup B \cup C$=(2; 10);

   в) якщо A=(-5; 8), B=(-2; 10), C=(0; 13), то $A \cap B \cap C$=(0; 8) і $A \cup B \cup C$=(-5; 13);

   г) якщо A=(-∞; 4], B=[4; +∞), C=(0; 4), то $A \cap B \cap C$ = (0; 4) і $A \cup B \cup C$=(-∞;+∞).
7. а) За означенням різниці множин: *різницею* множин A та A називають множину, що складається з усіх елементів множини A, які не належать множині A. Таким чином, $A \setminus A \overset{озн.}{\Longleftrightarrow} \{x | x \in A \ i \ x \notin A\}$. Тільки порожня множина задовольняє цю властивість, оскільки жоден елемент не може одночасно належати і не належати одній і тій самій не порожній множині. Отже, $A \setminus A = \varnothing$;

   б) За означенням різниці множин: *різницею* множин A та $\varnothing$ називають множину, що складається з усіх елементів множини A, які не належать множині $\varnothing$. Таким чином, $A \setminus \varnothing \overset{озн.}{\Longleftrightarrow} \{x | x \in A \ i \ x \notin \varnothing\}$. Оскільки жоден елемент не належить порожній множині, то $A \setminus \varnothing = \{x | x \in A\} = A$.

III рівень

1. а) Оскільки $f(x) = 4x^2 - 8x + 1$, то $f'(x) = 8x - 8$. Тоді рівняння $f'(x) + 3 = x$ запишемо наступним чином $8x - 8 + 3 = x$. Розв'яжемо це рівняння:

$8x - 8 + 3 = x$;

$7x = 5$;

$x = \frac{5}{7}$.

Отже, шукана множина буде складатися з одного елемента $\{\frac{5}{7}\}$.

б) Ця нерівність рівносильна трьом системам:

1) $\begin{cases} x < 1, \\ 1 - x - x + 2 > x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x < 1, \\ x < 0; \end{cases}$ x < 0;

2) $\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x - 1 - x + 2 > x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} 1 \le x \le 2, \\ x < -2; \end{cases}$ розв'язків немає;

3) $\begin{cases} x > 2, \\ x - 1 + x - 2 > x + 3; \end{cases}$ $\begin{cases} x > 2, \\ x > 6; \end{cases}$ x > 6;

Отже, $M = \{x \mid x \in (-\infty; 0) \cup (6; +\infty)\}$.

2. Нехай A – множина цілих чисел, що діляться на 3, B – множина парних чисел і C – множина чисел, більших за 50, тоді $A \cap B$ – це множина парних цілих чисел, що діляться на 3, $(A \cap B) \setminus C$ – це множина парних цілих чисел, менших 50, що діляться на 3. Цій множині будуть належати такі числа: -6, 12, -48, 54.

3. Розв'яжемо рівняння $\sqrt{5x-1} - \sqrt{3x-2} = \sqrt{2x+1}$. Запишемо це рівняння у вигляді $\sqrt{5x-1} = \sqrt{3x-2} + \sqrt{2x+1}$. Піднесемо обидві частини рівняння до квадрату: $5x - 1 = 3x - 2 + 2x + 1 + 2\sqrt{(3x-2)(2x+1)}$. Звідси $\sqrt{(3x-2)(2x+1)} = 0$, $(3x-2)(2x+1) = 0$, тому $x_1 = \frac{2}{3}$ і $x_2 = -\frac{1}{2}$. Перевірка показує, що $x_1 = \frac{2}{3}$ є коренем даного рівняння, а $x_2 = -\frac{1}{2}$ – сторонній корінь. Отже, $A = \{\frac{2}{3}\}$.

Коренями рівняння $x^2 - 3x + 2 = 0$, за т. Вієта, є $x_1 = 1$ і $x_2 = 2$. Отже, $B = \{1,2\}$.

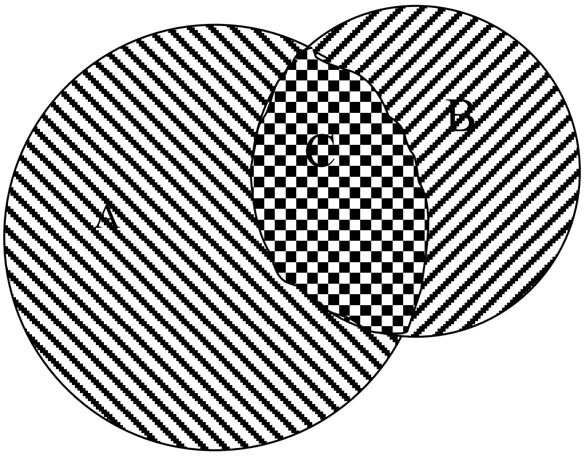
Рівняння $2x - x^2 = 0$ задовольняють два числа $x_1 = 0$ і $x_2 = 2$.

а) $H=A\cup B\cup C=\{0,\ \frac{2}{3},\ 1,\ 2\}$;

б) $H=(A\cup B)\setminus C=\{\frac{2}{3},\ 1\}$;

в) $H=(B\cap C)\cup A=\{\frac{2}{3},\ 2\}$.

4.



$C= A\cap B,\ U= A\cup B$

$N(A)=32$

$N(B)=21$

$N(C)=15$

$N(U)=40$.

5. Позначимо через A – множину учнів, які відвідують математичний гурток, через B – множину учнів, які відвідують фізичний гурток. Оскільки 10 учнів не відвідують жодного з гуртків, а у класі 35 учнів, то 25 учнів зайняті гуртковою діяльністю, з них 20 у математичному і 11 у фізичному гуртках. Використовуючи формулу $N(A\cup B) = N(A) + N(B) - N(A\cap B)$, знаходимо $N(A\cap B)$, тобто кількість учнів, які відвідують і математичний, і фізичний гуртки: $N(A\cap B) = N(A) + N(B) - N(A\cup B) = 20 + 11 - 25 = 31 - 25 = 6$.

Щоб обчислити кількість учнів, які відвідують тільки математичний гурток, треба знайти кількість елементів, що належать множині A і не належать множині B, тобто $N(A\setminus B)$.

Доведемо формулу $N(A\setminus B)=N(A) - N(A\cap B)$, тобто $A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$. За означеннями різниці множин маємо $A\setminus B \overset{озн.}{\Longleftrightarrow} \{x | x\in A\ і\ x\notin B\}$, перетину множин $A\cap B \overset{озн.}{\Longleftrightarrow} \{x | x\in A\ і\ x\in B\}$, звідси випливає, що в множину $A\setminus(A\cap B)$ будуть входити ті і тільки ті елементи, які належать множині A і не належать множині $A\cap B$. Це і будуть елементи множини $A\setminus B$. Формула доведена.

Використовуючи доведену формулу, обчислимо

$N(A\backslash B)=N(A)–(A\cap B)=20 – 6=14$.

Отже, 6 учнів відвідують математичний і фізичний гуртки, а 14 учнів тільки математичний гурток.

6. Позначимо:

A – множина студентів, які знають англійську мову;

B – множина студентів, які знають німецьку мову;

C– множина студентів, які знають французьку мову;

$A\cap B$ – множина студентів, які знають англійську і німецьку мови;

$A\cap C$ – множина студентів, які знають англійську і французьку мови;

$B\cap$C – множина студентів, які знають англійську і французьку мови;

$A\cap B\cap C$– множина студентів, які знають всі три мови.

Кількість студентів, які знають хоча б одну мову, буде обчислюватися за формулою:

$N(A\cup B\cup C)=N(A)+N(B)+N(C)–N(A\cap B)–N(A\cap C)–N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)=$ $=28+30+42–8–10–5+3=80$. А кількість студентів, які не знають жодної мови, буде $N=100–80=20$.

IV рівень

1. $N(A\cup B\cup C)=N(A\cup(B\cup C))=N(A)+N(B\cup C) – N((A\cap B)\cup(A\cap C))=$

$=N(A)+N(B)+N(C)–N(B\cap C) – N(A\cap B) – N(A\cap C)+N((A\cap B)\cap(A\cap C))=$

$=N(A)+N(B)+N(C)–N(A\cap B) – N(A\cap C) – N(B\cap C)+N(A\cap B\cap C)$. Звідси,

$N(A\cap B\cap C)=N(A\cup B\cup C)–N(A)–N(B)–N(C)+N(A\cap B)+N(A\cap C)+N(B\cap C)$.

2. Варіант №1.

Кількість студентів групи:

$N(A\cup H\cup \Phi)=N(A)+N(H)+N(\Phi)–N(A\cap H)–N(A\cap \Phi)–N(H\cap \Phi)+N(A\cap H\cap \Phi) =$ $=15+12+10–7–6–5+3=22$.

Тих, хто вивчав лише англійську:

$N(A\backslash(H\cup \Phi))=N(A)–N(A\cap H)–N(A\cap \Phi)+N(A\cap H\cap \Phi)=15–7–6+3=5$ студентів.

Тих, хто вивчав лише німецьку:

N(H\(A∪$Ф$))=N(H)–N(H∩A)–N(H∩$Ф$)+N(H∩A∩$Ф$)=12–7–5+3=3 студенти.

Тих, хто вивчав лише французьку:

N($Ф$\(A∪H))=N($Ф$)–N($Ф$∩A)–N($Ф$∩H)+N($Ф$∩A∩H)=10–6–5+3=2 студенти.

Тих, хто вивчав рівно одну мову:

N=N(A\(H∪$Ф$))+N(H\(A∪$Ф$))+N($Ф$\(A∪H))=5+3+2=10 студентів.

3. Варіант №1.

Кількість студентів, які вивчали хоча б одну мову знайдемо за формулою:

N($П$∪$С$∪$Б$)=N($П$)+N($С$)+N($Б$)–N($П$∩$С$)–N($П$∩$Б$)–N($С$∩$Б$)+N($П$∩$С$∩$Б$) =

=15+12+10–7–6–5+3=22. Не вивчали жодної з мов 25–22=3 студенти.

Вивчали рівно одну мову:

N= N($П$)+N($С$)+N($Б$)–2N($П$∩$С$)–2N($П$∩$Б$)–2N($С$∩$Б$)+3N($П$∩$С$∩$Б$)=

=15+12+10–2·7–2·6–2·5+3·3=15+12+10–14–12–10+9=10 студентів.

4. Розкриваємо дужки у виразі:

(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)(t+1)=(ab+a+b+1)(cd+c+d+1)(t+1)=(abcd+abc+abd+ab+
+acd+ac+ad+a+bcd+bc+bd+b+cd+c+d+1)(t+1)=abcdt+abct+abdt+abt+acdt+act+
+adt+at+bcdt+bct+bdt+bt+cdt+ct+dt+t+abcd+abc+abd+ab+acd+ac+ad+a+bcd+
+bc+bd+b++cd+c+d+1.

Множина доданків буде такою: {abcdt, abct, abdt, abcd, bcdt, acdt, bct, bdt, cdt, abc, abt, act, adt, abd, acd, bcd, ac, ad, bc, bt, at, bd, ab, ct, dt, cd, a, b, c, d, t, 1}.

5. Розв’яжемо рівняння $x^4-2x^3+x^2=0$. Винесемо x за дужки:

$x^2(x^2-2x+1)=0$;

$x^2(x-1)^2=0$, звідси x_1=0 і x_2=1. Отже, множина A={0, 1}.

Розв’яжемо рівняння $5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=0$. Оскільки число 1 є коренем рівняння, то многочлен $5x^4+9x^3-2x^2-4x-8$ ділиться на (x – 1). Поділивши „стовпчиком”, знайдемо частку, тобто $5x^3+14x^2+12x+8$.

$5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=(5x^3+14x^2+12x+8)(x-1)$. Оскільки число -2 є коренем рівняння $5x^4+9x^3-2x^2-4x-8=0$, то многочлен $5x^4+9x^3-2x^2-4x-8$ ділиться на (x+2). Поділивши „стовпчиком”, знайдемо частку, тобто $5x^2+4x+4$. Оскільки дискримінант квадратного тричлена D=-24<0, то цей тричлен на лінійні множники не розкладається. Отже, $(x-1)(x+2)(5x^2+4x+4)=0$ і множина $B=\{1, -2\}$. Звідси $A\backslash B=\{0\}$, $A\cup B=\{0, 1, -2\}$, $A\cap B=\{1\}$.

Тема 2. Основні правила комбінаторики
I рівень

1. Правило суми записано вірно.
2. в) $n(A\cup B)=n(A)+n(B) - n(A\cap B)$.
3. б) правила добутку.
4. в) $(m + n)$ способами.
5. б) 2.
6. а) 24.
7. в) 9.
8. а) 6.
9. 24 способами.
10. 6 елементів.
11. Задача розв'язана вірно.
12. Перерізом множин A і B повинна бути така множина C, яка складається з усіх тих і лише тих елементів, які належать кожній з даних множин. Оскільки твори Т. Шевченка і Л.Українки не мають нічого спільного між собою, то $A\cap B = \varnothing$.

II рівень

1. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти N=5·4·3=60 чисел, якщо кожну з цифр використовувати один раз.
2. З цифр 1, 2, 3, 4, 5 можна скласти N=5·5·5=125 чисел, якщо допускати повторення цифр у числі.
3. Розподілити золоту і срібну медалі між 6 командами можна 30 способами.
4. Сформувати команду космічного корабля з трьох осіб можна 4·3·5=60 способами.

5. Число різних шляхів з пункту A до C дорівнює $5 \cdot 3 = 15$, бо обравши один з п'яти можливих способів подорожі з пункту A до B, маємо три можливих способи подорожування від B до C.
6. Для написання реферату з математики учень може вибрати тему $10+15=25$ способами.
7. З літер слова „число" можна вибрати дві літери, одна з яких голосна, а друга– приголосна $3 \cdot 2=6$ способами.

III рівень

1. Непарних цифр всього є п'ять: 1, 3, 5, 7, 9. З множини даних п'яти цифр можна утворити двоцифрове число, цифри у якому різні $5 \cdot 4=20$ способами.
2. Всього можна скласти $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=720$ чисел. Серед цих чисел є шоста частина чисел, що закінчуються парною цифрою, тобто 4. Тому $720:6=120$ парних чисел можна скласти з цифр 1, 3, 4, 5, 7, 9. Непарних чисел відповідно буде $720–120 = 600$.
3. Число різних шляхів з пункту K до N дорівнює $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$, бо обравши один з двох можливих способів подорожі з пункту K до P, маємо три можливих способи подорожування від P до M, а від пункту M до пункту N можна скористатися також трьома шляхами.
4. Існує 300 способів, щоб назвати дитину 1 іменем. $300 \cdot 299=89700$ способів, щоб дати дитині 2 імені і $300 \cdot 299 \cdot 298=26730600$ способів, щоб назвати дитину трьома різними іменами. Тому $300+89700+26730600=26820600$ способів, щоб назвати дитину, якщо їй дають не більше трьох імен.
5. Всіх можливих п'ятизначних чисел буде $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=120$.

   а) Чисел, що розпочинаються п'ятіркою, буде $1 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=24$;

   б) чисел, які не розпочинаються з цифри 3, буде рівно 96, бо на першому місці в числі ми можемо поставити одну з 4 можливих цифр (1,2,4,5), на друге місце ми можемо вибрати також 4 цифри, а на третє – 3, на четверте – 2, на п'яте – 1, тому $4 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=96$;

   в) чисел, що розпочинаються з 53, ми можемо утворити $1 \cdot 1 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1=6$;

г) з 543 не починається 118 чисел, оскільки з 543 починається два числа, а всіх чисел існує 120.

6. Всіх чотиризначних чисел, які діляться на 5, є рівно $9\cdot10\cdot10\cdot2=1800$.

IV рівень

1. Кількість номерів, що складаються з

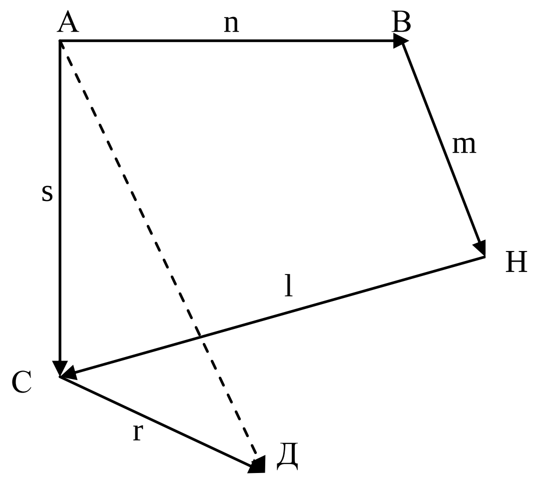
а) 1 літери і чотирьох цифр, буде дорівнювати $33\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=33\cdot10^4$;

б) 2 літер і чотирьох цифр – $33\cdot33\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=1089\cdot10^4$;

в) 3 літер і чотирьох цифр – $33\cdot33\cdot33\cdot10\cdot10\cdot10\cdot10=35937\cdot10^4$.

Число всіх таких номерів за правилом додавання дорівнює $(33+1089+35937)\cdot10^4=37059\cdot10^4$.

2.



Згідно з правилом добутку за маршрутом *АВНСД* з пункту *А* в пункт *Д* можна потрапити *n m l r* способами, а за маршрутом *АСД* – *sr* способами. Тому за правилом суми з *А* до *Д* можна потрапити *mnlr+sr* способами.

3. Якщо Іван вибрав яблуко, що він може зробити 12 способами, то Надійка пару яблуко-апельсин для кожного з виборів Івана може вибрати за правилом добутку $11\cdot10$ способами. Якщо ж Іван одним з 10 можливих способів вибрав апельсин, то Надія вибрати пару фруктів може $12\cdot9$ способами. За правилом добутку множина $B_1=\{(Я_I, Я_{н,} A_н)\}$складається з $12\cdot11\cdot10$ елементів, а множина $B_2=\{(A_I, Я_{н,} A_н)\}$ – з $10\cdot12\cdot9$ елементів. Отже, коли Іван вибере яблуко, Надійка має більше можливостей вибору. За правилом суми загальна кількість виборів:

$n=n(B_1 \cup B_2)=n(B_1)+n(B_2)=12\cdot 11\cdot 10+12\cdot 10\cdot 9=2400.$

4. Позначимо A_2 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2;

A_3 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 3;

A_4 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 4;

A_2A_3 – множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2 і 3;

$A_3\ A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 3 і 4;

$A_2\ A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2 і 4;

$A_2\ A_3A_4$– множину чисел, що не більші від 100 і діляться на 2, 3 і 4.

Кількість чисел $n(A_к)$, у кожній з множин $A_к$, к=2,3,5, легко знайти, скориставшись простим і майже очевидним правилом: добуток $k\cdot n(A_к)$ є найбільшим з натуральних чисел 1,2,...,100, що діляться на k. Звідси $n(A_2)=50$, $n(A_3)=33$, $n(A_4)=25$. Аналогічно, $n(A_2A_3)=16$, тому що $2\cdot 3\cdot 16=96$ – найбільше серед першої сотні натуральних чисел, що діляться на 6; $n(A_2A_4)=12$; $n(A_3A_4)=8$; $n(A_2A_3A_4)=4$, бо $2\cdot 3\cdot 4\cdot 4=96$. Тоді кількість чисел, що діляться або на 2, або на 3, або на 4 дорівнює: $n(A_2+A_3+A_4)=n(A_2)+n(A_3)+n(A_4)–n(A_2A_4)–n(A_3A_4)–n(A_2A_3)+n(A_2A_3A_4)=$

$=50+33+25–12–8–16+4=76$. А кількість чисел, жодне з яких не ділиться ні на 2, ні на 3, ні на 4, $n=100 – 76=24$.

5. Позначимо:

A – множина учнів, що відвідують секцію футболу, $n(A)=110$;

B – множина учнів, що відвідують волейбольну секцію, $n(B)=320$;

C – множина учнів, що відвідують секцію легкої атлетики, $n(C)=420$;

$A\cap B$ – множина учнів, що відвідують секцію футболу і волейболу, $n(A\cap B)=120$;

$A\cap C$ – множина учнів, що відвідують секцію футболу і легкої атлетики, $n(A\cap C)=90$;

$B\cap C$ – множина учнів, що відвідують секцію волейболу і легкої атлетики, $n(B\cap C)=140$;

$A\cap B\cap C$ – множина учнів, що відвідують всі три секції, $n(A\cap B\cap C)=70$.

Використаємо формулу включень і виключень для обчислення кількості вихованців, які відвідують хоча б одну секцію:

$n(A\cap B\cap C)=n(A)+n(B)+n(C)–n(A\cap B)–n(A\cap C)–n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C)=$ $=110+320+420–120–90–140+70=570$. Отже, 570 учнів гімназії зайняті спортивними секціями, а це становить 95%.

Тема 3. Перестановки, розміщення, комбінації без повторення елементів

І рівень

1. {2, 3, 4}, {4, 3, 2}, {3, 2, 4}, {4, 2, 3}, {2, 4, 3}, {3, 4, 2}.
2. {2, 3}, {3, 2}, {3, 4}, {4, 3}, {2, 4}, {4, 2}.
3. {2, 3}, {2, 4}, {3, 4}.
4. Якщо $n=1$, то $n!+1=1!+1=2$ і $2n! – 2=2\cdot 1! – 2= 0$;
   $n=2$, то $n!+1=2!+1=3$ і $2n! – 2=2\cdot 2! – 2= 2$;
   $n=3$, то $n!+1=3!+1=7$ і $2n! – 2=2\cdot 3! – 2= 10$;
   $n= 4$, то $n!+1=4!+1=25$ і $2n! – 2=2\cdot 4! – 2= 46$;
   $n= 5$, то $n!+1=5!+1=121$ і $2n! – 2=2\cdot 5! – 2= 238$.
5. $P_7 = 7! = 5040$ способів розподілу значків.
6. $C_{12}^4 = \frac{12!}{4!\cdot 8!} = 495$ способами можна вибрати з 12 учнів класу чергових в складі 4 осіб.
7. $A_{12}^3 = 12\cdot 11\cdot 10 = 1320$ способи розподілу премій.
8. Оскільки $n!$ це добуток n послідовних натуральних чисел, то приймати від’ємне значення він не може.
9. $0!=1$.
10. а) $\frac{5!}{2!+3!} = \frac{120}{2+6} = 15$;

б) $\frac{101!}{1!}=101!$;

в) $\frac{2+3!}{2}=\frac{2+6}{2}=4$;

г) $11-\frac{9!}{8!}=11-9=2$;

д) $4!+\frac{4!}{2!}=24+\frac{24}{2}=36$.

11. Треба взяти 5 елементів, бо $P_5=5!=120$.

12. а) $P_6-A_6^3=6!-6\cdot5\cdot4=720-120=600$;

б) $A_3^2+A_4^2=3\cdot2+4\cdot3=6+12=18$;

в) $P_3\cdot P_2=3!\cdot2!=6\cdot2=12$;

г) $\frac{A_5^2}{P_2}+\frac{A_{10}^5}{7P_5}=\frac{5\cdot4}{2!}+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{7\cdot5!}=\frac{20}{2}+\frac{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}{7\cdot1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}=10+36=46$.

13. а) $5!+8 < 6! - 3$;

б) $7!+1! < 8!$;

в) $0! = 1!$;

г) $3!+2! > 2!+3$;

д) $\frac{5!}{3!} < \frac{6!}{4!}$.

14. а) $3\cdot2\cdot1\cdot4\cdot5=5!$;

б) $1\cdot4\cdot3\cdot2\cdot5\cdot8\cdot7\cdot6\cdot9=9!$;

в) $7\cdot2\cdot5\cdot4\cdot3\cdot6\cdot1=7!$;

г) $1\cdot6\cdot3\cdot4\cdot5\cdot9\cdot2\cdot8\cdot6\cdot10=10!$.

15. а) $1\cdot2\cdot3\cdot4=4!$;

б) $3\cdot2\cdot1=3!$;

в) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6=6!$;

г) $1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5\cdot6\cdot7=7!$.

16. а) $2\cdot3\cdot4\cdot5=5!$;

г) $2\cdot4\cdot3\cdot1\cdot5=5!$.

II рівень

1. а) Двох чергових з однаковими обов’язками можна призначити $C_{10}^2=\frac{10!}{2!\cdot 8!}=45$ способами;

   б) двох чергових, один із яких старший можна призначити $A_{10}^2=10\cdot 9=90$ способами.

2. Трицифрових чисел без повторення цифр можна скласти в такій кількості $A_4^3=4\cdot 3\cdot 2=24$.

3. а) $\frac{7!}{5!}+\frac{(n+1)!}{n!}=\frac{5!\cdot 6\cdot 7}{5!}+\frac{n!(n+1)}{n!}=42+n+1=43+n$;

   б) $\frac{12!}{10!}-\frac{n!}{(n-2)!}=\frac{10!\cdot 11\cdot 12}{10!}-\frac{(n-2)!\cdot(n-1)\cdot n}{(n-2)!}=132-n\cdot(n-1)=132-n^2+1=133-n^2$;

   в) $\frac{(n-1)!}{n!}+\frac{5!}{6!}=\frac{(n-1)!}{(n-1)!\cdot n}+\frac{5!}{5!\cdot 6}=\frac{1}{n}+\frac{1}{6}=\frac{6+n}{6n}$;

   г) $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{k!}=\frac{1}{k!\cdot(k+1)}+\frac{1}{k!}=\frac{1+k+1}{k!\cdot(k+1)}=\frac{2+k}{(k+1)!}$;

   д) $\frac{(n-2)!}{n!}=\frac{(n-2)!}{(n-2)!\cdot(n-1)!\cdot n}=\frac{1}{n^2-n}$.

4. Використовуючи одну із властивостей комбінацій $C_n^k=C_n^{n-k}$, помічаємо, що виконуються рівності: $C_6^0=C_6^6$, $C_6^1=C_6^5$, $C_6^2=C_6^4$. Суму лівих частин даних рівностей прирівнюємо до суми правих частин і отримуємо рівність, яку потрібно було довести $C_6^0+C_6^1+C_6^2=C_6^4+C_6^5+C_6^6$.

5. а) $C_n^{n-2}+2n=9$;

   $\frac{n!}{(n-2)!2!}+2n=9$;

   $\frac{(n-1)n}{2}+2n=9$;

   $\frac{n^2-n+4n}{2}=9$;

   $n^2+3n-18=0$, звідси за т. Вієта n_1=-6 і n_2=3. Оскільки n_1=-6<0 не задовольняє означення комбінацій, то це значення – стороннє.

   В і д п о в і д ь. 3.

б) $3C_{n+1}^2 - 2A_n^2 = n$;

$\frac{3(n+1)!}{2!(n-1)!} - 2n(n-1) = n$;

$\frac{3n(n+1)}{2} - 2n(n-1) = n$;

$\frac{3n^2 + 3n - 4n^2 + 4n - 2n}{2} = 0$;

$-n^2 + 5n = 0$;

$n(-n+5) = 0$, звідси n_1=0 і n_2=5. Оскільки n_1=0 не задовольняє означення комбінацій і розміщень, то це значення – стороннє.

Відповідь. 5.

в) $C_{n+1}^{n-1} = 6$;

$\frac{(n+1)!}{(n-1)!2!} = 6$;

$\frac{n(n+1)}{2} = 6$;

$n^2 + n - 12 = 0$, звідси за т. Вієта n_1=-4 і n_2=3. Оскільки n_1=-4<0 не задовольняє означення комбінацій, то це значення – стороннє.

Відповідь. 3.

г) $C_{n-1}^{n-2} = n^2 - 13$;

$\frac{(n-1)!}{(n-2)!1!} = n^2 - 13$;

$\frac{(n-2)!(n-1)}{(n-2)!} = n^2 - 13$;

$n - 1 = n^2 - 13$;

$n^2 - n - 12 = 0$, звідси за т. Вієта n_1=-3 і n_2=4. Оскільки n_1=-3<0 не задовольняє означення комбінацій, то це значення – стороннє.

Відповідь. 4.

6. а) $P_1 \cdot A_2^1 + P_2 \cdot A_3^2 + P_3 \cdot A_4^3 + P_4 \cdot A_5^4 - P_1 \cdot P_2 \cdot P_3 \cdot P_4 = 1! \cdot 2 + 2! \cdot 3 \cdot 2 + 3! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 + 4! \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 -$

$- 1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5! = 2 + 12 + 144 + 2880 - 288 = 2750$;

б) $\left(\frac{P_5}{A_5^4} + \frac{P_4}{A_5^3} + \frac{P_3}{A_5^2} + \frac{P_2}{A_5^1}\right) \cdot A_5^2 = \left(\frac{5!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} + \frac{4!}{5 \cdot 4 \cdot 3} + \frac{3!}{5 \cdot 4} + \frac{2!}{5}\right) \cdot 5 \cdot 4 = \left(1 + \frac{2}{5} + \frac{3}{10} + \frac{2}{5}\right) \cdot 20 =$

$$=\frac{10+4+3+4}{10}\cdot 20=21\cdot 2=42;$$

в) $\frac{A_5^3-A_5^2}{P_2}+\frac{P_5}{P_2}=\frac{5\cdot 4\cdot 3-5\cdot 4}{2!}+\frac{5!}{2!}=\frac{40}{2}+\frac{120}{2}=20+60=80;$

г) $\frac{\frac{1}{3}C_6^2-\frac{1}{28}C_8^3-\frac{1}{65}C_{15}^3}{P_3\cdot A_5^3}=\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{6!}{2!\cdot 4!}-\frac{1}{28}\cdot\frac{8!}{3!\cdot 5!}-\frac{1}{65}\cdot\frac{15!}{3!\cdot 12!}}{3!\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{5-2+7}{360}=\frac{10}{360}=\frac{1}{36}.$

7. Всього парних цифр буде: 0, 2, 4, 6, 8. З множини даних п'яти цифр можна вибрати двохелементну впорядковану множину A_5^2= 5·4=20 способами. З цієї множини треба відняти ті числа, на місці десятків яких знаходиться цифра нуль (бо в такому разі число буде однозначне). З нулем на першому місці існує всього 4 числа: 02, 04, 06, 08. Отже, 20–4=16 двозначних чисел можна одержати в такому випадку.

8. Всіх можливих п'ятизначних чисел буде 5!=120.

а) Чисел, що починаються з цифри 7, буде 1·4·3·2·1=24;

б) чисел, які не розпочинаються з цифри 9, буде рівно 96, бо на першому місці в числі ми можемо поставити одну з 4 можливих цифр (5,6,7,8), на друге місце ми можемо вибрати також 4 цифри, а на третє – 3, на четверте – 2, на п'яте – 1, тому 4·4·3·2·1=96;

в) чисел, що розпочинаються з 56, ми можемо утворити 1·1·3·2·1=6;

г) з 987 не починається 118 чисел, оскільки з 987 починається два числа, а всіх чисел існує 120.

9. Загальна кількість можливих варіантів шикування в колону 6 учнів P_6=6!=720. З них у шостій частині колона буде починатися з учня *Д*. Тому: 1) n_1=720:6=120. Якщо ж *В* мусить стояти відразу за *Б*, то, вважаючи пару (*Б*,*В*) одним цілим, дістанемо, що 2) n_2=P_5! =120 – кількість способів, в яких *В* буде стояти відразу за *Б*.

10. Кількість різних способів освітлення, при яких горить 6 лампочок з 10, буде рівна числу $C_{10}^6=\frac{10!}{6!4!}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=7\cdot 3\cdot 10=210.$ Всього способів освітлення може бути: 2^{10}–1=1024–1=1023.

III рівень

1\. а) $A_x^{x-3} = xP_{x-2}$;

$x(x-1)(x-2)...5\cdot 4 = x(x-2)!$;

$x(x-1)(x-2)\cdot ...\cdot 5\cdot 4 = x\cdot 1\cdot 2\cdot 3\cdot ...\cdot (x-2)$;

$x-1=6$;

$x=7$.

Відповідь. 7.

б) $\dfrac{A_x^5 + A_x^3}{A_x^3} = 43$;

$\dfrac{A_x^5}{A_x^3} + 1 = 43$;

$\dfrac{A_x^5}{A_x^3} = 42$;

$\dfrac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)\cdot(x-3)\cdot(x-4)}{x\cdot(x-1)\cdot(x-2)} = 42$;

$(x-3)\cdot(x-4) = 42$;

$x^2 - 7x + 12 = 42$;

$x^2 - 7x - 30 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-3, x_2=10. Оскільки x_1=-3<0 не задовольняє означення розміщення, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 10.

в) $A_7^x = 4A_7^{x-1}$;

$\dfrac{A_7^x}{A_7^{x-1}} = 4$;

$\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot ....\cdot(9-x)\cdot(8-x)}{7\cdot 6\cdot 5\cdot ....\cdot(9-x)} = 4$;

$8 - x = 4$;

x=4.

Відповідь. 4.

г) $A_x^2 = 42$ (де x – натуральне число, яке не менше 2);

$x\cdot(x-1) = 42$;

$x^2 - x - 42 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-6, x_2=7. Оскільки x_1=-6<2 не задовольняє умову рівняння, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 7.

д) $C_x^{x-3}+C_x^{x-2}=15(x-1)$;

$$\frac{x!}{(x-3)!\cdot 3!}+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-3)!\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x}{(x-3)!3!}+\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!2!}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot x}{6}+\frac{(x-1)\cdot x}{2}=15(x-1);$$

$$\frac{(x-2)\cdot(x-1)\cdot x+3x\cdot(x-1)}{6}=15(x-1);$$

$$\frac{x\cdot(x-1)\cdot(x-2+3)}{6}=15(x-1);$$

$$\frac{x\cdot(x+1)}{6}=15;$$

$x^2+x-90=0$, звідси за т. Вієта x_1=-10, x_2=9. Оскільки x_1=-10<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 9.

е) $A_{x-2}^2+C_x^{x-2}=101$;

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{x!}{(x-2)!\cdot 2!}=101;$$

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!\cdot 2}=101;$$

$$(x-2)\cdot(x-3)+\frac{(x-1)\cdot x}{2}=101;$$

$$\frac{2(x-2)\cdot(x-3)+x\cdot(x-1)}{2}=101;$$

$$\frac{2(x^2-5x+6)+x^2-x}{2}=101;$$

$$2x^2-10x+12+x^2-x=202;$$

$$3x^2-11x-190=0;$$

$$D=b^2-4ac=121+2280=2401;$$

$x_1=\frac{11-49}{6}=-\frac{38}{6}=-\frac{19}{3}$ - сторонній корінь;

$$x_2=\frac{11+49}{6}=10.$$

Відповідь. 10.

є) $C_{x+2}^{4} = x^2 - 1$;

$$\frac{(x+2)!}{4!\cdot(x-2)!} = x^2 - 1;$$

$$\frac{(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{24(x-2)!} = (x-1)(x+1);$$

$$\frac{(x-1)\cdot x\cdot(x+1)\cdot(x+2)}{24} = (x-1)(x+1);$$

$$\frac{x\cdot(x+2)}{24} = 1;$$

$x^2 + 2x - 24 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-6, x_2=4. Оскільки x_1=-6<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 4.

ж) $\dfrac{x!}{(x-4)!} = \dfrac{12x!}{(x-2)!}$;

$$\frac{(x-4)!\cdot(x-3)\cdot(x-1)\cdot x}{(x-4)!} = \frac{12(x-2)!\cdot(x-1)\cdot x}{(x-2)!};$$

$$(x-3)\cdot(x-2)\cdot(x-1)\cdot x = 12x\cdot(x-1);$$

$$(x-3)\cdot(x-2) = 12;$$

$$x^2 - 5x + 6 = 12;$$

$x^2 - 5x - 6 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-1, x_2=6. Оскільки x_1=-1<0, а -1! не існує, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 6.

2. $\mathrm{F} = \dfrac{\mathrm{A}_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} - \dfrac{\mathrm{A}_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$; $\mathrm{F}_1 = \dfrac{\mathrm{A}_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}}$; $F_2 = \dfrac{\mathrm{A}_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}}$;

$$\mathrm{F}_1 = \frac{\mathrm{A}_{49}^{12} + A_{49}^{11}}{A_{49}^{10}} = (\mathrm{A}_{49}^{12} + A_{49}^{11})\cdot\frac{1}{A_{49}^{10}} = \left(\frac{49!}{37!} + \frac{49!}{38!}\right)\cdot\frac{39!}{49!} = \frac{39!}{37!} + \frac{39!}{38!} = 39\cdot 38 + 39 = 39(38+1) = 39^2;$$

$$\mathrm{F}_2 = \frac{\mathrm{A}_{17}^{10} + A_{17}^{9}}{A_{17}^{8}} = (\mathrm{A}_{17}^{10} + A_{17}^{9})\cdot\frac{1}{A_{17}^{8}} = \left(\frac{17!}{7!} + \frac{17!}{8!}\right)\cdot\frac{9!}{17!} = \frac{9!}{7!} + \frac{9!}{8!} = 9\cdot 8 + 9 = 9(8+1) = 9^2;$$

$$F = F_1 + F_2 = 39^2 - 9^2 = (39-9)(39+9) = 30\cdot 48 = 1440.$$

3. а) $$\frac{P_{n+2}}{A_n^k \cdot P_{n-k}} + \frac{C_{15}^{8} + 2C_{15}^{9} + C_{15}^{10}}{C_{17}^{10}} = \frac{(n+2)!}{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)\cdot(n-k)!} + \frac{\dfrac{15!}{8!7!} + \dfrac{2\cdot 15!}{9!6!} + \dfrac{15!}{10!5!}}{\dfrac{17!}{10!7!}} =$$

$$=\frac{n!(n+1)(n+2)}{n!}+\frac{6435+10010+3003}{19448}=(n+1)(n+2)+\frac{19448}{19448}=n^2+3n+3;$$

б) $$\frac{n!}{(n-3)!A_n^2}-\frac{P_{n+1}}{(n+2)!}=\frac{(n-3)!(n-2)(n-1)n}{(n-3)!n(n-1)}-\frac{(n+1)!}{(n+1)!(n+2)}=n-2-\frac{1}{n+2}=$$

$$=\frac{n^2-4-1}{n+2}=\frac{n^2-5}{n+2};$$

в) $$\frac{1}{n+2}\left(C_{n+3}^2-2C_{n+2}^3+C_{n+2}^2\right)+\frac{n^2-5n}{6}=\frac{1}{n+2}\left(\frac{(n+3)!}{2!(n+1)!}-\frac{2(n+2)!}{3!(n-1)!}+\frac{(n+2)!}{2!n!}\right)+\frac{n^2-5n}{6}=$$

$$=\frac{1}{n+2}\left(\frac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{2!(n+1)!}-\frac{2(n-1)!n(n+1)(n+2)}{6(n-1)!}+\frac{n!(n+1)(n+2)}{2!n!}\right)+\frac{n^2-5n}{6}=$$

$$=\frac{1}{n+2}\left(\frac{n^2+5n+6}{2}-\frac{n^3+3n^2+2n}{3}+\frac{n^2+3n+2}{2}\right)+\frac{n^2-5n}{6}=$$

$$=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{3n^2+15n+18-2n^3-6n^2-4n+3n^2+9n+6}{6}+\frac{n^2-5}{6}=\frac{1}{n+2}\cdot\frac{-2n^3+20n+24}{6}+$$

$$+\frac{n^2-5}{6}=\frac{-2n^3+20n+24}{6(n+2)}+\frac{n^2-5}{6}=\frac{-2n^3+20n+24+n^3+2n^2-5n-10}{6(n+2)}=\frac{-n^3+2n^2+15n+14}{6(n+2)}$$

4. $C_5^0+2C_5^1+2^2C_5^2+2^3C_5^3+2^4C_5^4+2^5C_5^5$;

Згідно з формулою Ньютона при будь-якому x вірна рівність: $(x+2)^5=C_5^0x^5+C_5^1x^4 2^1+C_5^2x^3 2^2+C_5^3x^2 2^3+C_5^4x^1 2^4+C_5^5 2^5$. Підставивши в ній x=1, одержимо: $(1+2)^5=C_5^0+C_5^1 2^1+C_5^2 2^2+C_5^3 2^3+C_5^4 2^4+C_5^5 2^5$. Отже, шукана сума дорівнює $3^5=243$.

5. Для кожної з C_8^4 вибірок четвірки вантажних автомобілів для обміну першою автоколоною друга може запропонувати C_{13}^4 варіантів вибору своєї четвірки автобусів. За правилом добутку $n=C_{13}^4C_8^4=50050$ способів, щоб здійснити обмін.

6. Три парні з 4 та дві непарні з 5 цифр можна вибрати $C_4^3\cdot C_5^2$ способами. Кожну з таких вибірок можна розмістити по 5 місцях P_5 способами. Звідси $n=P_5\cdot C_4^3\cdot C_5^2=4800$.

7. Щоб обрати з 15 осіб голову, заступника і секретаря, можна скористатися A_{15}^3 способами. Для кожного із цих способів обрати з 12 чоловік, що

залишились, трьох членів редакційної комісії можна C_{12}^{3} способами. За правилом добутку одержимо: $A_{15}^{3} \cdot C_{12}^{3} = 600600$.

8. Щоб обрати з 30 осіб голову і секретаря, можна скористатися A_{30}^{2} способами. Для кожного із цих способів обрати з 28 чоловік, що залишились, п'ятьох членів редакційної комісії можна C_{28}^{5} способами. За правилом добутку одержимо: $A_{30}^{2} \cdot C_{28}^{5} = 85503600$.

IV рівень

1. Вибрати 15 чоловік з 25 для нагороди книгами можна C_{25}^{15} способами. Для кожного з обраних складів призерів книги можна розподілити $PP_{15}(5,3,7)$ способами. Звідси $n = C_{25}^{15} \cdot PP_{15}(5,3,7) = \dfrac{25!}{15! \cdot 10!} \cdot \dfrac{15!}{5! \cdot 3! \cdot 7!} = \dfrac{25!}{10! \cdot 5! \cdot 3! \cdot 7!}$.

2. (1 спосіб)

З 5 цифр можна утворити однозначні, ... ,п'ятизначні числа, однозначних натуральних чисел буде чотири (n_1=4). Двозначних чисел буде $n_2 = A_5^2 - A_4^1 = 20 - 4 = 16$, бо чотири з розміщень $A_5^2 = 20$ визначають однозначні числа (з нулем на першому місці). Вибравши три цифри з п'яти і розмістивши їх на місцях для числа сотень, десятків і одиниць, отримаємо $A_5^3 = \dfrac{5!}{2!} = 60$ чисел, серед яких будуть і двозначні числа (з нулем на першому місці). Оскільки для побудови такого двозначного числа з чотирьох цифр 2, 4, 6, 8 потрібно вибрати дві і розмістити їх в розрядах десятків та одиниць, то кількість двозначних чисел без нуля (він уже стоїть на першому місці) дорівнює A_4^2. Звідси, загальна кількість тризначних чисел $n_3 = A_5^3 - A_4^2 = 60 - 12 = 48$. Аналогічно, $n_4 = A_5^4 - A_4^3 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$; $n_5 = A_5^5 - A_4^4 = P_5 - P_4 = 5! - 4! = 120 - 24 = 96$. Загальна кількість чисел за правилом додавання буде дорівнювати n=4+16+48+96+96=260.

(2 спосіб)

З 5 цифр можна утворити однозначні, двозначні, ..., п'ятизначні числа. Однозначних натуральних чисел буде чотири, бо одну цифру з чотирьох можна вибрати 4 способами. Двозначних чисел буде 4·4=16. Кількість тризначних чисел дорівнює 4·4·3=48. Чотиризначних чисел за правилом множення можемо утворити 4·4·3·2=96, п'ятизначних також 4·4·3·2·1=96. Загальна кількість чисел за правилом додавання буде дорівнювати n=4+16+48+96+96=260.

3. Обрати 5 чоловік із 7 бігунів і 3 стрибунів, щоб серед них обов'язково був би хоч один стрибун, можна таким чином: $C_7^4 \cdot C_3^1$ або $C_7^3 \cdot C_3^2$, або $C_7^2 \cdot C_3^3$. За правилом додавання загальна кількість способів дорівнює:

$$C_7^4 \cdot C_3^1 + C_7^3 \cdot C_3^2 + C_7^2 \cdot C_3^3 = \frac{7!}{4!\cdot 3!}\cdot\frac{3!}{2!} + \frac{7!}{3!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{2!\cdot 1!} + \frac{7!}{2!\cdot 5!} = \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2} + \frac{5\cdot 6\cdot 7}{2} + \frac{6\cdot 7}{2} =$$

$$= 15\cdot 7 + 15\cdot 7 + 3\cdot 7 = 231.$$

4. Розкладемо дане число на прості множники: $210 = 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Число дільників, які складені з добутку двох простих множників, дорівнює $C_4^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2} = 2\cdot 3 = 6$ (а саме числа 6, 10, 14, 15, 21, 35); число дільників, які складені з добутку трьох простих множників, дорівнює $C_4^3 = 4$ (а саме числа 30, 42, 70, 105); число простих дільників дорівнює 4 (а саме числа 2, 3, 5, 7). Крім того дільниками є ще числа 1 і 210. Згідно із правилом суми число всіх дільників дорівнює 6+4+4+1+1=16.

5. Людей, що не мають зубів, є C_{32}^0, що мають один зуб C_{32}^1 ,..., що мають всі зуби C_{32}^{32}. Мешкає там всього $C_{32}^0 + C_{32}^1 + ... + C_{32}^{32} = 2^{32} = 2147483648$ осіб.

6. $$\frac{C_n^3 C_n^1}{(C_n^2)^2} + \frac{P_n P_{n+1}(n^2-n)^2}{4(C_n^2)^2(n!)^2} = \frac{\frac{n!}{3!(n-3)!}\cdot\frac{n!}{1!(n-1)!}}{(C_n^2)^2} + \frac{n!(n+1)!(n^2-n)^2}{4(C_n^2)^2(n!)^2} = \frac{\frac{(n-2)(n-1)n}{6}\cdot\frac{n}{1}}{(C_n^2)^2} +$$

$$+\frac{(n!)^2(n+1)(n^2-n)^2}{4(C_n^2)^2(n!)^2} = (n^2-n)\left(\frac{n^2-2n}{6(C_n^2)^2} + \frac{(n+1)(n^2-n)}{4(C_n^2)^2}\right) = (n^2-n)\left(\frac{2n^2-4n+3(n+1)(n^2-n)}{12(C_n^2)^2}\right) =$$

$$= (n^2-n)\left(\frac{2n^2-4n+3n^3-3n}{12\left(\frac{n!}{2!(n-2)!}\right)^2}\right) = (n^2-n)\left(\frac{3n^3+2n^2-7n}{12\left(\frac{(n-1)n}{2}\right)^2}\right) = n(n-1)\left(\frac{n(3n^2+2n-7)}{3(n-1)^2 n^2}\right) = \frac{3n^2+2n-7}{3(n-1)}$$

Тема 4. Перестановки, розміщення, комбінації з повтореннями елементів
І рівень

1. Кортеж довжини *m,* складений з елементів n-елементної множини, називається *розміщенням з повтореннями* з n елементів по m і позначається AA_n^m .

Перестановкою з повтореннями з елементів *a, b, c, ... , l,* в якій елементи *a, b, c, ... , l,* повторюються відповідно k_1, k_2, k_3 , ..., k_m разів, називається сукупність розміщених у певному порядку елементів, що складається з k_1 елементів a, k_2 елементів b, k_3 елементів c і т. д., k_m елементів l.

Число $k_1 + k_2 + k_3 + ... + k_m = n$ називають порядком перестановки з повтореннями.

Комбінаціями з повтореннями з n різних елементів по m називають будь-які групи, що містять m елементів, кожен з яких є одним із заданих n елементів і позначають CC_n^m .

2. $AA_n^m = n^m,\ PP_n(k_1,k_2,...,k_m) = \dfrac{n!}{k_1!k_2!...k_m!}.,\ CC_n^m = \dfrac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!} = C_{n+m-1}^m.$

3. а) AA_4^6 ; б) AA_3^2 ; в) AA_8^5 ; г) AA_{10}^7.

4. $PP_9(1,3,5)$

5. а) CC_{10}^{20}; б) CC_{16}^4; в) CC_8^{12}.

6. а) AA_5^4 .

7. в) CC_4^8 .

8. а) $AA_3^2 = 3^2 = 9$; б) $AA_5^3 = 5^3 = 125$; в) $CC_4^2 = C_{4+2-1}^2 = C_5^2 = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!} = 10$;

г) $CC_3^1 = C_{3+1-1}^1 = C_3^1 = \dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$.

9. {2, 2}, {2, 4}, {4, 8}, {8, 4}, {4, 2}.

10. {2, 2}, {2, 4}, {4, 8}, {4, 4}, {8, 2}.

11. 0!=1, $AA_1^1 = 1^1 = 1$. Отже, ці числа рівні.

12. а) $PP_5(2,3) = \dfrac{5!}{2!\cdot 3!}$; б) $CC_8^4 = C_{8+4-1}^4$; в) $AA_5^4 = 5^4$.

II рівень

1. а) $AA_3^2 = 3^2 = 9$;

   б) $AA_3^3 = 3^3 = 27$;

   в) $AA_4^2 = 4^2 = 16$.

2. а) $PP_5(3,2) = \dfrac{5!}{3!\cdot 2!} = 10$;

   б) $PP_6(1,1,4) = \dfrac{6!}{1!\cdot 1!\cdot 4!} = 30$;

   в) $PP_7(3,4) = \dfrac{7!}{3!\cdot 4!} = 35$.

3. а) $CC_8^5 = C_{12}^5 = \dfrac{12!}{5!\cdot 7!} = 792$; б) $CC_6^4 = C_9^4 = \dfrac{9!}{4!\cdot 5!} = 126$; в) $CC_3^7 = C_9^7 = \dfrac{9!}{7!\cdot 2!} = 36$.

4. а) $AA_4^1 > AA_1^4$; б) $CC_2^3 < CC_3^2$; в) $PP_5\ (2,3) = PP_5(3,2)$.

5. а) $AA_2^5 = 2^5 = 32$, $AA_3^5 = 3^5 = 243$, $AA_4^5 = 4^5 = 1024$;

   б) $CC_2^5 = C_6^5 = 6$, $CC_3^5 = C_7^5 = 21$, $CC_4^5 = C_8^5 = 56$;

   в) $PP_5(2,2,1) = \dfrac{5!}{2!\cdot 2!\cdot 1!} = 30$.

6. *Кортеж* – це впорядкована n-ка елементів, вибраних з деяких множин $X_1,$ $X_2, \ldots, X_n$, де множини $X_1, X_2, \ldots, X_n$ можуть збігатися чи мати окремі спільні елементи. В кортежі компоненти можуть повторюватись. Компонентами кортежу можуть бути кортежі.

   Множина – це сукупність елементів певної природи. Множини бувають впорядковані і невпорядковані.

7. а) $5! < AA_5^3$, бо 5!=120, а $AA_5^3 = 5^3 = 125$;

   б) $5!+5 = AA_5^3$, бо 5!+5=125, а $AA_5^3 = 5^3 = 125$;

   в) $PP_3(1,2) = 3!-3$, бо $PP_3(1,2) = \dfrac{3!}{1!\cdot 2!} = 3$, а 3!-3=6-3=3;

   г) $CC_3^4 < CC_4^3$, бо $CC_3^4 = C_6^4 = \dfrac{6!}{4!\cdot 2!} = 15$, а $CC_4^3 = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!\cdot 3!} = 20$;

   д) $PP_4(1,1,2) > AA_3^2$, бо $PP_4(1,1,2) = \dfrac{4!}{1!\cdot 1!\cdot 2!} = 12$, а $AA_3^2 = 3^2 = 9$;

   е) $PP_5(2,1,2) < CC_8^3$, бо $PP_5(2,1,2) = \dfrac{5!}{2!\cdot 1!\cdot 2!} = 30$, а $CC_8^3 = C_{10}^3 = \dfrac{10!}{3!\cdot 7!} = 120$.

III рівень

1. а) Число різних слів, які дістанемо, переставляючи літери слова "математика", дорівнює $\frac{10!}{2!3!2!}=151200$, бо кількість різних перестановок з повтореннями з елементів м, а, т, е, и, к, в яких ці елементи повторюються відповідно 2, 3, 2, 1, 1, 1 разів, дорівнює $PP_{10}(2,3,2,1,1,1)=\frac{10!}{2!\cdot 3!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=151200$.

   б) Число різних слів, які дістанемо, переставляючи літери слова "комбінаторика", дорівнює $\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{13!}{6}$, бо кількість різних перестановок з повтореннями з елементів к, о, м, б, і, н, а, т, р, и, в яких ці елементи повторюються відповідно 2, 2, 1, 1, 1, 1, 2, 1, 1, 1 разів, дорівнює $PP_{13}(2,2,1,1,1,1,2,1,1,1)= PP_{13}(2,2,1,1,1,1,2,1,1,1)=\frac{13!}{2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!\cdot 1!}=\frac{13!}{6}$.

   в) Число різних слів, які дістанемо, переставляючи літери слова "Міссісіпі", дорівнює $\frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!}=2520$, бо кількість різних перестановок з повтореннями з елементів м, і, с, п, в яких ці елементи повторюються відповідно 1, 4, 3, 1, разів, дорівнює $PP_9(1,4,3,1)=\frac{9!}{1!\cdot 4!\cdot 3!\cdot 1!}=2520$.

   г) Число різних слів, які дістанемо, переставляючи літери слова "абракадабра", дорівнює $\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=83160$, бо кількість різних перестановок з повтореннями з елементів а, б, р, к, д, в яких ці елементи повторюються відповідно 5, 2, 2, 1, 1 разів, дорівнює $PP_{11}(5,2,2,1,1)=\frac{11!}{5!\cdot 2!\cdot 2!\cdot 1!\cdot 1!}=83160$.

2. Кількість тістечок, які можна вибрати, буде дорівнювати числу комбінацій з повтореннями з 14 різних елементів по 5: $CC_{14}^5=C_{18}^5=\frac{18!}{5!13!}=\frac{14\cdot 15\cdot 16\cdot 17\cdot 18}{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=8568.$

3. Кожний набір – кортеж довжиною 4 та складу 4 (на перше місце літеру можна вибрати чотирма способами, на друге – чотирма, ..., на четверте – чотирма, оскільки кожна з літер на 4 картках). Звідси $n=AA_4^4=4^4=256$.

4. Дві зелені і чотири червоні лампочки можна розташувати в ряд $PP_6(2,4)=\frac{6!}{2!\cdot 4!}=15$ способами.
5. В наявності маємо два види монет: п’ятикопійкові та двокопійкові. Оскільки порядок розміщення вибраних монет не має значення, то відповідь дістанемо, скориставшись формулою для обчислення комбінацій з 2 елементів по 4, а саме: $CC_2^4=C_5^4=\frac{5!}{4!\cdot 1!}=5$.
6. На перше місце в числі можемо поставити одну з шести можливих цифр, на друге і третє місця можемо вибрати також по одній з шести можливих цифр. Отже, для вибору будь-якого з трьох компонентів кортежу маємо шість можливостей, то, скориставшись правилом добутку, дістанемо: $AA_6^3=6^3=216$ чисел.

IV рівень

1. З множини даних шести цифр можна вибрати двохелементний кортеж $A_6^2=6^2=36$ способами. З цієї множини чисел треба відняти ті числа, на місці десятків яких знаходиться цифра нуль (бо в такому разі число буде однозначне). З нулем на першому місці існує всього 5 чисел: 01, 03, 05, 04 і 06. Також потрібно відкинути ще один елемент з нулем на першому і другому місцях. Отже, 36–5–1=30 двозначних чисел можна одержати в такому випадку.
2. Щоб дізнатися про кількість семизначних чисел, у кожного з яких цифра 6 трапляється три, а цифра 5 – чотири рази, потрібно знайти кількість перестановок з повтореннями з 2 елементів 5 і 6, в яких ці елементи повторюються відповідно 3 і 4 рази: $PP_7(3,4)=\frac{7!}{3!\cdot 4!}=35$.
3. Вибрати 15 чоловік з 30 для нагороди книгами можна C_{30}^{15} способами. Для кожного з обраних складів призерів книги можна розподілити $PP_{15}(3,4,8)$ способами. Звідси $n=C_{30}^{15}\cdot PP_{15}(3,4,8)=\frac{30!}{(15!)^2}\cdot\frac{15!}{3!\cdot 4!\cdot 8!}=\frac{30!}{15!\cdot 3!\cdot 4!\cdot 8!}$.

4. П’ятизначних номерів буде $AA_{10}^5 = 10^5 = 100000$, шестизначних номерів буде $AA_{10}^6 = 10^6 = 1000000$ і семизначних номерів буде $AA_{10}^7 = 10^7 = 1000000$. Використовуючи правило додавання, отримаємо загальну кількість телефонних номерів, які містять не менше п’яти цифр і не більше, ніж сім цифр: $AA_{10}^5 + AA_{10}^6 + AA_{10}^7 = 11100000$.

5. Для утворення двоцифрових чисел, у десятковому записі яких немає цифр 0, 1, 3, 5, 6, 8, 9, ми маємо три цифри 2, 4, 7. З множини даних трьох цифр можна вибрати двохелементний кортеж $AA_3^2 = 3^2 = 9$ способами. Випишемо ці числа: 22, 44, 77, 24, 47, 27, 42, 74, 72. Цифри розташовані у неспадному порядку у шести числах: 22, 44, 77, 24, 47, 27. Знайдемо суму цих чисел: 22+44+77+24+47+27=241.

Тема 5. Формула Ньютона
І рівень

1. $(a+b)^3 = C_3^0 a^3 + C_3^1 a^2 b + C_3^2 ab^2 + C_3^3 b^3 = a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$;

$(a+b)^4 = C_4^0 a^4 + C_4^1 a^3 b + C_4^2 a^2 b^2 + C_4^3 ab^3 + C_4^4 b^4 = a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$.

2. Розклад включає всі степені *b* від 0до *n*, тому число доданків дорівнює (*n*+1).

3.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

Сума членів першого рядка трикутника Паскаля дорівнює 2, другого рядка – 4, третього рядка – 8, четвертого рядка – 16, п’ятого рядка – 32, шостого рядка – 64.

4. Коефіцієнти членів, рівновіддалених від початку і кінця розкладу в трикутнику Паскаля, однакові.

5. $(a-2b)^5 = C_5^0 a^5 + C_5^1 a^4(-2b) + C_5^2 a^3(-2b)^2 + C_5^3 a^2(-2b)^3 + C_5^4 a(-2b)^4 + C_5^5(-2b)^5 =$

$= a^5 - 10a^4b + 40a^3b^2 - 80a^2b^3 + 80ab^4 - 32b^5$.

6. а) $T_2 = T_{1+1} = C_4^1 \cdot 1^3 \cdot x^1 = 4x$;

б) $T_4 = T_{3+1} = C_4^3 \cdot 1^1 \cdot x^3 = 4x^3$;

в) Сьомого члена розкладу не існує, оскільки всього у розклад входять 5 доданків.

7. а) $C_x^2 = 21$;

$\frac{x!}{2!(x-2)!} = 21$;

$\frac{(x-1)x}{2} = 21$;

$x^2 - x - 42 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-6, x_2=7. Оскільки x_1=-6<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 7.

б) $C_x^3 + C_x^2 = 15(x-1)$;

$\frac{x!}{3!(x-3)!} + \frac{x!}{2!(x-2)!} = 15(x-1)$;

$\frac{(x-2)(x-1)x}{6} + \frac{(x-1)x}{2} = 15(x-1)$;

$\frac{(x-2)x}{6} + \frac{x}{2} = 15$;

$\frac{x^2 - 2x + 3x}{6} = 15$;

$x^2 + x - 90 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=-10, x_2=9. Оскільки x_1=-10<0 не задовольняє означення комбінації, то цей корінь – сторонній.

Відповідь. 9.

в) $5C_x^3 = C_{x+2}^4$;

$\frac{5 \cdot x!}{3!(x-3)!} = \frac{(x+2)!}{4!(x-2)!}$;

$\frac{5 \cdot (x-2)(x-1)x}{6} = \frac{(x-1)x(x+1)(x+2)}{24}$;

$120(x-2)(x-1)x = 6(x-1)x(x+1)(x+2)$;

$20(x-2) = (x+1)(x+2)$;

$20x - 40 - x^2 - 3x - 2 = 0$;

$x^2 - 17x + 42 = 0$, звідси за т. Вієта x_1=3, x_2=14.

Відповідь.3;14.

8. $(2+\text{y})^5 + (5-\text{y})^4 = C_5^0 \cdot 2^5 + C_5^1 \cdot 2^4 \cdot y^1 + C_5^2 \cdot 2^3 \cdot y^2 + C_5^3 \cdot 2^2 \cdot y^3 + C_5^4 \cdot 2^1 \cdot y^4 + C_5^5 \cdot y^5 +$

$+ C_4^0 \cdot 5^4 + C_4^1 \cdot 5^3 \cdot (-y)^1 + C_4^2 \cdot 5^2 \cdot (-y)^2 + C_4^3 \cdot 5^1 \cdot (-y)^3 + C_4^4 \cdot (-y)^4 =$

$= 32 + 80y + 80y^2 + 40y^3 + 10y^4 + y^5 + 625 - 500y + 150y^2 - 20y^3 + y^4 =$

$= 657 - 420y + 230y^2 + 20y^3 + 11y^4 + y^5$.

9. $T_9 = T_{8+1} = C_{10}^8 \cdot \left(5^{\frac{1}{4}}\right)^2 \cdot \left(6^{\frac{1}{2}}\right)^8 = 45\sqrt{5} \cdot 6^4 = 58320\sqrt{5}$.

10. $(3x+2y)^5 = C_5^0(3x)^5 + C_5^1(3x)^4(2y)^1 + C_5^2(3x)^3(2y)^2 + C_5^3(3x)^2(2y)^3 + C_5^4(3x)^1(2y)^4 +$

$+ C_5^5(2y)^5 = 243x^5 + 810x^4y + 1080x^3y^2 + 720x^2y^3 + 240xy^4 + 32y^5$.

11. $(1-0{,}05)^4 = (1+(-0{,}05))^4 = C_4^0 \cdot 1^4 + C_4^1 \cdot 1^3 \cdot (-0{,}05) + C_4^2 \cdot 1^2 \cdot (-0{,}05)^2 + C_4^3 \cdot 1^1 \cdot (-0{,}05)^3 +$

$+ C_4^4 \cdot (-0{,}05)^4 = 1 + 4 \cdot (-0{,}05) + 6 \cdot (-0{,}05)^2 + 4 \cdot (-0{,}05)^3 + (-0{,}05)^4 = 0{,}8145.$

12. Якщо k=3, то $C_3^0 + C_3^1 + C_3^2 + C_3^3 = 8$;

k=5, то $C_5^0 + C_5^1 + C_5^2 + C_5^3 + C_5^4 + C_5^5 = 32$;

k=7, то $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 128$.

II рівень

1. $\text{T}_3 = T_{2+1} = C_k^2 \cdot x^{k-2} \cdot y^2$. За умовою задачі $C_k^2 = \dfrac{k!}{(k-2)!2!} = 120$. Розв'яжемо це рівняння:

$\dfrac{(k-1) \cdot k}{2} = 120$;

$k^2 - k = 240$;

$k^2 - k - 240 = 0$;

$D = b^2 - 4ac = 1 + 960 = 961$;

$k_1 = \dfrac{1-31}{2} = -15 < 0$ – не задовольняє означення комбінації;

$k_2 = \dfrac{1+31}{2} = 16$.

Відповідь. 16.

2. $\left(1+\sqrt{3}\right)^4 = 1+4\sqrt{3}+6\left(\sqrt{3}\right)^2+4\left(\sqrt{3}\right)^3+\left(\sqrt{3}\right)^4 = 28+16\sqrt{3}$.

3. Скористаємося формулою загального члена розкладу:

$T_{k+1} = C_{10}^k x^{10-k} x^{-4k} = C_{10}^k x^{10-5k}$. Член розкладу не містить x. Отже, $x^{10-5k} = x^0$, звідси k=2. Третій член розкладу не залежить від x.

4. Якщо степінь бінома дорівнює 10, то сума біноміальних коефіцієнтів дорівнює 2^{10}=1024.

5. $C_7^0 + C_7^1 + C_7^2 + C_7^3 + C_7^4 + C_7^5 + C_7^6 + C_7^7 = 2^7 = 128$.

6. а) $\dfrac{C_{10}^1 + C_{10}^3 + C_{10}^5 + C_{10}^7 + C_{10}^9}{2(C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6)} = \dfrac{2^{10-1}}{2\cdot 2^{6-1}} = \dfrac{2^9}{2^6} = 2^3 = 8$;

б) $\dfrac{3(C_7^0 + C_7^2 + C_7^4 + C_7^6)}{C_9^1 + C_9^3 + C_9^5 + C_9^7 + C_9^9} = \dfrac{3\cdot 2^{7-1}}{2^{9-1}} = \dfrac{3\cdot 2^6}{2^8} = \dfrac{3}{2^2} = \dfrac{3}{4}$.

7. Скористаємося формулою загального члена розкладу:

$T_{k+1} = C_{11}^k \left(c^{-\frac{3}{2}}\right)^{11-k} (c^2)^k = C_{11}^k c^{\frac{-33+3k}{2}} c^{2k} = C_{11}^k c^{\frac{-33+7k}{2}}$. Отже, $c^{\frac{-33+7k}{2}} = c^1$, звідси $\dfrac{-33+7k}{2} = 1$, k=5, $T_6 = C_{11}^5 \cdot c = 462c$.

III рівень

1. а) $\dfrac{C_{2n}^0 + C_{2n}^1 + \ldots + C_{2n}^{2n}}{C_k^1 + C_k^3 + C_k^5 + \ldots} = \dfrac{2^{2n}}{2^{k-1}} = 2^{2n-k+1}$;

б) $\dfrac{C_{2m}^0 + C_{2m}^2 + C_{2m}^4 + \ldots}{C_{3n}^1 + C_{3n}^3 + C_{3n}^5 + \ldots} = \dfrac{2^{2m-1}}{2^{3n-1}} = 2^{2m-3n}$.

2. Знайдемо третій доданок розкладу $\left(2x+\dfrac{1}{x^2}\right)^m$:

$T_3 = T_{2+1} = C_m^2 (2x)^{m-2}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)^2 = C_m^2 2^{m-2} x^{m-2} x^{-4} = C_m^2 2^{m-2} x^{m-6}$.Оскільки він не містить x, то m=6, а $T_3 = C_6^2 \cdot 2^4 = 240$. Знайдемо другий доданок розкладу $(1+x^3)^{30}$:

$T_2 = T_{1+1} = C_{30}^1 1^{29} (x^3)^1 = 30x^3$. Прирівняємо отримані доданки: $30x^3 = 240$, $x^3 = 8$, x=2. Отже, при x=2 доданки двох розкладів рівні.

3. Запишемо формулу загального члена розкладу для бінома $\left(2x^2 - \dfrac{a}{2x^3}\right)^{10}$:

$$T_{k+1} = C_{10}^k \cdot (2x^2)^{10-k} \cdot \left(-\frac{a}{2x^3}\right)^k = (-1)^k \cdot C_{10}^k \cdot 2^{10-k} \cdot x^{20-2k} \cdot a^k \cdot (2x^3)^{-k} = (-1)^k \cdot C_{10}^k \cdot 2^{10-2k} \cdot a^k \cdot x^{20-5k}$$

Щоб значення T_{k+1} не залежало від x, необхідно і достатньо, щоб $20-5k=0$, тобто k=4. Отже, п'ятий член розкладу не містить x.

4. Розпишемо ці вирази, використовуючи однакову основу степеня:

$$99^{50}+100^{50}=(100-1)^{50}+100^{50}=C_{50}^0 100^{50}-C_{50}^1 100^{49}+C_{50}^2 100^{48}-...-C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}+100^{50};$$

$$101^{50}=(100+1)^{50}+100^{50}=C_{50}^0 100^{50}+C_{50}^1 100^{49}+C_{50}^2 100^{48}+...+C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}.$$

Припустимо, що $101^{50}>99^{50}+100^{50}$, тоді вірною повинна бути така нерівність:

$101^{50}-(99^{50}+100^{50})>0$;

$$C_{50}^0 100^{50}+C_{50}^1 100^{49}+C_{50}^2 100^{48}+...+C_{50}^{49}100+C_{50}^{50}-C_{50}^0 100^{50}+C_{50}^1 100^{49}-C_{50}^2 100^{48}+...+C_{50}^{49}100-$$
$$-C_{50}^{50}+100^{50}=2C_{50}^1 100^{49}+2C_{50}^3 100^{47}+2C_{50}^5 100^{45}+...+2C_{50}^{49}100-100^{50}=$$

$$=2\cdot 50\cdot 100^{49}+2C_{50}^3 100^{47}+2C_{50}^5 100^{45}+...+2C_{50}^{49}100-100^{50}=100^{50}+2C_{50}^3 100^{47}+2C_{50}^5 100^{45}+...+$$
$+2C_{50}^{49}100-100^{50}=2C_{50}^3 100^{47}+2C_{50}^5 100^{45}+...+2C_{50}^{49}100>0$. Отже, наше припущення вірне і $101^{50}>99^{50}+100^{50}$.

5. Коефіцієнт третього члена від кінця в розкладі бінома $C_n^{n-2}=45$, звідси

$\frac{n!}{(n-2)!\cdot 2!}=45$;

$\frac{n\cdot(n-1)}{2}=45$;

$n^2-n-90=0$. За т. Вієта знаходимо корені рівняння: $n_1=-9<0$, $n_2=10$.

Використовуємо формулу загального члена розкладу степеня бінома $\left(\sqrt[4]{z-1}+\sqrt[3]{z^2}\right)^{10}$: $T_{k+1}=C_{10}^k\cdot(\sqrt[4]{z-1})^{10-k}\cdot(\sqrt[3]{z^2})^k=C_{10}^k\cdot(\sqrt[4]{z-1})^{10-k}\cdot z^{\frac{2k}{3}}$. Потрібно знайти член, який після спрощення містить z^4. Отже, $\frac{2k}{3}=4$, звідси k=6,

$T_7=T_{6+1}=C_{10}^6\cdot(\sqrt[4]{z-1})^4\cdot z^4=210\cdot(z-1)\cdot z^4$.

6. Знайдемо спочатку степінь бінома. За умовою задачі число n задовольняє рівняння $C_n^{n-2}=C_n^2=\frac{n(n-1)}{2}=45$, коренями якого є $n_1=10$ і $n_2=-9$. Оскільки $n_2=-9$ не є натуральним числом, то степеню бінома буде $n=10$, звідси, шостий член розкладу записується у вигляді:

$$T_7 = T_{6+1} = C_{10}^6 \left(y^{\frac{1}{2}} \right)^4 \left(x^{\frac{1}{3}} \right)^6 = 210 y^2 x^2 .$$

IV рівень

1. Деякі формули комбінаторики можна одержати диференціюванням чи інтегруванням обох частин розкладу для $(1+x)^n = x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n$. Диференціюємо його обидві частини:

   $(x^n + C_n^1 x^{n-1} + ... + C_n^n)' = nx^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}$;

   $\left((1+x)^n\right)' = n(1+x)^{n-1}$. Отже, $n(1+x)^{n-1} = nx^{n-1} + (n-1)C_n^1 x^{n-2} + ... + C_n^{n-1}$. Підставляємо в отриману рівність x=1, отримаємо рівність, яку потрібно довести.

2. Скористаємося формулою загального члена розкладу:

   $T_{k+1} = C_5^k (\sqrt[3]{3})^{5-k} (\sqrt{2})^k = C_5^k \cdot 3^{\frac{5-k}{3}} \cdot 2^{\frac{k}{2}}$. Отриманий вираз буде раціональним, якщо $\frac{5-k}{3}$ і $\frac{k}{2}$ – цілі числа. Очевидно, що k слід шукати серед чисел, які менші 5. Безпосередньою перевіркою переконуємося, що єдине значення, яке воно може приймати, дорівнює 2. Отже, в розкладі бінома є тільки один член, який задовольняє умову задачі: $T_2 = C_5^2 \cdot 3 \cdot 2 = 6 \cdot \frac{5 \cdot 4}{2} = 60$.

3. В розкладі бінома одержимо многочлен 17-го степеня, в якому показники степеня x знаходяться в спадному порядку. На непарних місцях його члени мають додатні коефіцієнти, а на парних – від'ємні:

   $(3x-4)^{17} = C_{17}^0 3^{17} x^{17} - C_{17}^1 3^{16} x^{16} 4^1 + C_{17}^2 3^{15} x^{15} 4^2 - C_{17}^3 3^{14} x^{14} 4^3 + ... - C_{17}^{17} 4^{17}$.

   Оскільки ця рівність вірна при будь-якому x, то вона вірна при x=1. При x=1 ліва частина рівності дорівнює $(3-4)^{17} = (-1)^{17} = -1$, а права – алгебраїчній сумі коефіцієнтів.

4. Згідно із формулою загального члена розкладу бінома:

   $$T_4 = T_{3+1} = C_n^3 (\sqrt{a})^{n-3} \left(\frac{1}{\sqrt{3a}} \right)^3;$$

   $$T_3 = T_{2+1} = C_n^2 (\sqrt{a})^{n-2} \left(\frac{1}{\sqrt{3a}} \right)^2.$$

За умовою задачі $\frac{C_n^3}{C_n^2} = \frac{10}{3}$, тобто $3\frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3} = 10\frac{n(n-1)}{1\cdot 2}$, звідки n=12. Таким чином, показник степеня бінома n=12. Звідси, $T_5 = T_{4+1} = C_{12}^4(\sqrt{a})^8\left(\frac{1}{\sqrt{3a}}\right)^4 = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}a^4\cdot\frac{1}{9a^2} = 55a^2$.

5. Згідно із формулою загального члена розкладу бінома $T_3 = T_{2+1} = C_n^2 x^{n-2}y^2$, $T_2 = T_{1+1} = C_n^1 x^{n-1}y^1$. За умовою задачі $C_n^2 - C_n^1 = 9$, тобто $\frac{n(n-1)}{2} - \frac{n}{1} = 9$, звідси отримуємо n=6. Оскільки сума біноміальних коефіцієнтів розкладу, які стоять на непарних місцях, дорівнює сумі біноміальних коефіцієнтів, які стоять на парних місцях, і дорівнює 2^{n-1}, тобто $C_6^0 + C_6^2 + C_6^4 + C_6^6 = 2^{6-1} = 2^5 = 32$. Отже, сума вказаних біноміальних коефіцієнтів дорівнює 32.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Бродський А. С. Статистика. Ймовірність. Комбінаторика : навч. посіб. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2014. 544 с.
2. Бушмакін В. М., Гануліч В. К., Мохонько А. З., Томецька С. І., Тимошенко Н. М. Комбінаторика: навч. посіб. для студ. вищ. навч. закл. Нац. ун-т «Львів. політехніка». Львів, 2002. 195 с.
3. Вайман В. Технологія проведення рівневого заліку з математики. Математика в школі. 1999. №3. с. 14.
4. Забранський В., Забранська Н. Організація письмових контрольних та самостійних робіт при диференційованому навчанні математики. Математика в школі. 2000. № 5. с. 30.
5. Істер О. С. Комбінаторика, біном Ньютона і теорія ймовірностей у школі : навч. посіб. Тернопіль : Навчальна книга – Богдан, 2011. 196 с.
6. Істер О.С. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11-го кл. закл. заг. серед. освіти. Київ : Генеза, 2019. 304 с.
7. Конет І.М. Теорія ймовірностей та математична статистика в прикладах і задачах. Кам’янець-Подільський : Абетка, 2001. 220 с.
8. Мартинюк О. М., Попіна С. Ю. Елементи комбінаторики й класичне означення ймовірності. Тернопіль, 2003. 40 с.
9. Мерзляк А.Г,, Номіровський Д.А., Полонський В.Б. та ін. Алгебра і початки аналізу : проф. рівень : підруч. для 11 кл. закл. загал. серед. освіти. Харків : Гімназія, 2019. 352 с.
10. Мерзляк А.Г,, Номіровський Д.А., Полонський В.Б. Математика : алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту : підручник для 11 кл. закладів загальної середньої освіти. Харків : Гімназія, 2019. 208 с.
11. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу (профільний рівень) : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти / Є.П. Нелін, О.Є. Долгова. Харків : Ранок, 2019. 240 с.

12. Нелін Є.П. Математика (алгебра і початки аналізу та геометрія, рівень стандарту) : підруч. для 11 кл. закл. заг. серед. освіти. Харків : Ранок, 2018. 304 с.
13. Павлова Л. В., Дітчук Р. Л. Елементи комбінаторики і стохастики : навч-метод. посіб. Тернопіль : Підручники і посібники, 2005. 159 с.
14. Сморжевський Л.О. Один з аспектів диференціації навчання математики в середній школі // Зб. науков. праць Кам.-Под. педуніверситету: Серія фізико-математична. 1993. Вип. 3. с. 155-164.