

Міністерство освіти і науки України
Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА (ПРОЄКТ)
магістра
з теми:
«АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ПОБУДОВИ НАБЛИЖЕНОГО РОЗВ'ЯЗКУ
ЗАДАЧІ КОШІ ДЛЯ ЗВИЧАЙНОГО ДИФЕРЕНЦІАЛЬНОГО
РІВНЯННЯ»

Виконав:

студент 2-го курсу групи М1-М23
спеціальності 014 Середня освіта
(Математика)

Микулін Сергій Михайлович

Керівник:

Геселева К.Г.,
кандидат фізико-математичних наук

Рецензент:

м. Кам'янець-Подільський – 2024 р.

ЗМІСТ

ВСТУП	3
РОЗДІЛ 1. ОГЛЯД ЛІТЕРАТУРИ ТА ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ	6
1.1 Огляд літератури	6
1.2 Постановка задачі	17
РОЗДІЛ 2. АНАЛІТИЧНІ МЕТОДИ ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ.....	19
2.1 РОЗКЛАДАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ В РЯД ТЕЙЛОРА	19
2.1.1 Для диференціального рівняння першого порядку.....	19
2.1.2 Для диференціального рівняння вищих порядків	21
2.1.3 Для системи диференціальних рівнянь першого порядку	24
2.2 МЕТОД ПОСЛІДОВНИХ НАБЛИЖЕНЬ.....	25
2.2.1 Для рівнянь першого порядку	25
2.2.2 Для системи диференціальних рівнянь першого порядку	28
2.3 МЕТОД ЧАПЛИГІНА	29
2.3.1 Для диференціальне рівняння першого порядку	29
2.4 МЕТОД НЬЮТОНА-КАНТОРОВИЧА	34
2.4.1 Для диференціального рівняння першого порядку	34
2.4.2 Для системи диференціальних рівнянь першого порядку	40
2.5 МЕТОД МАЛОГО ПАРАМЕТРА	41
2.6 ОЦІНКА ПОХИБКИ ЧЕРЕЗ НЕВ'ЯЗКУ	44
ВИСНОВКИ.....	46
СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ.....	49

ВСТУП

Актуальність теми. Аналітичні методи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь мають важливе значення для сучасної математики. По-перше, такі методи дозволяють отримувати наближені розв'язки рівнянь, що дає змогу моделювати реальні процеси та явища для процесів, що відбуваються у таких науках, як фізика, біологія, економіка та інженерія та ці дослідження часто пов'язані зі складними системами, які описуються нелінійними диференціальними рівняннями. По-друге, аналітичні розв'язки служать основою для розробки чисельних методів. Зокрема, знання аналітичних рішень може допомогти у верифікації та калібруванні чисельних алгоритмів, що забезпечує їх точність і надійність. У багатьох інженерних завданнях важливо знайти оптимальні рішення. Аналітичні методи дозволяють оцінити вплив різних параметрів на систему, що є критично важливим для проектування та контролю складних систем.

Отже, аналітичні методи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь є важливими для сучасної математики завдяки їхній здатності моделювати реальні процеси, забезпечувати точність чисельних рішень, пояснювати фізичні явища та сприяти розвитку теоретичних аспектів математики. Ці методи залишаються актуальними в умовах швидкого розвитку науки і технологій.

Мета роботи: дослідити аналітичні методи побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, а саме: метод розкладу в ряд Тейлора, метод послідовних наближень, метод Чаплигіна, метод Ньютона-Канторовича, метод малого параметра; розглянути приклади, які демонструють швидкість збіжності методів; зробити порівняльну оцінку ефективності методів та описати схеми

обчислень; окрім звичайних диференціальних рівнянь, розглянути диференціальні рівняння вищих порядків та системи диференціальних рівнянь першого порядку; здійснити оцінку похибки наближень цих методів через нев'язку.

Об'єкт дослідження: задача Коші для звичайного диференціального рівняння, задача Коші для диференціального рівняння вищих порядків, задача Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Предмет дослідження: точність методів, збіжність розв'язків.

Методи дослідження: огляд та аналіз наукової літератури за темою дослідження, теоретичні доведення, обґрунтування методів, обчислювальні схеми, порівняльний аналіз отриманих результатів, застосування методів на конкретних прикладах.

Структура роботи. Робота складається з двох розділів. У першому розділі розглядається огляд наукової літератури та постановка задачі. У другому розділі розглянуто ряд аналітичних методів та їх застосування для побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайного диференціального рівняння, задачі Коші для диференціального рівняння вищих порядків, задачі Коші для системи диференціальних рівнянь першого порядку.

Практичне значення результатів. У роботі розглянуто різні види аналітичних методів побудови наближених розв'язків задачі Коші для звичайних диференціальних рівнянь; підібрано ряд ілюстративних прикладів, які демонструють, швидкість збіжності цих методів у задачах точний розв'язок, яких знайдений; зроблено ефективну оцінку, порівняння переваг та недоліків застосування вище вказаних методів. Отримані результати можуть бути використані здобувачами вищої освіти фізико-математичних факультетів для подальшого дослідження, як аналітичних та і чисельних методів побудови наближених розв'язків різних задач прикладного та теоретичного характеру.

Апробація. Результати науково дослідження доповідалися на звітній науковій конференції за підсумками науково-дослідної роботи у 2023 році магістрів та студентів Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка 8-9 квітня 2024 року без публікації тез. Стаття «Метод Ньютона-Канторовича побудови наближеного розв'язку задачі Коші» опублікована у Збірнику наукових праць Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.

Вихідні дані: Микулін С.М. Метод Ньютона-Канторовича побудови наближеного розв'язку задачі Коші. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки.* Випуск 17. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 00-00.

ВИСНОВКИ

У роботі проведено аналіз методів побудови наближених розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь. Розглянуто задачі Коші для диференціального рівняння першого порядку, для диференціальних рівнянь вищих порядків та системи диференціальних рівнянь першого порядку. Продemonстровано схеми різних аналітичних методів побудови наближених розв'язків до згаданих задач. Описано особливості застосування підходів до побудови наближених розв'язків до задач точні розв'язки яких можна знайти, вказано їхню специфіку залежно від властивостей розглядуваної задачі.

Кожен з розглянутих методів – метод розкладання в ряд Тейлора, метод послідовних наближень, метод Чаплигіна та метод Ньютона-Канторовича, метод малого параметра – має свої переваги та обмеження, їх досить детально описано у першому розділі. У другому розділі описані алгоритми вище зазначених методів, та наведені ряд ілюстративних прикладів.

Щоб переконатися у ефективності кожного з методів та дати оцінку якості та швидкості відшукування наближених розв'язків тим чи іншим способом, розглянуто хід розв'язання і знайдено, як точні, так і побудовано наближені розв'язки задач з аналогічною або схожою умовами. Тобто за результатами застосування аналітичних методів побудови наближених розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь, приходимо до висновку, що є методи зручні та ефективні, а є не дуже вдалі.

Отже, метод розкладання в ряд Тейлора забезпечує високу точність на невеликих відрізках, але обмежений областю збіжності та вимагає значних обчислювальних ресурсів для обчислення похідних високих порядків. **Метод послідовних наближень** є більш простим у реалізації, але може збігатися повільно або взагалі не збігатися для деяких типів рівнянь. **Метод**

Чаплигіна дозволяє отримати двосторонні оцінки розв'язку, але накладається ряд обмежень на функцію правої частини рівняння. **Метод Ньютона-Канторовича** характеризується високою швидкістю збіжності, але вимагає обчислення похідної від оператора.

Вибір оптимального методу є компромісом між точністю, швидкістю обчислень та складністю реалізації. При виборі методу необхідно враховувати такі фактори як:

- Вид диференціального рівняння (порядок рівняння, лінійне чи нелінійне, з постійними чи змінними коефіцієнтами).
- Початкові умови (гладкість початкових умов).
- Необхідна точність розв'язку (допустима похибка).
- Обчислювальні ресурси (доступні обчислювальні потужності, додаткові обчислювальні сервіси).

Результати дослідження можна подати у таблиці 1.

Таблиця 1

Метод	Переваги	Недоліки	Область застосування
Розклад у ряд Тейлора	Висока точність, аналітичний вираз	Складні обчислення, обмежена область збіжності	Задачі з гладкими функціями
Послідовні наближення	Простота, загальність	Повільна збіжність, може не збігатися	Широкий клас задач
Чаплигіна	Оцінка похибки	Жорсткі умови на функцію	Задачі з монотонними функціями
Ньютон-Канторович	Швидка збіжність, загальність	Складні обчислення похідної	Нелінійні інтегральні рівняння

На практиці часто використовують комбінації різних методів або їх модифікації. Це дозволяє досягти високої точності при відносно невеликій кількості обчислень.

Отже, проведений аналіз підтверджує, що аналітичні методи побудови наближеного розв'язку задач Коші для диференціальних рівнянь є актуальною та складною. Вибір оптимального методу вимагає глибокого розуміння як теорії диференціальних рівнянь, так і можливих методів розв'язання.

Перспективи подальших досліджень цих методів може привести до розробки адаптивних алгоритмів, які б дозволяли автоматично підбирати параметри методу залежно від властивостей задачі, удосконаленню вже існуючих методів, які б поєднували в собі переваги в застосуванні та простоту обчислювальних схем.

Методи побудови наближених розв'язків задачі Коші для диференціальних рівнянь знаходять широке застосування в різних галузях науки і техніки. Найчастіше їх використовують тоді, коли точний аналітичний розв'язок знайти неможливо або надто складно, а це цілий ряд прикладних задач механіки, електродинаміки, теплопередачі, квантової механіки, будівництва, аеронавтики, різних інженерних процесів.

Аналітичні методи побудови наближених розв'язків диференціальних рівнянь дозволяють отримати чисельний розв'язок задачі з необхідною точністю, що робить їх незамінним інструментом для дослідження складних систем.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Martin Brown. Differential Equations and Their Applications.
2. Morris Tenenbaum and Harry Pollard. Ordinary Differential Equations. Dover Publication. 2009. 604 p.
3. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння : навчальний посібник для студентів які навчаються за напрямом автоматизація та комп'ютерно-інтегровані технології. Тернопіль: ТНТУ імені Івана Пулюя, 2014. 172 с.
4. Габрусєв Г.В., Самборська О.М. Звичайні диференціальні рівняння. Тернопіль, 2014. 175 с.
5. Герасимчук В.С., Васильченко Г.С., Кравцов В.І. Вища математика: повний курс у прикладах і задачах. Навч. посіб.– К.: Книги України ЛТД, 2010. 470 с.
6. Гой Т.П., Махней О.В. Диференціальні рівняння : навчальний посібник. Івано-Франківськ : Сімик, 2012. 352 с.
7. Завгородній О.І. та ін. Звичайні диференціальні рівняння: основи теорії та методика розв'язування задач для студентів першого (бакалаврського) рівня вищої освіти денної та заочної форм навч. інж. спец. Держ. біотехнол. ун-т. Харків: ДБТУ, 2024. 117 с.
8. Копась І.М. Диференціальні рівняння. К.: КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2018. 126 с.
9. Лось В.М., Мальчиков В.В. Звичайні диференціальні рівняння [Електронний ресурс] : навч. посіб. для збудувачів ступеня бакалавра за спеціальністю 113 Прикладна математика/ КПІ ім. Ігоря Сікорського. Київ : КПІ ім. Ігоря Сікорського, 2021. 66 с.
10. Нечуйвітер О.П. Диференціальні рівняння та їх застосування.– Харків.: НТУ “ХПІ”, 2019. 88 с.

11.Самкова Г.Є., Шарай Н. В., Мойсеєнок О. П. Звичайні диференціальні рівняння та системи звичайних диференціальних рівнянь : навч.-метод. посіб. Одеса : Одес. нац. ун-т ім. І. І. Мечникова, 2019. 112 с.