Міністерство освіти та науки України
Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

з теми:

ЗАДАЧА ВІДШУКАННЯ ЧЕБИШОВСЬКОГО У РОЗУМІННІ ЗВАЖЕНИХ ВІДСТАНЕЙ ЦЕНТРА КІЛЬКОХ ТОЧОК ЕВКЛІДОВОГО ПРОСТОРУ

Виконав: здобувач вищої освіти
освітньої програми Середня освіта
(Математика, інформатика)
спеціальності 014 Середня освіта (за
предметними спеціальностями)
предметної спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)
Войталюк Назар Володимирович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики

Рецензент: **Щирба В.С.,**
кандидат фізико-математичних наук, доцент,
доцент кафедри комп’ютерних наук,

м. Кам’янець-Подільський – 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП …… 5

РОЗДІЛ 1. ЛІНІЙНІ НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ ПРОСТОРИ. ПРИКЛАДИ. ЛІНІЙНІ НАД ПОЛЕМ ДІЙСНИХ ЧИСЕЛ НОРМОВАНІ ПРОСТОРИ ТА СПРЯЖЕННІ З НИМИ ПРОСТОРИ. ПРИКЛАДИ. ЕВКЛІДОВІ ТА ГІЛЬБЕРТОВІ ПРОСТОРИ. ПРИКЛАДИ. ОПИСАННЯ ПРОСТОРІВ, СПРЯЖЕНИХ З ЕВКЛІДОВИМИ ТА ГІЛЬБЕРТОВИМИ ПРОСТОРАМИ. НЕРІВНІСТЬ КОШІ-БУНЯКОВСЬКОГО, ЇЇ ДОВЕДЕННЯ ТА УМОВА, ЗА ЯКОЇ В ЦІЙ НЕРІВНОСТІ МАЄ МІСЦЕ ЗНАК РІВНОСТІ ……..... 14

1.1. Лінійні над полем дійсних чисел простори. Евклідові простори. Приклади лінійних над полем дійсних чисел просторів, евклідових просторів……. 14

1.2. Лінійний над полем дійсних чисел нормований простір. Приклади лінійних нормованих просторів. Норма, породжена скалярним добутком евклідового простору. Нерівність Коші-Буняковського, її доведення; умови, за яких в цій нерівності досягається знак рівності…….. 17

1.3. Простір, спряжений з лінійним нормованим простором. Описання просторів, спряжених з евклідовим та гільбертовим просторами…….. 23

РОЗДІЛ ІІ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧІ (ЗАДАЧА ВІДШУКАННВ ВЕЛИЧИНИ (2.1)). ОПУКЛІСТЬ ТА НЕПЕРЕРВНІСТЬ ЦІЛЬОВОЇ ФУНКЦІЇ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1). УМОВИ ІСНУВАННЯ ТА ЄДИНОСТІ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1). ЛІНІЙНИЙ НОРМОВАНИЙ ПРОСТІР $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ ТА СТРУКТУРА СПРЯЖЕНОГО З НИМ ПРОСТОРУ. ЗАДАЧА, ЕКВІВАЛЕНТНА ЗАДАЧІ (2.1), УМОВИ

ІСНУВАННЯ Й ЄДИНОСТІ ЇЇ ЕКСТРЕМАЛЬНОГО ЕЛЕМЕНТА.…….. 29

2.1. Постановка задачі відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору …… 29

2.2. Опуклість та неперервність цільової функції , , задачі відшукання величини (2.1)…… …… 30

2.3. Теореми існування та єдності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з них ……..…… 31

2.4. Лінійний нормований простір $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$, де Y^m – m-арний декартів добуток лінійного над полем дійсних чисел простору Y, $\left(Y, \langle \bullet, \bullet \rangle\right)$ – евклідів простір, а $\|y\|_{Y^m} = \left\|\left(y_1, ..., y_m\right)\right\| = \max\limits_{1 \le i \le m} c_i \|y_i\|$, $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $\|y_i\| = \sqrt{\langle y_i, y_i \rangle}$, $i = \overline{1,m}$. Структура простору, спряженого з простором $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$…… 42

2.5. Еквівалентність задачі відшукання величини (2.1) деякій задачі найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною цього простору…….. 52

2.5.1. Еквівалентність задачі відшукання величини (2.1). задачі найкращого наближення елемента $d = \left(d_1, ..., d_m\right)$ лінійного нормованого простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною $B = \left\{ z = \left(\underbrace{y, ..., y}_{m\ разів} \right) : y \in V \right\}$ цього простору……. 52

2.6. Умови існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.20), еквівалентної задачі відшукання величини (2.1)**……** 55

2.7. Екстремальний функціонал для задачі відшукання величини (2.1) та деякі його властивості……. 56

2.8. Екстремальний оператор задачі відшукання величини (2.1) та деякі його властивості……. 60

РОЗДІЛ 3. ДВОЇСТЕ СПІВВІДНОШЕННЯ ДЛЯ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1), ДВОЇСТА ЗАДАЧА. КРИТЕРІЙ ОПТИМАЛЬНОСТІ

ДОПУСТИМОГО РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1) ТА НАСЛІДКИ З НЬОГО. ДОСТАТНІ УМОВИ ЕКСТРЕМАЛЬНОСТІ ДОПУСТИМОГО ЕЛЕМЕНТА ЗАДАЧІ ВІДШУКАННЯ ВЕЛИЧИНИ (2.1) ДЛЯ ВИПАДКУ ДОВІЛЬНОЇ МНОЖИНИ ЇЇ ДОПУСТИМИХ ЕЛЕМЕНТІВ…… 66

3.1. Двоїсте співвідношення для задачі відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору. Задача, двоїста до неї…… 66

3.2. Критерій оптимальності допустимого розв'язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з нього……. 69

3.3. Достатність умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільного евклідового простору і довільної множини цих допустимих елементів…… 79

ВИСНОВКИ ……..... 82

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ ……..... 83

ВСТУП

В дипломній роботі досліджено задачу відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору.

Актуальність теми. Відомо, що на практиці виникає необхідність наближення складних математичних об'єктів, явищ, процесів простішими математичними моделями, зручними для дослідження, але достатньо точними.

Зокрема, замінити складну функцію на многочлен, значення якого обчислюються достатньо просто.

Серед задач наближення елементів лінійного нормованого простору виділяють задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів.

З єдиних позицій ці задачі розглядалися, зокрема, у працях [1,2].

До задач найкращого одночасного наближення кількох елементів лінійного нормованого простору відноситься задача відшукання умовного чебишовського центра (точки справедливості) для кількох точок цього простору, яка полягає в наступному.

Позначимо через $(Y,\|\cdot\|)$ – лінійний над полем дійсних чисел нормований простір. Зафіксуємо в Y точки $d_1,...,d_m$ та множину V. Виберемо у множині V точку y, покладемо

$$r_y = \max_{1\le i\le m}\|y-d_i\|$$

та позначимо через $B_{r_y}(y)$ замкнену кулю простору $(Y,\|\cdot\|)$ з центром у точці y та радіуса r_y, тобто

$$B_{r_y}(y)=\{x\in Y:\|y-x\|\le r_y\}.$$

Маємо, що для будь-якого $i\in\{1,...,m\}$

$$\|y-d_i\|\le \max_{1\le i\le m}\|y-d_i\| = r_y .$$

Звідси випливає, що куля $B_{r_y}(y)$ містить всі точки $d_1,...,d_m$. Зрозуміло, що коли $r>r_y$, то замкнена куля $B_r(y)=\{x\in Y:\|y-x\|\le r\}$ включає $B_{r_y}(y)$. Тому точки $d_1,...,d_m\in B_r(y)$, оскільки вони належать кулі $B_{r_y}(y)$.

Якщо ж взяти $r < r_y = \max\limits_{1\le i\le m}\|y-d_i\| = \|y-d_{i_0}\|$, де $i_0 \in \{1,...,m\}$, то $d_{i_0} \notin B_r(y) = \{x \in Y : \|y-x\| \le r\}$, оскільки $\|y-d_{i_0}\| > r$.

З цих міркувань робимо висновок, що для $y \in V$ замкнена куля $B_{r_y}(y)$ є кулею найменшого радіуса $r_y = \max\limits_{1\le i\le m}\|y-d_i\|$ з центром у точці $y \in V$, яка включає точки $d_1,...,d_m$.

Отже, всі кулі множини $\{B_{r_y}(y)\}$, $y \in V$, є такими, які включають точки $d_1,...,d_m$. Виникає задача відшукання серед них ту кулю $B_{r_{y^*}}(y^*)$, де $y^* \in V$, а $r_{y^*} = \max\limits_{1\le i\le m}\|y^*-d_i\|$, в якої радіус r_{y^*} є найменшим із r_y, де $y \in V$.

Отже, приходимо до задачі відшукання величини

$$\inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}\|y-d_i\| = \inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}\|d_i-y\|. \qquad (0.1)$$

Якщо існує точка $y^* \in V$, що

$$\max_{1\le i\le m}\|y^*-d_i\| = \inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}\|y-d_i\|,$$

то її називають чебишовським центром відносно множини V (відносним чебишовським центром) для точок $d_1,...,d_m$ лінійного нормованого простору $(Y,\|\cdot\|)$.

Задачу відшукання величини (0.1) можна інтерпретувати й таким чином: у множині V потрібно знайти точку y^* найбільша із відстаней від якої до точок $d_1,...,d_m$ є найменшою серед найбільших відстаней від інших точок y до точок $d_1,...,d_m$, тобто

$$\max_{1\le i\le m}\|y^*-d_i\| \le \max_{1\le i\le m}\|y-d_i\|,\ y \in V.$$

Звідси випливає, що y^* є «точкою справедливості» в тому розумінні, що для точки y яка належить V і не є чебишовськими центрами існує $i_0 \in \{1,...,m\}$, що $\|y-d_{i_0}\| > \max\limits_{1\le i\le m}\|y^*-d_i\|$, що не є «справедливим» для точки d_{i_0}.

Тому буде «справедливим» відкривати в межах множини V заклад по обслуговуванню точок (клієнтів) $d_1,...,d_m$ у точці $y^* \in V$, яка є чебишовським центром для точок $d_1,...,d_m$, адже $\max\limits_{1\le i\le m}\rho\left(y^*,d_i\right)\le\max\limits_{1\le i\le m}\rho\left(y,d_i\right)$, $y\in V$, де $\rho\left(y,d_i\right)=\left\|y-d_i\right\|$ – відстань від точки $y\in V$ до точки d_i, $i\in\{1,...,m\}$.

Практичним прикладом задачі відшукання величини (0.1) є задача про вибір місця розташування пожежної частини, щоб час доїзду до найвіддаленішої точки був мінімальним.

При $m=1$ задача відшукання величини (0.1) набере вигляду

$$\inf_{y\in V}\left\|y-d_1\right\| \tag{0.2}$$

і є задачею найкращого наближення елемента $d_1\in\left(Y,\|\cdot\|\right)$ множиною $V\subset Y$.

Дослідженню задачі (0.2) присвячено низку робіт відомих математиків, в тому числі й вітчизняних: Н.І. Ахієзера, В.К. Дзядика, М.П. Корнєйчука, О.І. Степанця та інших (див., наприклад, [3]).

Задача відшукання величини (0.1) є частковим випадком задачі відшукання відносного чебишовського центра компакта лінійного нормованого простору, задачі відшукання відносної чебишовської точки системи обмежених замкнених опуклих множин, які неперервно змінюються, що розглядались у працях [4-9].

Якщо в задачі про розміщення центру виробництва деякого товару встановлено, що ціна перевезення цього товару споживачеві d_i на одиницю відстані становить $c_i>0$, $i=\overline{1,m}$, то вартість перевезень товару з точки y допустимої множини V простору $\left(Y,\|\cdot\|\right)$ в d_i буде дорівнювати $c_i\rho\left(y,d_i\right)=c_i\left\|y-d_i\right\|$, $i=\overline{1,m}$. В цьому випадку буде справедливим розмістити центр виробництва товару в такій точці $y^*\in V$, для якої

$$\max_{1\le i\le m}c_i\left\|y^*-d_i\right\|=\inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}c_i\left\|y-d_i\right\|. \tag{0.3}$$

Задача (0.3) є задачею відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра точок $d_1,...,d_m$ лінійного нормованого простору $\left(Y,\|\cdot\|\right)$ відносно множини V цього простору.

У праці [10] встановлені критерії екстремальної послідовності та екстремального елемента для задачі відшукання величини (0.3) в довільному лінійному нормованому просторі.

У праці [11] розглянуті умови екстремальності допустимих елементів для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого полінормованого простору відносно множини цього простору, яка є узагальненням задачі (0.3).

В дипломній роботі задача відшукання величини (0.3) розглядається в евклідовому, в тому числі й гільбертовому просторах, всебічно, в різних аспектах.

Це дозволило, крім результатів загального характеру, які мають місце для всіх лінійних нормованих просторів, отримати глибші та дієвіші результати, що випливають з означення евклідового та гільбертового просторів, з їх властивостей.

Конкретніше ця задача полягає в наступному.

Нехай $\left(Y,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$ – евклідів простір, де Y – лінійний над полем дійсних чисел простір, а $\langle x,y\rangle$ – скалярний добуток елементів $x,y\in Y$, заданий на Y, $\|y\|=\sqrt{\langle y,y\rangle}$, $y\in Y$. Зафіксуємо в Y точки $d_1,...,d_m$ та множину V.

Позначимо через $c_1>0,...,c_m>0$ додатні дійсні числа.

Поставимо задачу відшукання величини

$$\gamma_V^*\left(d_1,...,d_m\right)=\inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}c_i\|y-d_i\|=\inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}c_i\sqrt{\langle y-d_i,y-d_i\rangle} \qquad (0.4)$$

та її екстремального елемента, тобто точки $y^*\in V$, такого, що

$$\max_{1\le i\le m}c_i\left\|y^*-d_i\right\|=\inf_{y\in V}\max_{1\le i\le m}c_i\|y-d_i\|=\gamma_V^*\left(d_1,...,d_m\right).$$

Задачу відшукання величини (0.4) будемо називати задачею відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок $d_1,...,d_m$ відносно множини V евклідового простору $\left(Y,\langle\bullet,\bullet\rangle\right)$, а її екстремальний елемент

y^* (за умови його існування) – чебишовським у розумінні зважених відстаней центром точок $d_1,...,d_m$ відносно множини V евклідового простору.

Актуальність цієї задачі випливає з її змісту, можливості використання її результатів для вирішення описаних вище практичних задач, розглядуваних в евклідових просторах, побудови збіжних чисельних методів розв'язування цих задач з наперед заданою точністю, отримання результатів для тих екстремальних задач, які вкладаються у схему постановки задачі (0.4) тощо.

Мета, об'єкт, предмет і задачі дослідження

Метою роботи є: встановлення опуклості та неперервності цільової функції задачі відшукання величини (0.4) ((2.1)); доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з них; розгляд лінійного нормованого простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$, де Y^m – m-арний декартів добуток лінійного над полем дійсних чисел простору Y, $\left(Y, \langle \bullet, \bullet \rangle\right)$ – евклідів простір, $\|y\|_{Y^m} = \|(y_1,...,y_m)\|_{Y^m} = \max\limits_{1 \le i \le m} c_i \|y_i\|$, $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, $\|y_i\| = \sqrt{\langle y_i, y_i \rangle}$, $i = \overline{1,m}$; дослідження структури простору, спряженого з простором $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$; встановлення еквівалентності задачі відшукання величини (2.1) задачі найкращого наближення елемента $d = (d_1,...,d_m)$ простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною $B = \{z = (y,...,y) : y \in V\}$ цього простору (задача (2.20)); встановлення умов існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.20); дослідження властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1); встановлення двоїстого співвідношення та двоїстої задачі для задачі відшукання величини (2.1); доведення критеріїв екстремальності допустимого розв'язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з нього; відшукання достатньої умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільної множини цих допустимих елементів.

Об'єктом дослідження є задача відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору відносно множини цього простору (задача відшукання величини (2.1)).

Предметом дослідження є властивості цільової функції задачі відшукання величини (2.1); теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем; лінійний нормований простір $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$, структура простору, спряженого з простором $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$; еквівалентні задачі до задачі відшукання величини (2.1), розглядувані в просторі $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$; умови існування та єдиності екстремального елемента для цих задач; властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1); двоїсте співвідношення та двоїста задача для задачі відшукання величини (2.1); умови екстремальності допустимого розв'язку задачі відшукання величини (2.1).

Задачами дослідження є:

– постановка задачі відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору відносно множини цього простору;

– встановлення опуклості та неперервності цільової функції задачі відшукання величини (2.1);

– доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з них;

– дослідження лінійного над полем дійсних чисел нормованого простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ та структури простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)^*$, спряженого з ним;

– побудова задачі найкращого наближення елемента $d = \left(d_1, ..., d_m\right)$ простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною $B = \left\{z = \left(y, ..., y\right) : y \in V\right\}$ цього простору (задача (2.20)), еквівалентної задачі відшукання величини (2.1), встановлення умов існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.20);

– дослідження властивостей екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1);

– встановлення двоїстого співвідношення та двоїстої задачі для задачі відшукання величини (2.1);

– доведення критерію екстремальності допустимого розв’язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з нього;

– відшукання достатньої умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільного евклідового простору та довільної множини цих допустимих елементів.

При написанні дипломної роботи застосовувалися методи математичного аналізу, функціонального аналізу, опуклого аналізу, результати з теорії апроксимації, оптимізації, екстремальних задач тощо.

Результати роботи є новими і полягають у наступному:

1. Встановлено опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (2.1).

2. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з них.

3. Досліджено лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ та структуру простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)^*$, спряженого з ним.

4. Побудовано задачу найкращого наближення елемента $d = \left(d_1, ..., d_m\right)$ простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною $B = \left\{z = \left(y, ..., y\right) : y \in V\right\}$ цього простору (задача (2.20)), еквівалентну задачі відшукання величини (2.1).

5. Встановлено умови існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.20).

6. Досліджено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1).

7. Встановлено двоїсте співвідношення та побудовано двоїсту задачу для задачі відшукання величини (2.1).

8. Доведено критерій екстремальності допустимого розв'язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з нього.

9. Знайдено достатню умову екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільної множини цих допустимих елементів.

Практичне значення отриманих результатів.

Дипломна робота є роботою теоретичного характеру. Результати дипломної роботи можна використати при розв'язуванні низки практичних задач, про які йшла мова, зокрема для розв'язування задач оптимального розміщення центрів виробництва товарів тощо.

Результати роботи можуть бути покладені в основу побудови збіжних чисельних методів для розв'язання задачі відшукання величини (2.1) та задач практичного змісту, які вкладаються в схему її постановки, з наперед заданою точністю.

Апробація результатів роботи. Результати роботи заслуховувалися на засіданнях студентської проблемної групи «Найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка створена при кафедрі математики; *наукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.*

Публікації за результатами дослідження:

Гнатюк В.О., Гудима У.В., Войталюк Н.В. Існуванння та єдиність екстремального елемента для задачі відшукання чебишовського у розумінні зажених відстаней центра кількох точок евклідового простору. Випуск 19. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2025.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

В першому розділі наводять деякі поняття, означення, твердження, теореми, які використовуються в другому та третьому розділах роботи. Серед них питання, що стосуються лінійних над полем дійсних чисел та евклідових

просторів; приклади лінійних над полем дійсних чисел та евклідових просторів; лінійних над полем дійсних чисел нормованих просторів; приклад лінійних над полем дійсних чисел нормованих просторів; норми, породженої скалярним добутком евклідового простору; нерівності Коші-Буняковського; умов, за яких в цій нерівності досягається знак рівності; просторів, спряжених з лінійними нормованими просторами, евклідовими та гільбертовими просторами тощо.

В другому розділі поставлено задачу відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центрів кількох точок евклідового простору (задача відшукання величини (2.1); встановлено опуклість і неперервність цільової функції цієї задачі; доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з них; досліджено лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ та структуру простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)^*$, спряженого з ним, побудовано задачу найкращого наближення в просторі $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$, еквівалентну задачі відшукання величини (2.1); встановлено умови існування та єдиності екстремального елемента для цієї еквівалентної задачі; досліджено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1)).

В третьому розділі дипломної роботи встановлено двоїсте співвідношення та побудовано двоїсту задачу для задачі відшукання величини (2.1); доведено критерій екстремальності допустимого розв’язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідку з нього; знайдено достатню умову екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) та довільної множини цих допустимих елементів.

ВИСНОВКИ

В дипломній роботі «Задача відшукання чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок евклідового простору»:

1. Встановлено опуклість та неперервність цільової функції задачі відшукання величини (2.1).

2. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з них.

3. Досліджено лінійний над полем дійсних чисел нормований простір $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ та структуру простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)^*$, спряженого з ним.

4. Побудовано задачу найкращого наближення елемента $d = \left(d_1, ..., d_m\right)$ простору $\left(Y^m, \|\cdot\|_{Y^m}\right)$ множиною $B = \left\{z = \left(y, ..., y\right) : y \in V\right\}$ цього простору (задача (2.20)), еквівалентну задачі відшукання величини (2.1).

5. Встановлено умови існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.20).

6. Досліджено властивості екстремального функціонала та екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1).

7. Встановлено двоїсте співвідношення та побудовано двоїсту задачу для задачі відшукання величини (2.1).

8. Доведено критерій екстремальності допустимого розв’язку задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з нього.

9. Знайдено достатню умову екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільної множини цих допустимих елементів.

Дипломна робота є роботою теоретичного характеру. Результати дипломної роботи можна використати при розв’язуванні низки практичних задач, зокрема задач оптимального розміщення центрів виробництва товарів, при побудові збіжних чисельних методів розв’язання задачі відшукання величини (2.1), інших задач, які вкладаються в схему постановки задачі (2.1).

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерій елемента найкращого наближення. Доп. НАН України, 1995. №6. С.23-26.

2. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. Укр. мат. журн., 1996. 48, №9. С.1183-1193.

3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип.18. С.65-77.

4. Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Модифікація методу січних площин на випадок задачі відшукання чебишовського центра компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору. Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. пр. (за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції). Київ – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун.-т, 2004. С.19-28.

5. Гнатюк В.О., Гнатюк Ю.В., Гудима У.В. Модифікація методу Ремеза на випадок задачі відшукання чебишовського центра компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору. Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. пр. (за матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції). Київ – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун.-т, 2004. С.29-40.

6. Гудима У.В. Задача про чебишовський центр компакту нормованого простору відносно його скінченновимірного чебишовського підпростору// Сучасні проблеми моделювання, прогнозування та оптимізації: Зб. наук. пр. (за

матеріалами Всеукраїнської науково-методичної конференції). Київ – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський держ. ун.-т, 2004. С.41-48.

7. Гнатюк В.О. Модифікація методу січних площин на випадок задачі відшукання чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 3. С. 36-47.

8. Гнатюк Ю.В. Необхідні, достатні умови, критерії та умови єдиності відносної чебишовської точки системи обмежених замкнутих опуклих множин, які неперервно змінюються. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 3. С. 47-56.

9. Гудима У.В. Критерії чебишовської точки системи опуклих обмежених замкнених множин, які неперервно змінюються, відносно скінченновимірного підпростору. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2010. Вип. 3. С. 57-64.

10. Гудима У.В. Критерії узагальненого чебишовського у розумінні зважених відстаней центра кількох точок лінійного нормованого простору відносно опуклої множини цього простору. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип.17. С. 33-48.

11. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання узагальненого чебишовського центра кількох точок деякого полінормованого простору відносно множини цього простору. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський:

Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип.25. С. 52-69.

12. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112с.

13. Ус С.А. Функціональний аналіз : навчальний посібник. Д.: Національний гірничий університет, 2013. 236 с.

14. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 698 с.

15. Laurent P-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Herman, Paris, 1972. 531p.

16. Городецький В.В. Нагнибіда М.І., Настасієв П.П. Методи розв’язування задач з функціонального аналізу. Частина друга. Київ: Ін-т математики НАН України, 1997. 316 с.

17. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. Навчальний посібник. К.: Вища школа, 1993. 375 с.

18. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Вип. 21.С. 84-99.

19. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз : Підручник. У двох частинах. Частина 2. К.: Либідь, 1994. 304 с.

20. Александров О.І., Стреляєв Ю.М. Аналіз у метричних просторах: Навчальний посібник для студентів математичного факультету. Запоріжжя: ЗНУ, 2008, 72 с.

21. Гарасим Я.С., Недашковська А.М., Остудін Б.А. Методи розв’язування типових задач функціонального аналізу: Методичний посібник для студентів. Львів: Простір М, 2015. 72 с.