

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
магістра

з теми:

**«Конуси допустимих напрямків для множини віддільного локального
опуклого лінійного топологічного простору, їх властивості та деякі
застосування»**

Виконав: студент II курсу, М1-М23 групи
спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Бабин Микола Юрійович

Керівник: **Гнатюк В.О.**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Рецензент: **Щирба В.С.**,
кандидат фізико-математичних наук, доцент

Кам'янець-Подільський, 2024

ЗМІСТ	
ВСТУП.....	4
РОЗДІЛ 1. ДЕЯКІ ДОПОМІЖНІ ПОНЯТТЯ ТА ТВЕРДЖЕННЯ. ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ. МЕТРИЧНІ ПРОСТОРИ, МЕТРИЧНА ТОПОЛОГІЯ. ВІДКРИТІ ТА ЗАМКНЕНІ МНОЖИНИ ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ, ДЕЯКІ ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. ЗАДАННЯ ТОПОЛОГІЇ НА МНОЖИНИ ЗА ДОПОМОГОЮ БАЗИСІВ ЇЇ ТОЧОК. ЛІНІЙНІ, ЛІНІЙНІ ТОПОЛОГІЧНІ ПРОСТОРИ НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ. ЛІНІЙНІ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ЯК ЧАСТКОВИЙ ВИПАДОК ЛІНІЙНОГО ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ.	9
1.1 <i>Означення топології. Означення топологічного простору. Приклади топології та топологічних просторів.</i>	9
1.2 <i>Відкриті та замкнені множини топологічного простору і деякі їх властивості.....</i>	13
1.3 <i>Базиси околів точок топологічного простору. Заданя топології на множині за допомогою базисів околів її точок.....</i>	16
1.4 <i>Лінійні, топологічні простори над полем дійсних чисел. Лінійні нормовані простори над полем дійсних чисел як часткові випадки лінійних топологічних просторів.....</i>	18
РОЗДІЛ 2. КОНУСИ ДОПУСТИМИХ НАПРЯМКІВ, ДЛЯ МНОЖИН ЛІНІЙНОГО НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ З ТОЧКИ ЦЬОГО ПРОСТОРУ ТА ЇХ ВЛАСТИВОСТІ. СТРУКТУРА КОНУСІВ ДОПУСТИМИХ НАПРЯМКІВ ДЛЯ ОПУКЛИХ МНОЖИН ЛІНІЙНОГО ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ. КОНУСИ ДОПУСТИМИХ НАПРЯМКІВ ДЛЯ ПІВПРОСТОРІВ ТА ЛІНІЙНОГО МНОГОВИДУ ЛІНІЙНОГО ТОПОЛОГІЧНОГО ПРОСТОРУ. КРИТЕРІЙ НЕСУМІСНОСТІ СИСТЕМИ ЛІНІЙНИХ НЕРІВНОСТЕЙ В ЛІНІЙНОМУ ТОПОЛОГІЧНОМУ ПРОСТОРИ.	22
2. 1. <i>Означення конусів допустимих напрямків для множини лінійного над полем дійсних чисел топологічного простору з точки цього простору.</i>	22
2. 2. <i>Властивості конусів допустимих напрямків для множин лінійного топологічного простору з точки цього простору.</i>	27
2.3. <i>Структура конусів допустимих напрямків для опуклих множин лінійного топологічного простору.....</i>	36

2.4. Структура внутрішності деякої лебегової множини опуклої неперервної функції, заданої на лінійному топологічному просторі. Структура конусів допустимих напрямків для деяких замкнених півпросторів лінійного топологічного простору. Структура конуса граничних напрямків для замкненого лінійного многовиду лінійного топологічного простору.	44
2.5 Критерій несумісності системи нерівностей $\varphi_i(x) < 0, i = 1, m$, де $\varphi_i, i = 1, m$ - ненульові лінійні функціонали, задані на лінійному над полем дійсних чисел просторі та наслідок з нього.	50
РОЗДІЛ 3. ХАРАКТЕРИЗАЦІЯ ОПТИМАЛЬНИХ РОЗВ'ЯЗКІВ ДЕЯКИХ ЕКСТРЕМАЛЬНИХ ЗАДАЧ В ЛІНІЙНИХ ТОПОЛОГІЧНИХ ПРОСТОРАХ З ДОПОМОГОЮ КОНУСІВ ДОПУСТИМИХ НАПРЯМКІВ.	57
3.1 Необхідна умова оптимальності допустимого розв'язку деяких абстрактних екстремальних задач в лінійному топологічному просторі, встановлена з використанням теорії конусів допустимих напрямків	57
3.2 Критерії оптимальності допустимого розв'язку абстрактної задачі опуклого програмування, встановлені з використанням теорії конусів допустимих напрямків	61
3.3. Критерій оптимальності допустимого розв'язку деякої задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі.....	63
3.4. Критерії оптимальності допустимого розв'язку деякої задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі з обмеженнями типу нерівності та доказовим обмеженням, що задається лінійним многовидом.	68
ВИСНОВКИ	74
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ	76

ВСТУП

Робота присвячена узагальненню на випадок конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів, у тому числі для множин віддільних локально опуклих лінійних топологічних просторів, властивостей конусів допустимих напрямків, викладених у праці [1] для множин лінійних нормованих просторів, та застосуванню отриманих узагальнених властивостей для характеристики оптимальних розв'язків деяких екстремальних задач в лінійних топологічних просторах.

Актуальність теми. Останнім часом сформувалась низка нових математичних напрямків, які займаються дослідженням екстремальних задач в лінійних нормованих просторах та побудовою чисельних методів їх розв'язування.

Складність дослідження цих задач полягає в тому, що їх екстремальні елементи знаходяться, зазвичай, на межі множин їх допустимих розв'язків, а цільові функції цих задач, взагалі кажучи, не є диференційованими. Ця складність підвищується при дослідженні таких задач у лінійних топологічних просторах.

Важливою теоретичною основою дослідження екстремальних задач в лінійних нормованих просторах є принцип двоїстості та принцип допустимих напрямків, які успішно використовувалися при вирішенні найважливішого питання дослідження всіх екстремальних задач — питання характеристики їх оптимальних розв'язків, зокрема, у працях [1] — [12].

Теорія конусів допустимих напрямків детально представлена і використана у праці [1] для характеристики точок мінімуму екстремальних задач в лінійних нормованих просторах.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є узагальнення властивостей конусів допустимих напрямків для множин лінійних нормованих просторів, окремих тверджень щодо характеристики з допомогою конусів допустимих напрямків точок мінімуму задач оптимізації в лінійних нормованих просторах, викладених у

праці [1], на конуси допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів та відповідних тверджень щодо характеристичі оптимальних розв'язків екстремальних задач в лінійних топологічних просторах, в тому числі й віддільних локально опуклих лінійних топологічних просторах.

Об'єктом дослідження є конуси допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів з точок цих просторів та деякі екстремальні задачі в лінійних топологічних просторах.

Предметом дослідження є властивості конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів з точок цих просторів, їх структура для опуклих множин, півпросторів, лінійних многовидів тощо, питання характеристичі оптимальних розв'язків деяких екстремальних задач в лінійних топологічних просторах з допомогою конусів допустимих напрямків.

Задачами дослідження є:

1. Встановлення властивостей конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів з точок цих просторів.
2. Дослідження структури конусів допустимих напрямків для опуклих множин лінійних топологічних просторів
3. Подання конусів допустимих напрямків для замкнених півпросторів лінійного топологічного простору.
4. Структура конуса граничних напрямків для замкненого лінійного многовиду лінійного топологічного простору.
5. Використання теорії конусів допустимих напрямків для встановлення необхідних умов оптимальності допустимого розв'язку деяких абстрактних задач в лінійних топологічних просторах.
6. Встановлення критеріїв оптимальності допустимого розв'язку деяких абстрактних задач опуклого програмування в лінійному топологічному просторі з допомогою конусів допустимих напрямків.
7. Доведення з використанням теорії конусів допустимих напрямків критерія оптимального розв'язку однієї задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі.

8. Отримання з використанням теорії конусів допустимих напрямків критерія екстремальності допустимого розв'язку задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі з обмеженнями типу лінійних нерівностей та додатковим обмеженням, що визначається лінійним многовидом.

9. Доведення низки допоміжних тверджень, які стосуються математичних співвідношень між об'єктами лінійних топологічних просторів (критерій несумісності системи лінійних обмежень в лінійних топологічних просторах; структура внутрішності деякої лебегової множини опуклої неперервної функції, заданої на лінійному топологічному просторі, тощо) і мають, на наш погляд, самостійний інтерес.

При вирішенні завдань дипломної роботи використовувались методи математичного, функціонального та опуклого аналізів, теорії екстремальних задач, лінійного програмування тощо.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Узагальнено властивості конусів допустимих напрямків для множин лінійних нормованих просторів з точок цих просторів, наведені у праці [1], на випадок конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів.

2. Досліджено структуру конусів допустимих напрямків для опуклих множин та замкнених півпросторів лінійного топологічного простору.

3. Отримано подання конуса граничних напрямків для замкненого лінійного многовиду лінійного топологічного простору.

4. Використано теорію конусів допустимих напрямків для встановлення необхідної умови оптимальності допустимого розв'язку деякої абстрактної екстремальної задачі в лінійному топологічному просторі та критеріїв оптимальності допустимих розв'язків абстрактних задач опуклого програмування в цьому просторі.

5. Доведено з використанням теорії конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів критерій оптимальності допустимого розвитку однієї задачі лінійного програмування в цьому просторі та критерій оптимальності допустимого розв'язку задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі з обмеженнями типу нерівностей та додатковим обмеженням, що визначається лінійним многовидом цього простору.

6. Доведено низку допоміжних тверджень, зокрема, встановлено критерій і несумісності системи лінійних обмежень в лінійному топологічному просторі; описано структуру внутрішності деякої лебегової множини опуклої неперервної функції, заданої на лінійному нормованому просторі, тощо.

Практичне значення оптимальних результатів.

Дипломна робота має теоретичний характер.

Результати дипломної роботи можуть бути використані при дослідженні екстремальних задач в лінійних топологічних, лінійних нормованих, евклідових, в тому числі гільбертових, просторах; при побудові збіжних чисельних методів розв'язування цих задач; при вирішенні задач практичного змісту, математичними методами яких є екстремальні задачі.

Апробація результатів роботи. Результати дипломної роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики, науковій конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2023-2024 навчальному році (9 квітня 2024 р., м. Кам'янець-Подільський).

Публікації за результатами дослідження:

Гнатюк В.О., Гудима У.В., Бабин М.Ю. Властивості конусів допустимих напрямків для множин лінійних над полем дійсних чисел топологічних просторів та деякі їх застосування. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.

Випуск 17. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 21-26.

Структура роботи. Робота містить вступ, три розділи, висновки та опис використаних джерел.

У першому розділі наведено деякі допоміжні поняття та твердження. Зокрема, розглянуто поняття топологічного простору, поняття відкритих та замкнених множин топологічного простору, властивості відкритих та замкнених множин, приклади топологічних просторів, в тому числі приклад метричного простору, як часткового випадку топологічного простору. Розглянуто питання задання топології на множині за допомогою базисів околів її точок. Викладено деякі поняття та твердження, що стосуються лінійних, лінійних нормованих та лінійних топологічних над полем дійсних чисел просторів.

У другому розділі розглянуто поняття конусів допустимих напрямків для множин лінійного над полем дійсних чисел топологічного простору з точок цього простору, властивості цих конусів, їх структуру для опуклих множин, замкнених лінійних півпросторів, лінійних многовидів лінійного над полем дійсних чисел простору; встановлено критерій несумісності системи лінійних нерівностей в лінійному топологічному просторі; описано структуру внутрішності деякої лебегової множини опуклої неперервної функції, заданої на лінійному топологічному просторі.

В третьому розділі з допомогою теорії конусів допустимих напрямків, викладеної в другому розділі роботи, встановлено необхідну умову оптимальності допустимого розвитку деякої абстрактної екстремальної задачі, критерії оптимальності допустимого розвитку окремих абстрактних задач опуклого програмування, критерії оптимальності допустимого розв'язку деякої задачі лінійного програмування та задачі лінійного програмування з обмеженням типу нерівностей та додатковим обмеженням, що визначається лінійним многовидом, розглядуваних в лінійному топологічному просторі.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі “Конуси допустимих напрямків для множини віддільного локально опуклого лінійного топологічного простору, їх властивості та деякі застосування”:

1. Узагальнено властивості конусів допустимих напрямків для множин лінійних нормованих просторів з точок цих просторів, наведені у праці [1], на випадок конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів.

2. Досліджено структуру конусів допустимих напрямків для опуклих множин замкнених півпросторів лінійного топологічного простору.

3. Отримано подання конуса граничних напрямків для замкненого лінійного многовиду лінійного топологічного простору.

4. Використано теорію конусів допустимих напрямків для встановлення необхідної умови оптимальності допустимого розв’язку деякої абстрактної екстремальної задачі в лінійному топологічному просторі та критеріїв оптимальності допустимих розв’язків абстрактних задач опуклого програмування в цьому просторі.

5. Доведено з використанням теорії конусів допустимих напрямків для множин лінійних топологічних просторів критерій оптимальності допустимого розвитку однієї задачі лінійного програмування в цьому просторі та критерій оптимальності допустимого розв’язку задачі лінійного програмування в лінійному топологічному просторі з обмеженнями типу нерівностей та додатковим обмеженням, що визначається лінійним многовидом цього простору.

6. Доведено низку допоміжних тверджень, зокрема, встановлено критерії несумісності системи лінійних обмежень в лінійному топологічному просторі, описано структуру внутрішності деякої лебегової множини опуклої неперервної функції, заданої на лінійному нормованому просторі, тощо

Результати дипломної роботи можна використати при дослідженні екстремальних задач в лінійних топологічних, лінійних нормованих,

евклідових, в тому числі гільбертових просторах; при побудові збіжних чисельних методів розв'язування цих задач; при вирішенні задач практичного змісту, математичними методами яких є екстремальні задачі.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496с.
2. Корнейчук Н. П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320с.
3. Гнатюк В. А., Щирба В. С. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой непрерывной функции. Укр.мат. журн., 1982. Т.4, №5. С. 608 – 613.
4. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення. Доп. НАН України, 1995. №6. С. 23-26.
5. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів Укр. мат. журн., 1996. 48, №9. С. 1183-1193.
6. Гнатюк Ю.В. Найкраще рівномірне наближення сім'ї неперервних на компактній функцій. Укр. мат. журн., 2002. 54, №11. С. 1574-1580.
7. Гудима У.В. Найкраща рівномірна апроксимація неперервного компактнозначного відображення множинами неперервних однозначних відображень. Укр. мат. журн., 2005. 57, № 12. С. 1601 - 1619.
8. Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Критерії екстремального елемента та його єдиності для задачі найкращої рівномірної апроксимації неперервного компактнозначного відображення множинами однозначних відображень Доп. НАН України, 2005. №6. С.19-23.
9. Гнатюк Ю. В. Найкраща рівномірна апроксимація в метричному просторі неперервних відображень з компактними опуклими образами. Укр.мат.журн. 2010. 62, №12. С. 1620 – 1633.
10. Гнатюк Ю.В. Відносна чебишовська точка системи обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються. Укр.мат.журн. 2011. 63, №7. – С. 889 – 903.
11. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Задача найкращого у розумінні зваженої відстані від точки до множини рівномірного відновлення функціональної залежності, заданої неточно з допомогою багатозначного відображення.

Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2015. Вип. 12. С. 37-55.

12. Гудима У. В., Гнатюк В.О. Задача найкращої у розумінні зваженої хаусдорфової відстані рівномірної апроксимації у множині неперервних відображень з компактними опуклими образами. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Інститут кібернетики імені В.М. Глушкова НАН України, Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2016. Вип. 14. С. 22-43

13. Пшеничный Б. Н. Необходимые условия экстремума. М.: Наука, 1982. 144с.

14. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Опуклий аналіз : навчальний посібник. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112 с.

15. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 1. К.: Либідь, 1993. 320 с.