Міністерство освіти та науки України
Кам’янець-Подільський національний університет
імені Івана Огієнка
Фізико-математичний факультет
Кафедра математики

Кваліфікаційна робота
на здобуття ступеня вищої освіти «магістр»

з теми:
ЗВАЖЕНА ЗАДАЧА ТИПУ ЗАДАЧІ ШТЕЙНЕРА В ЕВКЛІДОВОМУ ПРОСТОРІ

Виконав: здобувач вищої освіти
освітньої програми Середня освіта
(Математика, інформатика)
спеціальності 014 Середня освіта (за
предметними спеціальностями)
предметної спеціальності 014.04 Середня освіта
(Математика)
Панасюк Дмитро Сергійович

Керівник: **Гнатюк В.О.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент, доцент кафедри математики

Рецензент: **Щирба В.С.,**
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри комп’ютерних наук, доцент

м. Кам’янець-Подільський – 2025 р.

ЗМІСТ

ВСТУП

В роботі досліджено задачу мінімізації на деякій множині евклідового простору суми зважених квадратів відстаней від точок цієї множини до кількох фіксованих точок простору, яку названо зваженою задачею типу задачі Штейнера в евклідовому просторі.

Актуальність теми. В повсякденному житті часто трапляються ситуації, коли для вирішення проблем, які виникають є кілька або ж нескінченно багато можливостей.

Тоді природно виникає бажання знайти серед цих можливостей оптимальну (найкращу, найдосконалішу тощо).

Відшукання такої оптимальної можливості приводить до необхідності розв'язувати математичні задачі на відшукання максимуму або мінімуму, найбільших і найменших значень деяких величин, які ще називаються екстремальними задачами (задачами на екстремум).

Однією з таких екстремальних задач є задача, яка полягає в необхідності в площині трикутника знайти точку, сума відстаней від якої до вершин трикутника була б мінімальною. Цією задачею цікавились такі відомі математики 17 століття, як Б. Кавальєрі, Н. Торрічеллі, П. Ферма.

Розв'язком цієї задачі є точка Торрічеллі (за ім'ям одного з авторів розв'язку). Точка Торрічеллі – це точка, з якої всі сторони трикутника видно під кутом 120 градусів. Якщо трикутник має кут, який не менше 120 градусів, то точка Торрічеллі є вершиною цього кута (див., наприклад, [1, с.17]).

У 19 столітті цією та іншими подібними задачами займався німецький математик Якоб Штейнер, тому їх часто називають проблемами Штейнера (див., наприклад, [1, с.17]).

Одним із узагальнень задачі Штейнера є задача відшукання в площині такої точки, щоб сума відстаней від якої до фіксованих точок цієї площини була б найменшою (див., наприклад, [1, с.17]).

Якщо $\left(V,\|\cdot\|\right)$ є лінійним нормованим простором, $b_1,...,b_m$ – фіксовані точки цього простору, $A\subset V$, то узагальнення описаної вище задачі стане задача відшукання величини

$$\inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m}\left\|u-b_i\right\| \tag{0.1}$$

та її екстремального елемента, тобто такої точки u^* множини A, сума відстаней від якої до фіксованих точок b_i, $i=\overline{1,m}$, не перевищувала б суми відстаней від кожної іншої точки множини A до точок $b_1,...,b_m$ (була б найменшою).

Задача відшукання величини (0.1) та її екстремального елемента є умовною задачею Штейнера (умова: $u\in A$) в лінійному нормованому просторі (див., наприклад, [2-4]).

Покладемо в задачі (0.1) $m=1$. Тоді задача (0.1) набере вигляду

$$\inf_{u\in A}\left\|u-b_1\right\|, \tag{0.2}$$

яка є задачею найкращого наближення елемента лінійного нормованого простору V множиною A цього простору, якій присвячено низку робіт, в тому числі відомих українських математиків: Н.І. Ахієзера, В.К. Дзядика, М.П. Корнєйчука, О.І. Степанця та ін. (див., наприклад, [5]).

Задача відшукання величини (0.2) узагальнювалась в багатьох напрямках.

Одним із цих напрямків є дослідження задачі найкращого в розумінні деякої опуклої неперервної функції p, визначеної на $\left(V,\|\cdot\|\right)$, елемента b_1 множиною A цього простору, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{u\in A}p\left(u-b_1\right) \tag{0.3}$$

(див., наприклад, [6,7]).

Якщо в задачі (0.3) покласти $p\left(u\right)=\left\|u\right\|^2$, $u\in V$, то вона набере вигляду

$$\inf_{u\in A}\left\|u-b_1\right\|^2 \tag{0.4}$$

і є задачею відшукання в множині A такої точки квадрат відстані від якої до фіксованої точки $b_1\in V$ був би найменшим.

Зрозуміло, що узагальненням задачі (0.4) є задача відшукання у множині V такої точки сума квадратів відстаней від якої до фіксованих точок множини $b_1,...,b_m$ цього простору була б найменшою, тобто задача відшукання величини

$$\inf_{u \in A} \sum_{i=1}^{m} \|u - b_i\|^2 \tag{0.5}$$

та її екстремального елемента (див., наприклад, [8]).

Прикладом задачі відшукання величини (0.5) і її екстремального елемента є відома геометрична задача: на прямій знайти таку точку сума квадратів відстаней від якої до двох заданих точок була б найменшою (див., наприклад, [9, с.85]). У праці [8] наведено основні результати дослідження задачі (0.5) для випадку, коли V є гільбертовим простором. У цій праці для цього випадку задачу відшукання величини (0.5) та її екстремального елемента назвемо задачею типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі.

Важливою практичною задачею, яка приводить до необхідності досліджувати розглянуті вище задачі, є, наприклад, задача про розміщення виробництва. В цій задачі необхідно у множині A лінійного нормованого простору $(V, \|\cdot\|)$ знайти точку u^*, сумарна відстань перевезень продукції з якої до точок споживання $b_1,...,b_m$ була б мінімальною. При цьому вважається, що вартість перевезення на одиницю відстані однакова і дорівнює $c > 0$.

Математичною моделлю цієї практичної задачі є задача відшукання точки $u^* \in A$, такої, що еквівалентна задачі відшукання точки $u^* \in A$, для якої

$$\sum_{i=1}^{m} c\|u^* - b_i\| = \inf_{u \in A} \sum_{i=1}^{m} c\|u - b_i\|,$$

Тобто задачі відшукання величини (0.1) (умовній задачі Штейнера в лінійному нормованому просторі, зокрема на площині).

Якщо ж для різних точок b_i, $i = \overline{1,m}$, вартість перевезення на одиницю відстані рівна $c_i > 0$, $i = \overline{1,m}$, (взагалі кажучи різні), то математичною моделлю такої задачі буде задача відшукання величини

$$\inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m} c_i \left\| u-b_i \right\|, \tag{0.6}$$

тобто, так звана, зважена узагальнена задача Штейнера в лінійному нормованому просторі (див., наприклад, [3]).

Частковим випадком задачі (0.6) є задача відомого німецького економіста Альфреда Вебера, в якій необхідно знайти таку точку на площині, яка мінімізує сумарну вартість перевезень з цієї точки в m фіксованих точок споживання, якщо для різних точок споживання визначена своя ціна перевезення на одиницю відстані (див., наприклад, [10]).

Якщо ж задачі відшукання величини (0.6) замість відстані $\left\| u-b_i \right\|$, $i=\overline{1,m}$, поставити $\left\| u-b_i \right\|^2$, $i=\overline{1,m}$, то прийдемо до задачі відшукання в множині лінійного нормованого простору $\left(V,\left\|\bullet\right\|\right)$ такої точки u^*, сума зважених квадратів відстаней від якої до кожної з фіксованих точок $b_1,...,b_m$ цього простору була б найменшою.

В дипломній роботі отримана внаслідок цього задача досліджується для випадку, коли V є евклідовим, в тому числі гільбертовим, простором $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle\right)$, а $\left\| u \right\| = \sqrt{\left\langle u,u \right\rangle}$, $u\in V$. Її називають зваженою задачею типу задачі Штейнера в евклідовому просторі.

Отже, в дипломній роботі розглядається зважена задача типу задачі Штейнера в евклідовому просторі $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle\right)$, яка полягає у відшуканні величини

$$\inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m} c_i \left\| u-b_i \right\|^2 = \inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m} c_i \left\langle u-b_i, u-b_i \right\rangle, \tag{0.7}$$

де A – множина простору V, $b_1,...,b_m$ – елементи цього простору, $\left\| u \right\| = \sqrt{\left\langle u,u \right\rangle}$.

Якщо існує елем елемент $u^* \in A$, такий, що

$$\sum_{i=1}^{m} c_i \left\| u^*-b_i \right\|^2 = \inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m} c_i \left\| u-b_i \right\|^2 = \inf_{u\in A}\sum_{i=1}^{m} c_i \left\langle u-b_i, u-b_i \right\rangle,$$

то його назвемо екстремальним елементом для задачі відшукання величини (0.7), тобто для зваженої задачі типу задачі Штейнера в евклідовому просторі $\left(V,\left\langle \cdot,\cdot \right\rangle\right)$.

Зі сказаного вище випливає актуальність задачі відшукання величини (0.7), тобто зваженої задачі типу задачі Штейнера в евклідовому просторі, адже в цій задачі необхідно знайти точку множини A евклідового простору $(V,\langle \cdot,\cdot \rangle)$, сума зважених квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок цього простору була б найменшою; результати дослідження цієї задачі можна використати для розв'язування задач практичного змісту, які вкладаються в схему її постановки, зокрема:

– задачі відшукання точки прямої, сума квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок була б найменшою (див., наприклад, [9, с.85]),

– задачі відшукання точки площини, сума квадратів відстаней від якої до трьох заданих точок $A(x_1(i),x_2(i))$, $i=\overline{1,3}$, є найменшою (див., наприклад, [11, с. 33]),

– задачі відшукання на площині з рівнянням $3x_1-2x_3=0$ точки, сума квадратів відстаней до якої від точок $A(1,1,1)$ і $B(2,3,4)$ була б найменшою (див., наприклад, [11, с.16]),

– на площині дано m матеріальних точок $\{M_i(x_1(i),x_2(i)):1\le i\le m\}$ з масами, рівними відповідно m_i, $i=\overline{1,m}$. При якому положенні точки $M(x_1,x_2)$ площини момент інерції $I=\sum_{i=1}^{m} m_i\rho^2(M_i,M)$, де ρ – евклідова відстань в R^2, системи відносно цієї точки буде найменшим? (див., наприклад, [11, с.18]),

– інших задач, які виникають в різних галузях: в геометрії, у статистиці для розрахунку дисперсії; у фізиці для розв'язування задач гравітації; в економіці для розв'язування задач оптимального розміщення виробництва тощо.

Крім того, актуальність задачі (0.7) підвищується внаслідок того, що результати її дослідження дозволяють отримувати результати для тих задач, які є її частковими випадками. В роботі задача (0.7) розглядається в евклідовому просторі, що дозволяє, крім результатів загального характеру, отримати конкретні результати, що випливають з властивостей цього підпростору.

Мета, об’єкт, предмет і задачі дослідження

Метою роботи є: дослідження простору $\left(V^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$, де $\left(V,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ – евклідів простір, $V^m=\left\{\left(u_1,...,u_m\right):u_i\in V, i=\overline{1,m}\right\}$ – m-ий декартів степінь лінійного над полем дійсних чисел простору V, для $u=\left(u_1,...,u_m\right)$, $\vartheta=\left(\vartheta_1,...,\vartheta_m\right)\in V^m$, $\alpha\in R$: $u+\vartheta=\left(u_1+\vartheta_1,...,u_m+\vartheta_m\right)$, $\alpha\cdot u=\left(\alpha u_1,...,\alpha u_m\right)$, $\langle u,\vartheta\rangle_{V^m}=c_1\langle u_1,\vartheta_1\rangle+...+c_m\langle u_m,\vartheta_m\rangle$ (встановлення його евклідовості, умов повноти простору $\left(V^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$ та його множини); дослідження деяких екстремальниї задач в лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$, де для $\tau=\left(u_1,...,u_m\right)\in V^m:\|\tau\|_{V^m}=\sqrt{\langle\tau,\tau\rangle_{V^m}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}c_i\|u_i\|^2}$, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1); доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з них; встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (2.1), властивостей цільових функцій задач, еквівалентних задачі відшукання величини (2.1), а також властивостей екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1); отримання співвідношень двоїстості для задачі відшукання величини (2.1) та еквівалентних їй задач; доведення критерію екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідків з нього; встановлення достатньої умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1).

Об’єктом дослідження є задача відшукання у множині евклідового простору точки, сума зважених квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок цього простору є найменшою, тобто, так звана, зважена задача типу задачі Штейнера в евклідовому просторі.

Предметом дослідження є простір $\left(V^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$, де $\left(V,\langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ є евклідовим простором, а для $u=\left(u_1,...,u_m\right)$, $\vartheta=\left(\vartheta_1,...,\vartheta_m\right)\in V^m$ $\langle u,\vartheta\rangle_{V^m}=\sum_{i=1}^{m}c_i\langle u_i,\vartheta_i\rangle$, $c_i>0$,

$i=\overline{1,m}$; деякі екстремальні задачі в просторі $\left(V^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$, еквівалентні задачі відшукання величини (2.1); питання існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1); властивості цільових функцій екстремальних задач, що розглядаються в роботі, а також властивості екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1); співвідношення двоїстості для екстремальних задач, що розглядаються в роботі; співвідношення двоїстості для цих задач; умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1).

Задачами дослідження є:

– постановка зваженої задачі типу задачі Штейнера в евклідовому просторі (задачі (2.1));

– розгляд властивостей простору $\left(V^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$, де V^m – декартів степінь евклідового простору $\left(V, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$, $m\in N$;

– встановлення його евклідовості, умов повноти самого простору та його множини;

– доведення еквівалентності задач (2.1), (2.6), (2.7);

– формування та доведення теорем існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) і наслідків з них;

– встановлення властивостей цільової функції задачі відшукання величини (2.1) та цільових функцій еквівалентних їй задач (2.6), (2.7);

– встановлення неперервності екстремального оператора задачі відшукання величини (2.1) на лінійному нормованому просторі $\left(V^m, \|\cdot\|_{V^m}\right)$, де $\|\tau\|_{V^m}=\sqrt{\langle\tau,\tau\rangle_{V^m}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i\|u_i\|^2}$ для $\tau=(u_1,...,u_m)\in V^m$;

– отримання співвідношень двоїстості для еквівалентних екстремальних задач (2.1), (2.6), (2.7);

– формування та доведення критерію екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості та наслідків з нього;

– встановлення достатньої умови екстремальності допустимого елемента задачі відшукання величини (2.1) у випадку довільної множини її допустимих елементів.

При написанні дипломної роботи використовувалися методи математичного, функціонального, опуклого аналізів, теорії апроксимації, оптимізації, екстремальних задач.

Наукова новизна отриманих результатів.

Результати дипломної роботи є новими і полягають у наступному:

Для задачі (2.1) мінімізації на деякій множині евклідового простору суми зважених квадратів відстаней від точок цієї множини до кількох фіксованих точок простору (зваженої задачі типу задачі Штейнера в евклідовому просторі):

1. Для евклідового простору $\left(V, \langle \cdot, \cdot \rangle\right)$ в лінійному над полем дійсних чисел просторі V^m, який є m-им декартовим степенем лінійного над полем дійсних чисел простору V, кожній парі $u = (u_1, ..., u_m)$, $\vartheta = (\vartheta_1, ..., \vartheta_m) \in V^m$ поставимо у відповідність дійсне число $\langle u, \vartheta \rangle_{V^m} = \sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, \vartheta_i \rangle$, $c_i > 0$, $i = \overline{1, m}$, – фіксовані додатні числа.

Доведено, що $\langle u, \vartheta \rangle_{V^m}$, $u, \vartheta \in V^m$, є скалярним добутком, заданим на V^m, і, отже, $\left(V^m, \|\cdot\|_{V^m}\right)$ є лінійним нормованим простором, де для $\tau = (u_1, ..., u_m) \in V^m$

$$\|\tau\|_{V^m} = \sqrt{\langle \tau, \tau \rangle_{V^m}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i \langle u_i, u_i \rangle} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} c_i \|u_i\|^2}.$$

Доведено, що коли $\left(V, \|\cdot\|\right)$, де для $u \in V$ $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$, є повним евклідовим простором (гільбертовим простором), то $\left(V^m, \langle \cdot, \cdot \rangle_{V^m}\right)$ також є повним евклідовим простором; коли A є повною множиною лінійного нормованого простору $\left(V, \|\bullet\|\right)$, то $D = \left\{(u, .., u) \in V^m : u \in A\right\}$ є повною множиною лінійного нормованого простору $\left(V^m, \|\cdot\|_{V^m}\right)$.

2. Встановлено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1), розглядуваної в лінійному нормованому просторі $\left(V,\|\cdot\|\right)$, екстремальним задачам відшукання величини (2.6), (2.7), розглядуваним в лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$.

3. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем.

4. Встановлено опуклість і неперервність цільової функції задачі відшукання величини (2.1) ((0.7)) на просторі $\left(V,\|\cdot\|\right)$, опуклість і неперервність цільових функцій задач відшукання величин (2.6), (2.7) на просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$.

5. За умови повноти та опуклості множини A в задачі відшукання величини (2.1) доведемо неперервність на лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$ екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1).

6. Встановлено співвідношення, які зводять відшукання інфімуму в задачах відшукання величин (2.1), (2.6), (2.7) до відшукання максимуму в деякій двоїстій до них задачі (співвідношення двоїстості для задачі відшукання величин (2.1), (2.6), (2.7)).

7. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості, та наслідки з нього.

8. Встановлено достатні умова екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), яка справедлива для будь-якої множини A допустимих елементів для цієї задачі.

Практичне значення отриманих результатів. Дипломна робота є роботою теоретичного характеру. Результати дипломної роботи можна використати при розв'язуванні задач практичного характеру, математичні моделі яких є задачами на відшукання у заданій множині евклідового простору $\left(V,\|\cdot\|\right)$ точки, сума зважених квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок цього простору була б найменшою. Серед таких задач є, зокрема, задача відшукання в множині A площини точки, відносно якої момент інерції $I=\sum_{i=1}^{m} m_i\rho^2\left(M_i,A\right)$ m матеріальних точок M_i, $i=\overline{1,m}$, з масами, рівними відповідно m_i, $i=\overline{1,m}$, був б найменшим; задача відшукання точки прямої площини, сума квадратів відстаней (зважених квадратів відстаней) від якої до кількох заданих точок площини була б найменшою, задачі найкращого у розумінні квадрата відстані наближення точки евклідового простору множиною цього простору тощо.

Результати роботи можна використати також для побудови збіжних чисельних методів для відшукання величини (2.1) з наперед заданою точністю.

Апробація результатів роботи. Результати роботи доповідались на засіданнях студентської проблемної групи «найкраще рівномірне наближення компактнозначних відображень», яка створена при кафедрі математики; *н*аукової конференції здобувачів вищої освіти фізико-математичного факультету Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка.

Публікації за результатами дослідження:

Гнатюк В.О., Гудима У.В., Панасюк Д.С. Зважена задача типу задачі Штейнера в евклідовому просторі. *Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки*. Випуск 19. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2025.

Структура роботи. Робота складається зі вступу, трьох розділів, висновків та опису використаних джерел.

Перший розділ містить деякі допоміжні поняття та твердження теорії лінійних над полем дійсних чисел просторів; лінійних над полем дійсних чисел нормованих просторів; просторів, спряжених з лінійними нормованими просторами; евклідових і гільбертових просторів; просторів, спряжених з евклідовими та гільбертовими просторами. Крім того, розглянуто відповідні поняття та твердження n-вимірного дійсного евклідового простору R^n; умови, за яких в нерівності Коші-Буняковського має місце знак рівності, двоїсте подання норм елементів евклідового простору.

У другому розділі поставлено зважену задачу типу задачі Штейнера в евклідовому просторі (задача відшукання величини (2.1)), яка є задачею відшукання у множині евклідового простору $(V,\langle\ ,\ \rangle)$ точки, сума зважених квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок цього простору є найменшою; розглянуто евклідів простір $\left(V^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$, де $V^m=\left\{(u_1,...,u_m): u_i\in V, i=\overline{1,m}\right\}$, а для $u=(u_1,...,u_m)$, $\vartheta=(\vartheta_1,...,\vartheta_m)\in V^m$ $\langle u,\vartheta\rangle_{V^m}=\sum_{i=1}^{m}c_i\langle u_i,\vartheta_i\rangle$, $c_i>0$, $i=\overline{1,m}$; лінійний нормований простір $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$, де для $u=(u_1,...,u_m)$ $\|u\|_{V^m}=\sqrt{\langle u,u\rangle_{V^m}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}c_i\|u_i\|^2}$, встановлено умови повноти евклідового простору $\left(V^m,\langle\cdot,\cdot\rangle_{V^m}\right)$ та умови повноти множини $D=\left\{(u,...,u)\in V^m: u\in A\right\}$, де $A\subset V$; встановлено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1), розглядуваної в лінійному нормованому просторі задачі $(V,\|\cdot\|)$, екстремальним задачам відшукання величин (2.6), (2.7), розглядуваним в лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$; доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем; встановлено опуклість і неперервність цільових функцій задач (2.1), (2.6), (2.7); доведено неперервність на лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$ екстремального оператора для задачі відшукання величин (2.1).

У третьому розділі встановлено співвідношення двоїстості для величин (2.1), (2.6), (2.7); доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості; встановлено достатні умови екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), які справедливі для будь-якої множини допустимих елементів цієї задачі.

ВИСНОВКИ

Внаслідок досліджень, проведених у дипломній роботі «Зважена задача типу задачі Штейнера в евклідовому просторі»:

1. Кожній парі $u=\left(u_1,...,u_m\right)$, $\vartheta=\left(\vartheta_1,...,\vartheta_m\right)\in V^m$ лінійного над полем дійсних чисел простору V^m, який є m-им декартовим степенем лінійного над полем дійсних чисел простору V, де $\left(V,\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle\right)$ – евклідів простір, поставлено у відповідність число $\left\langle u,\vartheta\right\rangle_{V^m}=\sum\limits_{i=1}^{m}c_i\left\langle u_i,\vartheta_i\right\rangle$, де c_i, $i=\overline{1,m}$, – фіксовані додатні дійсні числа.

Доведено, що $\left\langle u,\vartheta\right\rangle_{V^m}$, $u,\vartheta\in V^m$, є скалярним добутком, заданим на V^m, і, отже, $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$ є лінійним нормованим простором, де для $\tau=\left(u_1,...,u_m\right)\in V^m$

$$\|\tau\|_{V^m}=\sqrt{\left\langle\tau,\tau\right\rangle_{V^m}}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}c_i\left\langle u_i,u_i\right\rangle}=\sqrt{\sum_{i=1}^{m}c_i\|u_i\|^2}.$$

Доведено також, що коли $\left(V,\|\cdot\|\right)$, де для $u\in V$ $\|u\|=\sqrt{\left\langle u,u\right\rangle}$, є повним евклідовим простором (гільбертовим простором), то $\left(V^m,\left\langle\cdot,\cdot\right\rangle_{V^m}\right)$ також є повним евклідовим простором; коли A є повною множиною лінійного нормованого простору $\left(V,\|\bullet\|\right)$, то $D=\left\{\left(u,..,u\right)\in V^m : u\in A\right\}$ є повною множиною лінійного нормованого простору $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$.

2. Встановлено еквівалентність задачі відшукання величини (2.1), розглядуваної в лінійному нормованому просторі $\left(V,\|\cdot\|\right)$, екстремальним задачам відшукання величини (2.6), (2.7), розглядуваним в лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$.

3. Доведено теореми існування та єдиності екстремального елемента для задачі відшукання величини (2.1) та наслідки з цих теорем.

4. Встановлено опуклість і неперервність цільової функції задачі відшукання величини (2.1) на просторі $\left(V,\|\cdot\|\right)$, опуклість і неперервність цільових функцій задач відшукання величин (2.6), (2.7) на просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$.

5. За умови повноти та опуклості множини A в задачі відшукання величини (2.1) доведемо неперервність на лінійному нормованому просторі $\left(V^m,\|\cdot\|_{V^m}\right)$ екстремального оператора для задачі відшукання величини (2.1).

6. Встановлено співвідношення, які зводять відшукання інфімуму в задачах відшукання величин (2.1), (2.6), (2.7) до відшукання максимуму в деякій двоїстій до них задачі (співвідношення двоїстості для задачі відшукання величин (2.1), (2.6), (2.7)).

7. Доведено критерій екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), основаного на співвідношенні двоїстості, та наслідки з нього.

8. Встановлено достатні умова екстремальності допустимого елемента для задачі відшукання величини (2.1), яка справедлива для будь-якої множини A допустимих елементів для цієї задачі.

Результати дипломної роботи мають теоретичний характер. Їх можна використати при розв’язуванні задач практичного характеру, математичні моделі яких є задачами на відшукання у заданій множині евклідового простору $\left(V,\|\cdot\|\right)$ точки, сума зважених квадратів відстаней від якої до кількох заданих точок цього простору була б найменшою. Серед таких задач є, зокрема, задача відшукання в множині A площини точки, відносно якої момент інерції $I=\sum_{i=1}^{m} m_i\rho^2\left(M_i,A\right)$ m матеріальних точок M_i, $i=\overline{1,m}$, з масами, рівними відповідно m_i, $i=\overline{1,m}$, був б найменшим; задача відшукання точки прямої площини, сума квадратів відстаней (зважених квадратів відстаней) від якої до кількох заданих точок площини була б найменшою, задачі найкращого у розумінні квадрата відстані наближення точки евклідового простору множиною цього простору тощо.

Результати роботи можна використати також для побудови збіжних чисельних методів для відшукання величини (2.1) з наперед заданою точністю.

СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

1. Жалдак М.І., Триус Ю.В. Основи теорії і методів оптимізації: Навчальний посібник. Черкаси: Брама-Україна, 2005. 698 с.

2. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в полінормованому просторі, в якій відхилення між елементами визначаються з допомогою сублінійних функціоналів. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2023. Вип.24. С.45-62.

3. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови екстремальності допустимого елемента для узагальненої задачі Штейнера в деякому полінормованому просторі. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2022. Вип.23. С.29-43.

4. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Умови існування екстремального елемента узагальненої задачі Штейнера в метричному просторі обмежених замкнених множин лінійного нормованого простору. Математичне та комп'ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2021. Вип.14. С.8-13.

5. Гудима У. В., Гнатюк В. О. Співвідношення двоїстості та критерії екстремальності елемента для задачі відшукання відстані між двома опуклими множинами лінійного нормованого простору. Математичне та комп'ютерне

моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2018. Вип.18. С.65-77.

6. Гнатюк Ю.В. Двоїсті співвідношення для задачі найкращого за дробово-опуклою функцією наближення кількох елементів та критерій елемента найкращого наближення. Доп. НАН України, 1995. №6. С.23-26.

7. Гнатюк Ю.В. Основні властивості задачі найкращого одночасного наближення кількох елементів. Укр. мат. журн., 1996. 48, №9. С.1183-1193.

8. Гнатюк В.О., Гудима У.В., Терехов Д.В. Існування та єдиність екстремального елемента для задачі типу задачі Штейнера в гільбертовому просторі. Вісник Кам'янець-Подільського національного університету імені Івана Огієнка. Фізико-математичні науки. Кам'янець-Подільський : Кам'янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2024. Вип. 17. С.32-36.

9. Сарана О.А., Семенець С.П. Нестандартні геометричні задачі: Навчально-методичний посібник. Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2007. 150 с.

10. Weber, Alfred. Über den Standort der Industrien. Erster Teil: Reine Theorie des Standorts. Tübingen: J.C.B. Mohr (Paul Siebeck), 1909. 252 s.

11. Навчальні завдання до практичних занять з математичного аналізу для студентів механіко-математичного факультету (1 семестр другого курсу, частина II)/Упорядн. А.Я. Дороговцев, О.Г. Кукуш, М.О. Денисьєвський, А.В. Чайковський. К.: ВПЦ «Київський університет», 2004. 48с.

12. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Опуклий аналіз: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський : Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2019. 112с.

13. Ус С.А. Функціональний аналіз : навчальний посібник. Д.: Національний гірничий університет, 2013. 236 с.

14. Годич В.І. Гнатюк Ю.В. Лінійна алгебра: навчальний посібник. Кам’янець-Подільський: Медобори-2006, 2013. 290 с.

15. Laurent P-J. Approximation et optimization. Universite scientifique et medicale de Grenoble. Herman, Paris, 1972. 531р.

16. Федак І.В. Курс лекцій з функціонального аналізу та теорії міри. Навчальний посібник. Ч. 3. Основні структури функціонального аналізу. Івано-Франківськ: ПНУ імені Василя Стефаника, 2020. 40с.

17. Гудима У.В., Гнатюк В.О. Умови існування екстремального елемента для задачі відшукання відстані між двома множинами, єдиності екстремального елемента еквівалентної їй задачі, властивості функції відстані. Математичне та комп’ютерне моделювання. Серія: Фізико-математичні науки: зб. наук. праць. Кам’янець-Подільський: Кам’янець-Подільський національний університет імені Івана Огієнка, 2020. Вип. 21.С. 84-99.

18. Шунда Н.М., Томусяк А.А. Практикум з математичного аналізу: Вступ до аналізу. Диференціальне числення. Навчальний посібник. К.: Вища школа, 1993. 375 с.

19. Дороговцев А.Я. Математичний аналіз : Підручник. У двох частинах. Частина 2. К.: Либідь, 1994. 304 с.