Міністерство освіти і науки України

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка

Фізико-математичний факультет

Кафедра математики

КВАЛІФІКАЦІЙНА РОБОТА

магістра

на тему: **«Задача найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей»**

ВИКОНАВ: студент II курсу, М1-М23 групи спеціальності 014 Середня освіта (Математика)
Олександр РОМАНЮК

НАУКОВИЙ КЕРІВНИК:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Василь ГНАТЮК

РЕЦЕНЗЕНТ:
кандидат фізико-математичних наук, доцент
Віктор ЩИРБА

Кам’янець-Подільський – 2024

ЗМІСТ

ВСТУП

Актуальність теми. Відомо, що розв'язування багатьох практичних задач зводиться до відшукання екстремальних значень деяких величин. Математичні моделі таких задач складають один з найбільш важливих класів задач, які вивчаються в математиці. Ці задачі називаються екстремальними.

Найбільші складнощі виникають при дослідженні тих екстремальних задач, в яких величини, що визначають досліджувані процеси повинні належати певним множинам і, крім того, задовольняти деяким додатковим умовам, в тому числі й обмеженням типу нерівностей.

Одну з центральних галузей теорії екстремальних задач визначають екстремальні задачі теорії наближення, тобто задачі пов'язані з необхідністю замінити найкращим чином один об'єкт іншим, але більш простим для користування, вивчення, дослідження.

Широке коло задач найкращого наближення вкладається у схему постановки задачі найкращого у розумінні норми наближення елемента u_0, лінійного нормованого простору $(L, \|\circ\|)$ множиною D цього простору, тобто у схему постановки задачі відшукання величини

$$\inf_{u \in D} \|u_0 - u\|, \tag{0.1}$$

де D — підпростір лінійного нормованого простору L, в тому числі й скінченновекторний підпростір, або ж інша опукла множина.

Основи теорії найкращого наближення в лінійних нормованих просторах були закладені в 20-х роках XIX століття одним із засновників функціонального аналізу С. Банахом [1].

Основні результати дослідження задачі (0.1) підсумовані, зокрема, у працях [2-8].

В задачі відшукання величини (0.1) відстань між фіксованим елементом $u_0 \in L$ та елементами u множини D визначається з допомогою норми $\|\circ\|$ і дорівнює $\|u_0 - u\|$, а задача відшукання величини (0.1) полягає у відшуканні інфінуму всіх таких відстаней за умови, що u змінюється у межах множини Д.

Водночас, виникають задачі в яких міра відхилення між фіксованим елементом u_0 та елементами u множини D оцінюється не з допомогою норми, а з допомогою деякої іншої дійснозначної функції d, в тому числі півнорми, функціонала Мінковського, сублінійного функціонала, функціонала повільного зростання, опуклого функціонала тощо (див., наприклад, [6, 9-13]).

В цьому випадку отримуємо задачу відшукання величини

$$\inf_{u \in D} d(u_0 - u). \tag{0.2}$$

Одним із сучасних напрямків розвитку теорії апроксимації є перехід до дослідження найкращих у розумінні норми або «викревленої метрики» наближень фіксованих елементів лінійного нормованого простору, які не лише повинні належати заданій опуклій множині, підпростору, скінченновимірному підпростору, а й задовольняти додатковим обмеженням, зокрема, обмеженням – нерівностям (див., наприклад, [6, 14-17]).

Одна з таких задач розглядається в дипломній роботі та полягає в наступному.

Нехай $(L, \|\circ\|)$ — лінійний над полем дійсних чисел нормований простір, $L^* = (L, \|\circ\|)^*$ — простір, спряжений з $(L, \|\circ\|)$, $f_i \in L^*, c_i \in R, i = \overline{1, m}$; D_1 є опуклою та замкненою множиною простору $(L, \|\circ\|)$, $u_0 \in L$, d — неперервний сублінійний функціонал, заданий на $(L, \|\circ\|)$.

Ставиться задача відшукання величини

$$\inf d(u_0 - u) \tag{0.3}$$

за умов

$$f_i(u) \le c_i, i = \overline{1, m}, \tag{0.4}$$

$$u \in D_1. \tag{0.5}$$

Якщо позначити через

$$D = \{u \in L: f_i(u) \le c_i, i = \overline{1, m}\},$$

то задачу відшукання величини (0.3) за умов (0.4), (0.5) можна записати у такій еквівалентній формі:

$$E(d;\ u_0;\ D_0 \cap D_1) = \inf_{u \in D_0 \cap D_1} d(u_0 - u). \qquad (0.6)$$

Частковим випадком задачі (0.3) – (0.5) ((0.6)) є, зокрема, наступна задача рівномірного наближення неперервної функції з обмеженнями типу нерівностей, яка розглядається у праці [6, с.122-147].

Нехай K — деякий компакт, S — компактна підмножина K, $T = \{t_1, \dots, t_m\}$, де $t_i \in K, i = \overline{1, m}$.

Нехай крім, того $L = C(K)$ — простір неперервних дійснозначних функцій u, заданих на K, з нормою

$$\|u\| = \max_{v \in K} |u(v)|.$$

Покладемо

$$d(u) = \max_{s \in S} |u(s)|, u \in C(K).$$

Зауважимо, що d, взагалі кажучи, є передднормою на $C(K)$.

Розглянемо в $C(K)$ множину

$$D_0 = \{u \in C(K) = L: u(t_i) \le c(t_i) = c_i, i = \overline{1, m}\},$$

де $c \in C(K) = L$.

Нехай, крім того, D_1 — замкнений підпростір в $L = C(K)$. Поставимо задачу відшукання для заданої функції $u_0 \in C(K) = L$ такого елемента $u^* \in D_0 \cap D_1$, що

$$d(u_0 - u^*) = \max_{s \in S} |u_0(s) - u^*(s)| = \inf_{u \in D_0 \cap D_1} d(u_0 - u) =$$

$$= \inf_{u \in D_0 \cap D_1} \max_{s \in S} |u_0(s) - u(s)| \qquad (0.7)$$

Задачу відшукання величини (0.7) можна записати у такій розгорнутій формі:

Знайти

$$\inf d(u_0 - u) = \inf \max_{s \in S} |u_0(s) - u(s)| \qquad (0.8)$$

за умов

$$u(t_i) \le c(t_i) = c_i, i = \overline{1, m}, \qquad (0.9)$$

$$u \in D_1 \quad (0.10)$$

Якщо позначити $f_i(u) = u(t_i), i = \overline{1,m}, u \in L = C(K)$, то $f_i(u), i = \overline{1,m}, u \in L$, є неперервним лінійним функціоналом, заданим на $L = C(K)$, тобто $f_i \in L^*, i = \overline{1,m}$, (див., наприклад [13, с.40, 42]).

Тому задача (0.8) — (0.10) набуде вигляду:

$$\inf d(u_0 - u) = \inf \max_{s \in S} |u_0(s) - u(s)|,$$

за умов

$$f_i(u) \le c_i, i = \overline{1,m},$$

$$u \in D_1.$$

Отже, вона вкладається у схему постановки задачі (0.3) – (0.5), яка розглядається в роботі.

Легко бачити, що за відсутності додаткових обмежень типу нерівності (0.4) в задачі (0.3) – (0.5) вона стає задачею найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента u_0 опуклою множиною D_1 простору $(L, \|\circ\|)$, в тому числі підпростором, скінченновимірним підпростором.

Із зазначеного вище випливає, що питання дослідження задачі (0.3) – (0.5) є актуальним. Результати цього дослідження становлять самостійний інтерес та можуть бути використані для отримання відповідних результатів для того кола задач, які вкладаються у її постановку, як частинні випадки.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження.

Метою роботи є отримання двоїстого подання неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі; встановлення властивостей функції найкращого в розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення та її поляри; доведення теорем існування екстремального елемента для задачі найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей; встановлення співвідношення двоїстості для цієї задачі, умов екстремальності її допустимого елемента; критеріїв екстремальності допустимого елемента для деяких задач, які є частковими випадками досліджуваної в роботі задачі.

Об'єктом дослідження є задача найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей.

Предметом дослідження є теореми існування екстремального елемента для задачі найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей; співвідношення двоїстості, необхідні, достатні умови та критерії екстремальності допустимого розв'язку цієї задачі та деяких задач, що є її частковими випадками.

Задачами дослідження є:

1. Встановлення:
   - властивостей надграфіка неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі;
   - існування функціоналів, опорних до неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі;
   - властивостей множини опорних функціоналів до неперервного сублінійного функціонала;
   - двоїстого подання неперервного сублінійного функціонала;
   - ліпшіцевості нерерервного сублінійного функціонала.
2. Обчислення поляри та асимптотичного функціонала неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі. З'ясування структури асимптотичного конуса множини допустимих розв'язків задачі (2.9) – (2.11).
3. Встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (2.12) та функції найкращого в розумінні неперервного

сублінійного функціонала наближення обчислення поляр цих функцій.

4. Доведення деяких теорем існування екстремальних елементів для задачі відшукання величини (2.12) та наслідків з цих теорем.
5. Встановлення для задачі відшукання величини (2.12):
   - співвідношення двоїстості;
   - критеріїв екстремальності допустимого елемента, основаних на співвідношені двоїстості;
   - достатньої умови та критерію колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента.
6. Конкретизація критеріїв екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.12) на деякі часткові випадки цієї задачі.

При написанні дипломної роботи використовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, теорії апроксимації, теорії оптимізації, теорії екстримальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Для неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі, встановлено: властивості надграфіка; існування опорних функціоналів; властивості множини всіх опорних функціоналів; двоїсте подання; ліпшіцевість цього функціонала.
2. Обчислено поляру та асимптотичну функцію неперервного сублінійного функціонала, з'ясовано структуру асимптотичного конуса множини допустимих розв'язків задачі (2.9) – (2.11).
3. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (2.12) та функції найкращого в розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення, обчислено поляри цих функцій.

4. Доведено деякі теореми існування екстремальних елементів для задачі відшукання величини (2.12) та задач, які є частковими випадками задачі (2.12).
5. Для задачі відшукання величини (2.12) встановлено: співвідношення двоїстості; критерії екстремальності допустимого елемента, основані на співвідношенні двоїстості; достатню умову та критерій колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента.
6. Конкретизовано критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.12) на деякі часткові випадки цієї задачі.

Практичне значення отриманих результатів.

Дипломна робота має теоретичний характер. Результати дипломної роботи можуть бути використані при дослідженні задач теорії апроксимації та оптимізації з додатковими обмеженнями типу нерівностей, при побудові збіжних чисельних методів розв'язування цих задач, при розв'язуванні практичних задач, математичними моделями яких є екстремальні задачі з обмеженнями типу нерівностей.

Апробація результатів роботи. Результати дипломної роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики.

Апробація результатів роботи. Результати дипломної роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка функціонує при кафедрі математики, науковій конференції студентів і магістрантів за підсумками НДР у 2023-2024 навчальному році (9 квітня 2024 р., м. Кам'янець-Подільський).

Публікації за результатами дослідження:

Гнатюк В.О., Гудима У.В., Романюк О. Критерій екстремальності елемента для задачі найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Випуск 17. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. С. 26-31.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

Перший розділ містить деякі поняття та твердження, які використовуються в наступних розділах роботи. Це, зокрема, поняття лінійного над полем дійсних чисел простору; опуклої множини; лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору; простору, спряженого з лінійним нормованим простором; слабкої* топології простору, спряженого з лінійним нормованим простором; неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі та ін.

У другому розділі розглянуто постановку задачі (2.9) – (2.11) ((2.12)) найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей. Для неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі, встановлено властивості надграфіка, існування опорних функціоналів, властивості множини опорних функціоналів; двоїсте подання, ліпшіцевість цього функціонала.

В цьому розділі також обчислено поляру та асимптотичну функцію неперервного сублінійного функціонала; з'ясовано структуру асимптотичного конуса множини допустимих розв'язків задачі (2.9) – (2.11); встановлено властивості цільової функції цієї задачі та функції найкращого в розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення; обчислено поляри цих функцій; доведено теореми існування екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.12) та задач, які єї̈ частковими випадками.

В третьому розділі для задачі відшукання величини (2.12) встановлено співвідношення двоїстості, яке покладено в основу критерію екстремальності її допустимого розв’язку; достатню умову та критерій колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.12) та деякі часткові випадки цієї задачі.

ВИСНОВКИ

У дипломній роботі «Задача найкращого у розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення елемента лінійного нормованого простору множиною цього простору за наявності додаткових обмежень типу лінійних нерівностей»:

1. Для неперервного сублінійного функціонала, заданого на лінійному нормованому просторі, встановлено: властивості надграфіка; існування опорних функціоналів; властивості множини всіх опорних функціоналів; двоїсте подання; ліпшіцевість цього функціонала.

2. Обчислено поляру та асимптотичну функцію неперервного сублінійного функціонала, з’ясовано структуру асимптотичного конуса множини допустимих розв’язків задачі (2.9) – (2.11).

3. Встановлено властивості цільової функції задачі відшукання величини (2.12) та функції найкращого в розумінні неперервного сублінійного функціонала наближення, обчислено поляри цих функцій.

4. Доведено деякі теореми існування екстремальних елементів для задачі відшукання величини (2.12) та задач, які є частковими випадками задачі (2.12).

5. Для задачі відшукання величини (2.12) встановлено: співвідношення двоїстості; критерії екстремальності допустимого елемента, основані на співвідношенні двоїстості; достатню умову та критерії колмогоровського типу екстремальності допустимого елемента.

6. Конкретизовано критерії екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.12) на деякі часткові випадки цієї задачі.

Дипломна робота має теоретичний характер. Результати дипломної роботи можуть бути використані при дослідженні задач теорії апроксимації та оптимізації з додатковими обмеженнями типу нерівностей, при побудові збіжних чисельних методів розв’язування цих задач, при розв’язуванні практичних задач, математичними моделями яких є екстремальні задачі з обмеженнями типу нерівностей.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Банах С. Курс функціонального аналізу. Київ: Радянська школа, 1948. 216 с.

2. Ахиезер Н.И. Лекции по теории аппроксимации. М.: Наука, 1965. 407с.

3. Дзядык В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций. М: Наука, 1977. 510 с.

4. Корнейчук Н.П. Экстремальные задачи теории приближения. М.: Наука, 1976. 320с.

5. Крейн М.Г. L-проблема моментов в абстрактном линейном нормированном пространстве. В книге И. Ахиезера и М. Крейна. О некоторых вопросах теории моментов. Харьков: ГОНТИ, 1938. 254 с.

6. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975. 496с.

7. Степанец А.И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч.I. 427с.

8. Степанец А.И. Методы теории приближений. Киев: Ин-т математики НАН Украины, 2002. Ч.II. 468с.

9. Крейн М.Г., Нудельман А.А. Проблема моментов Маркова и экстремальные задачи. М: Наука, 1973. 551 с.

10. Бейко И.В., Гнатюк В.А., Мойко В.В. Обобщённая L-проблема моментов и методы ее решения. Укр. мат. журн., 1978. 30, №2. С. 147-154.

11. Гнатюк В.А. Щирба В.С. Общие свойства наилучшего приближения по выпуклой функции. Укр. мат. журн., 1982. 4, №5. С. 608-613.

12. Гудима У. В., Гнатюк В.О. Умови екстремальності елемента для задачі найкращої у розумінні сім’ї опуклих функцій рівномірної апроксимації компактнозначного відображення множиною однозначних відображень. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні

науки: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2013. Вип. 9. С.11-28.

13. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначається з допомогою сублінійних функціоналів. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип.24. С. 45-63.

14. Гольштейн Е.Г. Теория двойственности в математическом программировании и ее приложения. М.: Наука, 1971. 352с.

15. Корнейчук Н.П., Лигун А.А., Доронин В.Г. Аппроксимация с ограничениями. Киев: Наук. думка, 1982. 252с.

16. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращої за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерії елемента найкращого наближення. Доп. НАН України, 1995. №6. С.23-26.

17. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. Укр. мат. журн., 1996. 48, №9. С.1183-1193.

18. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112с.

19. Ус С.А. Функціональний аналіз: навч. посібник. Д.: Національний гірничий університет, 2013. 236с.

20. Люстерник Л.А., Соболев В.И. Элементы функционального анализа. М.: Наука, 1965. 520 с.

21. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз: Підручник. У двох частинах. Частина 1. К.: Либідь, 1993. 320 с.

22. Демьянов В.Ф., Рубинов А.М. Приближенные методы решения экстремальных задач. Л.: ЛГУ, 1968. 178 с.